UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01569925 9

UNIV.OF
TORONTO
LIBRARY

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS.

Imprimerie de Joh. ENSCHEDÉ & Fils, Harlem.

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME DIX-HUITIÈME

L'HORLOGE À PENDULE
OU À BALANCIER DE 1666 À 1695.
ANECDOTA.

319310
1.9.35

LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1934

Q
113
H87
1888
t. 18

L'HORLOGE À PENDULE
OU À BALANCIER DE 1666 À 1695.
ANECDOTA.

L'HORLOGE À PENDULE OU À BALANCIER DE 1666 À 1695.

Avertiſſement.

Les Tomes qui précèdent contiennent à peu de choſe près [1]) les travaux de Huygens depuis ſa jeuneſſe juſqu'à ſon départ pour Paris en 1666. Les principales Pièces qui y manquent ſont les Journaux de Voyage de 1660-1661 et 1663 — d'ailleurs ſouvent cités; voir p. e. les p. 69—71 du T. XV — que nous inférerons dans la biographie finale [2]). Mentionnons auſſi une collection encore inédite dans ſon enſemble de proverbes et maximes tirés par le jeune Huygens de Cicéron et de quelques autres auteurs anciens grecs et latins. Quelques-unes de ces citations, dont le choix eſt évidemment caractériſtique pour Huygens, ont été publiées en 1929 [3]). On trouvera dans les Journaux de Voyage — voir d'ailleurs ſur deux paſſages du premier Journal où il eſt queſtion des horloges les notes 7 de la p. 159 [4]) et 2 de la p. 246 du T. XVII —

---

[1]) Voir sur un sujet non encore traité jusqu'ici le premier alinéa de la p. 265 du T. XVII. Le lecteur futur qui dispose de tous les Tomes pourra trouver dans les „Varia" quelques figures se rapportant à la période qui se termine en 1666, et aussi une Pièce de 1658 sur la voix humaine commençant par les mots: „Diversitas tonorum fit arctatione laryngis majori minorive". Quant aux travaux de Huygens sur les corps oscillants qui sont traités dans le Tome XVI (p. 385—391 et 414—555), ceux qui s'intéressent spécialement à ces calculs, trouveront encore quelque chose à glaner dans les Manuscrits B et C.

[2]) Ces Journaux de Voyage — comparez la fin de la note 5 qui suit — seront d'ailleurs fort probablement publiés par Mons. H. L. Brugmans en 1934 avant la fin de l'impression du présent Tome; voir à ce sujet les Additions et Corrections qui suivent.

[3]) Dans le T. VII du périodique „Christiaan Huygens" (éd. F. Schuh, Noordhoff, Groningen)

le récit des relations perſonnelles de Huygens avec diverſes perſonnes en France et en Angleterre; et l'on y remarquera à Paris ſa préſence en pluſieurs réunions ſcientifiques qui conduiſirent tout naturellement à la création d'une Académie officielle à l'inſtar de la „Royal Society". En devenant membre de cette Académie — nous réſervons les détails ſur ce ſujet pour la biographie, nous bornant ici à dire qu'Iſmaël Boulliau dans une lettre inédite appelle Huygens „omnium caput" [5]) — il fut, comme on le comprend, amené à s'occuper de quelques ſujets nouveaux pour lui. Toutefois (comme cela reſſort auſſi clairement des T. XIII et XV) ce fut en premier lieu à pourſuivre ſes études anciennes qu'il s'appliqua. Il y a notamment une parfaite continuité entre ſes recherches ſur les horloges — et ſur les ſujets mathématiques qui s'y rattachent — antérieures à 1666 (T. XVII) et celles appartenant à la période françaiſe de 1666 à 1681 [6]) et à la deuxième période hollandaiſe de 1681 à 1695. Nous vouons donc le préſent Tome à ces travaux-là ſans inſiſter ſur l'influence du milieu.

dans un article intitulé „Christiaan Huygens, eenige citaten en beschouwingen naar aanleiding van den driehonderdsten gedenkdag zijner geboorte".

[4]) Observons en passant que l'horloger „Martinet" s'appelait en réalité „Martinot", comme Huygens l'écrit dans son Journal.

[5]) Boulliau écrit à Hevelius le 18 février 1667: „Ne tamen præcipua nomina hujus collegii te lateant, nota mihi adscribam. Omnium caput est Ill.mus Christian Hugenius, qui ex Batavia evocatus sex millium florenorum Polonicorum annua pensione fruitur; sequuntur Robervallius etc.". Cette lettre qui se trouve à Paris à la Bibliothèque Nationale nous a été signalée par Mons. Harcourt Brown de Canada, de qui un travail sur la genèse des sociétés scientifiques en Europe au dix-septième siècle — lequel contiendra plusieurs passages inédits du Journal de Voyage de 1660—1661 de Huygens — paraîtra dans le cours de l'année suivante (1934); voir à ce sujet les Additions et Corrections qui suivent.

[6]) Cette „période française" fut d'ailleurs interrompue par deux séjours prolongés en Hollande (1670—1671 et 1676—1678).

L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

L'ordre chronologique que nous avons obfervé dans la partie du T. XVII vouée à l'horloge à pendule de 1656 à 1666 nous amène à parler ici de l'hiftoire de cette même horloge, en tant qu'elle regarde Huygens, de 1666 à 1673.

I. Horloges marines.

Comme nous l'avons dit à la p. 177 du T. XVII, l'horloge marine fut patentée en France peu avant le 4 mars 1665, grâce à l'influence du père Conftantijn auprès de Louis XIV. Le 13 février Conftantijn écrivit de Paris à Chriftiaan (qui venait de préfenter au Roi la Requête qui conftitue notre Appendice I): „C'eft une excellente preuve des Pendules, que celle de Holmes [1]). Je la feray veoir au Roy et parleraij pour avoir icij le Privilège"; et le 27 février: „J'ay leu dans ma derniere Audience au Roij, tout du long la copie de votre lettre de Mons.r Morraij [2]) qu'il a entendue avec plaifir, comme aujourd'huy Monfieur Frère du Roy en prefence de fa femme, m'en a fort bien fceu repeter le contenu. Pour le Roy, quand je lui ay parlé du privilege, il m'a dit qu'il le donneroit"[3]).

Chriftiaan qui fe trouvait encore en Hollande donna le 20 mai 1665 plein pouvoir à Chapelain pour difpofer du privilège: l'horloger Ifaäc Thuret (comparez la note 2 de la p. 235 du T. XVII) était venu voir Chapelain déjà en mars pour le prier d'offrir fes fervices à Huygens pour la conftruction des dites horloges et pour leur vente et diftribution [4]). Voici le texte de la

Procuration.

gegroffeert [5])

---

[1]) Comparez la p. 223 du T. V.

[2]) Voir à ce sujet la p. 230 du T. XVII.

[3]) Le 13 mars 1665 Constantijn écrivit: „Je trouve votre inftruction marino-pendule [T. XVII, p. 199—235] fort nette et claire". Ces fragments de lettres sont inédits. Ils sont tirés d'un „Memorie [d'ailleurs peu important] raekende de verblijven van de Heer Christiaen Huygens in Engelandt", qui se trouve dans l'un des deux portefeuilles „Varia". Évidemment la famille, ou d'autres personnes à qui elle les avait confiées, possédaient au dix-huitième siècle une collection de lettres échangées entre Constantijn et ses fils qui se sont égarées plus tard. Toutefois il ne paraît pas absolument impossible que ces lettres existent encore aujourd'hui.

L'auteur du „Memorie" n'est pas nommé, mais un membre de la famille qui appelle Chr. Huygens son grand-oncle dit avoir reçu cette pièce, ainsi que des pièces et lettres ayant appartenu au dit grand-oncle, de la veuve du professeur G. J. 's Gravesande, éditeur des Oeuvres de Huygens au dix-huitième siècle, lequel mourut en 1742.

[4]) T. V, p 267. Voir aussi à la p. 357 du T. V la lettre de Huygens du 21 mai à Chapelain qui accompagna la Procuration à laquelle Huygens ajouta encore la Pièce No. 1409 (T.V, p. 358).

[5]) C. à. d. copié. Nous empruntons cette copie à la f. 206 du No. 277 des archives notariales (arch. communales) de la Haye.

Par devant moij Martin Beeckman notaire publicq admis par la Cour Provinciale d'Hollande residant à la Haije, & devant les tesmoins soubsignez fust present en sa personne Monsieur Christian Huijgens de Zulichem, demeurant dans ce lieu de la Haye lequel a declaré avoir fait et constitué son Procureur general & special le Sieur Jean Chapelain Conseiller du Roy en ses conseils demeurant à Paris, luy donnant plein pouvoir & authorisation de pour luy et en son nom, disposer du privilege que le dit S^r. Constituant a obtenu de sa Maj.^té Tres Chrestienne dans cette année 1665 de sa nouvelle Invention d'horologe à pendule [1]) lequel privilege ledit Sieur Chapelain a entre ses mains, — Et le pourra vendre, et transporter à telle, ou telles conditions que ledit S^r. le trouvera a propos, faire dresser, et passer pour cest effect des Contracts et Escripts à ce necessaires, recevoir les deniers qui en proviendront, donner quittance Et generallement agir et gerer comme ledit S^r. Constituant faire pourroit ij estant mesme en personne, promettant ledit Sieur Huijgens de ratifier, tenir ferme et irrevocable tout ce qu'en vertu de cettes sera fait et contracté par le dit Sieur Chapelain, sous obligation de renonciation comme de droit à ce requis. Ainsy fait et passé à la Haye en Hollande le vingtiesme de May mil six cens soixante cincq en la presence de Corneille van Broeck et Guillaume Bronsvelt tesmoins dignes de foy a ce requis.

Chr. Hugens de Zulichem
C. van Broeck G. Bronsvelt
1665 A. Beeckman Nots. Publ. 1665.

A la suite de cette procuration, Chapelain entra en négociations avec Thuret. Se souvenant du projet qu'il avait envoyé à Huygens d'un remontoir à ressorts à remontage d'heure en heure [2]), Thuret avait quelque soupçon que l'horloge de Huygens serait une construction de ce genre [3]). Thuret construisit en outre dans le cours de 1665 un remontoir à ressorts à remontage fréquent qu'il montra à Chapelain [4]). Huygens, à qui Chapelain communiqua les propos de Thuret, répondit qu'il avait également fait construire à la Haye, indépendamment de Thuret, une montre à deux ressorts à remontage fréquent et qu'il considérait cette invention comme une dépendance de la sienne, c. à. d. du remontoir à poids à remontage fréquent [5]). Il faut croire que Thuret montra son invention à Chapelain avant d'avoir vu les remontoirs à poids moteurs à remontage fréquent de S. Oosterwijck destinés à de Montmort et à de Carcavy, lesquels arrivèrent à Paris avant le

[1]) Il s'agit apparemment du remontoir à poids moteurs à remontage fréquent qui était destiné à l'usage sur mer; voir la Fig. 73 de la p. 178 du T. XVII. Toutefois le privilège s'appliquait, parait-il, aux „montres a Pendule sur mer" en général; voir la p. 177 du T. XVII.

[2]) Voir sur les remontoirs à ressorts de ce genre la troisième ligne d'en bas de la note 3 de la p. 10 et les p. 181—182 du T. XVII.

[3]) T. V, p. 371; T. XVII, p. 181—182.

[4]) T. V, p. 511.

[5]) T. V, p. 525; T. XVII, p. 182.

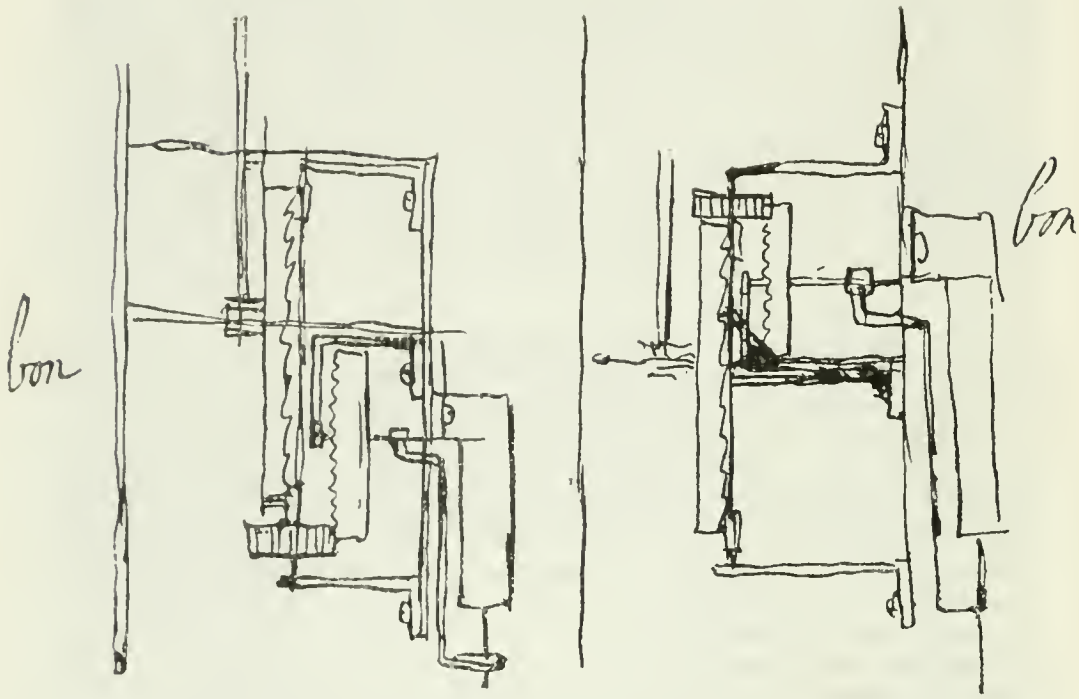
20 août 1665 et qu'il eut l'occaſion d'examiner [6]). Il eſt vrai que la lettre de Chapelain dans laquelle celui-ci dit avoir vu la nouvelle montre de Thuret date du 23 octobre ſuivant [7]), mais dans cette lettre il dit que Thuret n'attendit pas „a descouvrir ſon inuention qu'il euſt vu l'execution de la voſtre". Cela étant, il faut admettre que Thuret — à moins qu'il n'ait appris par une autre voie que dans l'horloge de Huygens il y avait un remontage fréquent — a eu, indépendamment de Huygens, l'idée d'introduire le remontage fréquent dans ſes montres à reſſorts. Ce qui eſt certain c'eſt que peu de temps après avoir conſidéré l'horloge marine envoyée de la Haye à de Montmort, Thuret a exprimé des doutes ſur le ſuccès de ce remontoir-là. Nous rappelons que le capitaine Holmes n'avait pas encore eu à ſa diſpoſition ce remontoir dont la conſtruction n'avait eu lieu qu'après ſon départ [8]). L'horloger pariſien dit „que les chaisnettes de [la] machine [de Huygens, c. à. d. du remontoir nommé] eſtoient d'un artifice moins ſimple que le ſien, et plus ſujet a arreſt" [4]). De l'autre côté Huygens émit l'opinion que les reſſorts ne doivent pas „operer touſjours de meſme force" [9]).

En juin 1665 Huygens fut invité par Colbert à venir demeurer à Paris comme membre de l'Académie des Sciences [10]). Bientôt Chapelain ceſſa par conſéquent de négocier avec Thuret, diſant que Huygens s'ajuſterait ſans doute beaucoup mieux auec lui perſonnellement que par autrui [11]). Tel fut évidemment le cas; nous ignorons toutefois les particularités de l'accord conclu ſans doute en 1666. Ce n'eſt qu'en avril 1667 [12]) que Huygens parle de trois horloges faites à Paris „par mon ordre, mais au depens du Roy, pour ſervir au voyage de Madagaſcar". Il ajoute: „A celles la je ne ſais point adjouter l'invention de la chaiſnette, parce que je vois qu'elle donne trop d'embarras" [13]). Dans une lettre de décembre 1667 à ſon frère Lodewijk [14]) il nous apprend que les horloges nouvellement conſtruites „ne ſont pas avec la chainette en dedans, mais ſimplement comme les pendules ordinaires". Il eſt poſſible que les Fig. 1 et 2 [15]), leſquelles ſont déſignées par Huygens par le mot bon repréſentent avec plus ou moins de fidélité des horloges réellement conſtruites en 1667. La verge à palettes y eſt verticale comme dans le modèle de 1658 [16]). Cette poſition de la verge dans une horloge munie d'arcs cycloïdaux et conſtruite après 1659 eſt quelque peu étonnante: voir les p. 93—96 du T. XVII. Il faut cependant remarquer que la conſtruction diffère de celle de 1658. Il n'eſt d'ailleurs pas abſolument certain qu'il s'agit ici d'horloges marines. La verge à palettes eſt apparemment horizontale dans une autre figure [Fig. 3] à côté de laquelle ſe trouvent les mots „de Thuret" [17]). Ce qui eſt certain c'eſt qu'en ce temps ni la conſtruction de 1664 de Huygens ni celle de 1665 de Thuret n'avait prévalu: on ne fit uſage ni d'un remontoir à poids ni

---

6) T. V, p. 439, 474, 476, 511.
7) T. V, p. 510. La lettre précédente de Chapelain est du 27 août.
8) T. XVII, p. 194, 234.
9) T. V, p. 525 (5 novembre 1665); T. XVII, p. 182.
10) T. V, p. 375.
11) T. V, p. 510.
12) T. VI, p. 129.
13) Comparez la p. 396 du T. VI, où l'on voit aussi que Huygens apporta à Paris les deux remontoirs construits pour lui par S. Oosterwijck (T. XVII, p. 183, Fig. 75).
14) T. VI, p. 167.
15) Manuscrit C, p. 136. Cette page date de février 1667.
16) T. XVII, p. 43, Fig. 8.
17) Manuscrit C, p. 142 (février 1667).

[Fig. 1.] [Fig. 2.]



d'un remontoir à reſſorts dans l'expédition de Madagaſcar; et il en fut de même dans celle de Candie de 1668—1669 [1]). Les „pendules ordinaires" employés étaient à poids moteurs puiſque Huygens dit que dans les horloges à chaînette „il falloit un contrepoids trois fois ſi grand qu'autrement" et que dans le cas du voyage de Candie le „contrepoids" eſt expreſſément mentionné à la p. 502 du T. VI ainſi que dans l'„Horologium oſcillatorium" (voir la p. 118 qui ſuit).

Dans la lettre de 166- à Lodewijk, Huygens parle de plus de deux nouveaux types d'horloges, dont le dernier eſt achevé ou peu ſ'en faut: „l'un avec un pendule qui tourne en rond, et l'autre d'une façon trop longue a deduire, qui pourtant n'eſt nullement embarraſſée".

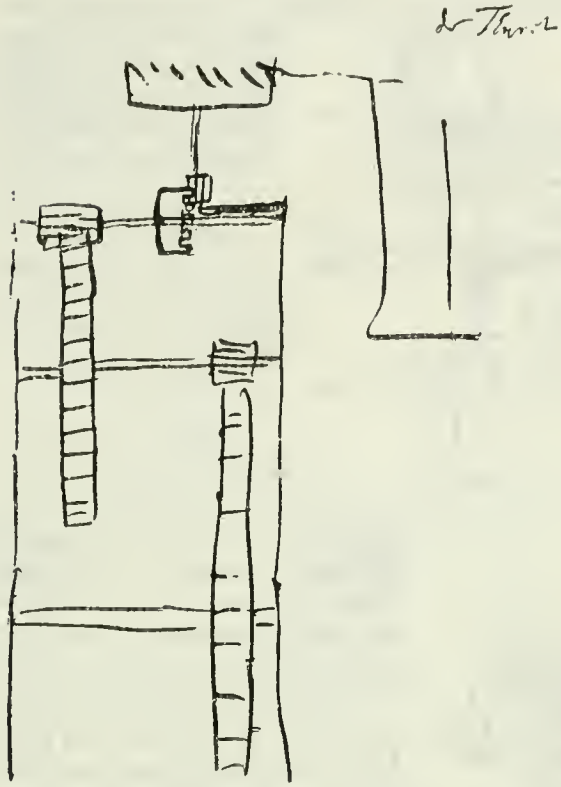
La Fig. 4 [2]) repréſente l'horloge à pendule conique dont nous ignorons ſi dans la penſée de Huygens elle eût pu ſervir ſur mer. Une horloge à pendule conique fut conſtruite en 1668 (T. VI. p. 267).

---

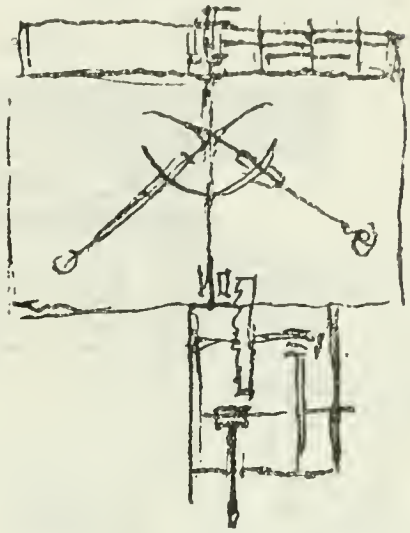
[1]) Dans cette dernière expédition (voir les p. 116—119 qui suivent) le duc de Beaufort n'eut à sa disposition qu'une seule horloge (T. VI, p. 501).

[2]) Manuscrit C, p. 112 (novembre ou décembre 1666). On y trouve encore quelques autres figures du même genre. Comparez la p. 360 qui suit d'après laquelle plusieurs horloges à pendule conique furent construites avant 1673.

[Fig. 3.]



[Fig. 4.]



Le deuxième type mentionné par Huygens nous eſt inconnu. Il eſt poſſible qu'il ſ'agiſſe, comme en 1664 et 1665 [3]), de pendules enfermées dans de lourdes boîtes, telles qu'elles ſont repréſentées dans les Fig. 5 et 6 datant de 1668 [4]). Ce qui eſt nouveau ici (outre peut-être la conſtruction des pendules — voir la fin du préſent alinéa — inviſibles dans les figures) c'eſt que la ſolive à laquelle les pendules ſont attachées eſt dans l'une des deux figures [Fig. 6] ſuſpendue à la Cardan. On lit dans la Fig. 5: „poutre du vaiſſeau [5]). — 10 pouc. — fer large de 2 pouces et mince qui faſſe un peu de reſſort. — fer large de meſme. — petite ſolive de 3 pouces en quarrè. — double charniere afin que les horologes ne tournent point [6]). — les pen-

[3]) Voir la Fig. 75 à la p. 183 du T. XVII.

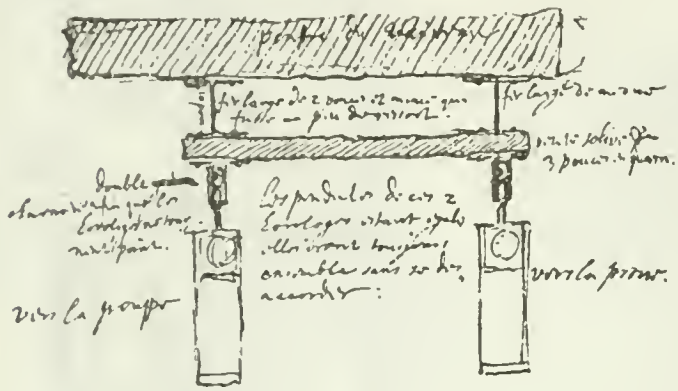
[4]) Manuscrit C, p. 258, datant de mai ou de juin 1668.

[5]) En 1665 (voir le deuxième alinéa de la p. 162 du T. XVII) il était aussi question d'attacher les horloges „a quelque poutre", mais le contexte fait voir qu'il s'agissait là de les attacher à une poutre, sans doute verticale, de telle manière qu'elles ne pouvaient balancer.

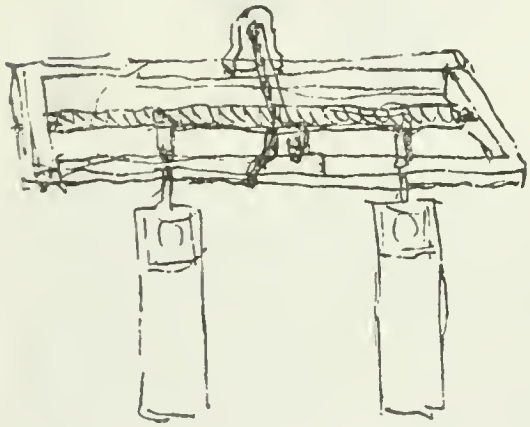
[6]) Comparez le premier alinéa de la p. 162 du T. XVII.

dules de ces 2 horologes eſtant egales elles iront touſjours enſemble ſans ſe deſaccorder [1]). — vers la pouppe. — vers la proue". Rien n'indique que des horloges aient réellement été ſuſpendues de cette façon à bord d'un navire. L'horloge du duc de Beaufort (1668) était enfermée dans une lourde boîte (voir la p. 118 qui ſuit), mais il n'en avait qu'une. Notons que la longueur du pendule y était de 9 pouces (voir la note 3 de la p. 119 qui ſuit). Voir encore ſur cette horloge la note 2 de l'Appendice II qui ſuit.

[Fig. 5.]



[Fig. 6.]



C'eſt de 1671 ou 1672 que date l'horloge marine à reſſort moteur et à pendule triangulaire [2]) avec ſuſpenſion à la Cardan — comparez la phraſe de l'Appendice III qui ſuit ſur la „hauteur" du „point de ſuſpenſion" — ſur laquelle on peut conſulter les p. 120—123 qui ſuivent. En 1673 cette horloge n'avait pas encore été miſe à l'épreuve [3]).

Nous reproduiſons ici [Fig. 7] ce pendule tel que le Manuſcrit D le repréſente pour la première fois [4]), ainſi que quelques ſuſpenſions de l'horloge antérieures (?) à la ſuſpenſion nommée et dont rien ne démontre qu'elles aient été réaliſées [Fig. 7bis [5]) et 7ter [5])].

Huygens écrit [4]): „Il faut, pour avoir le pendule [Fig. 7] d'environ 6 pouces, que les 5 vibrations faſſent 2 ſecondes. Ce qui ſera ainſi en donnant 15 dents a la roue de rencontre [6]), et la faisant tourner 5 fois dans une minute".

---

[1]) Voir les p. 183—186 du T. XVII (sympathie des horloges).

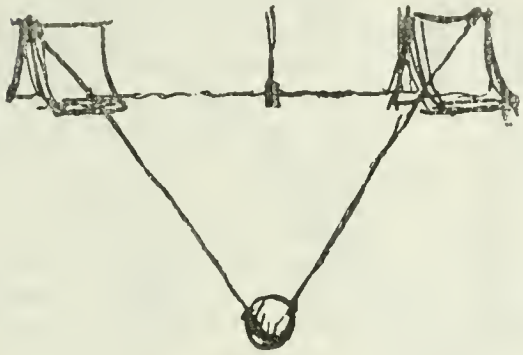
[2]) Nous avons déjà dit au T. XVII (p. 168 et suiv.) que l'horloge à pendule triangulaire de 1671 ne doit pas etre confondue avec le „drykantig slingerwerck" de 1663.

[3]) Voir la note 3 de la p. 14 qui suit. Comparez les p. 142 et 210 du T. VII.

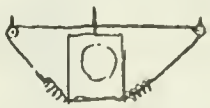
[4]) P. 289. La p. 287 du Manuscrit D porte la date du 29 septembre 1671.

[5]) Manuscrit D, p. 293.

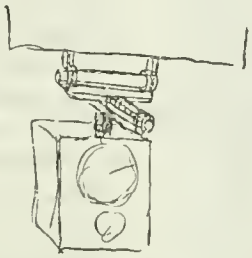
[Fig. 7.]

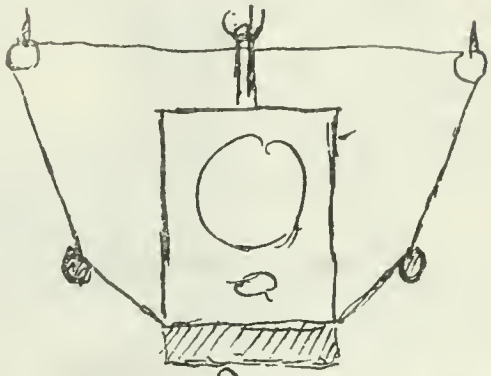


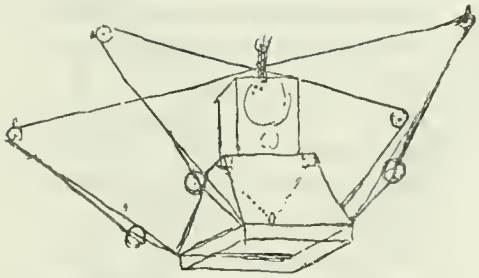
[Fig. 7ter.]

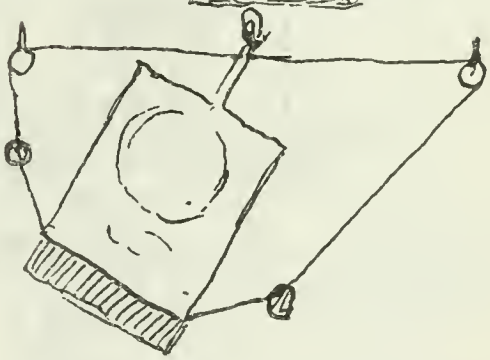


[Fig. 7bis.]









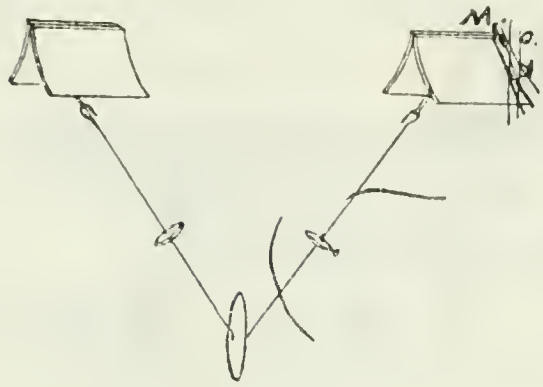
Nous reproduiſons auſſi [Fig. 8] le deſſin plus achevé du même pendule, où le poids n'eſt plus ſphérique et où le fil porte deux poids curſeurs, ainſi que celui de l'horloge entière [Fig. 9] qui ſe trouvent l'un et l'autre ſur la feuille détachée déjà mentionnée au T. XVII[7]). Ces deux figures

---

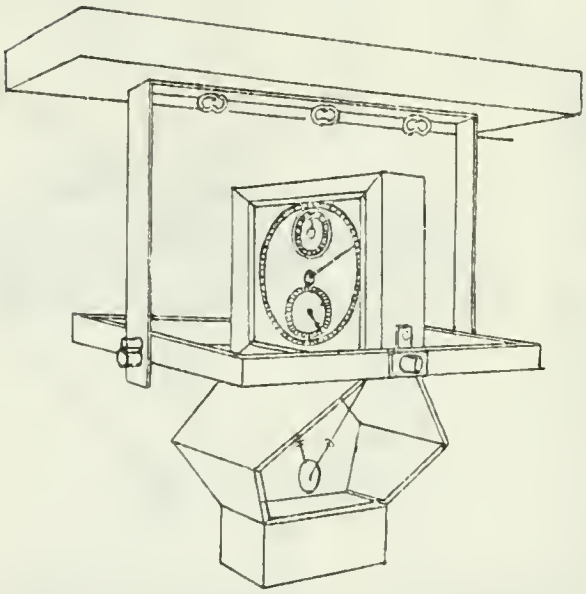
[6]) Nous avons dit à la p. 547 du T. XVII que le nombre des dents de la roue de rencontre doit de préférence être impair; il n'en était pas toujours ainſi, comme cela ressort aussi de ce que Huygens dit à la p. 491 du T. VI ſur la verge à palettes ou „eguille du balancier" (comparez la note 6 de la p. 9 du T. XVII).

[7]) T. XVII, p. 142. Il s'agit du feuillet 158—159 des „Chartæ mathematicæ". La p. 323 du Manuscrit D porte un dessin au crayon du même genre.

[Fig. 8.]



[Fig. 9.]



reſſemblent beaucoup aux figures correſpondantes de l'„Horologium oſcillatorium" [1]). Mais ce dernier livre ne contient pas de deſcription de l'intérieur de cette horloge marine [Fig. 10], lequel a été eſquiſſé en 1672 par Huygens, avec la moitié du cadran, dans le Manuſcrit D [2]), où ſe trouve auſſi une figure [Fig. 11] faiſant voir e. a. la poſition, par rapport au pendule et aux roues qui mènent les aiguilles, de quelques boulons [3]). Le fait que dans la Fig. 11 il n'y a pas de poids curſeurs ſur le fil du pendule eſt peu important. D'après la Fig. 11 le poids du pendule est apparemment une lentille. Dans la Fig. 10 une des parties ſupérieures du fil du pendule eſt ſeule repréſentée: elle porte à ſon extrémité la boucle par laquelle doit paſſer le crochet qu'on voit dans la Fig. 11. On lit dans la Fig. 10: „Mon Horologe pour les Longitudes. — hìc index horarum 12. atque in centro indicis caput axis quadratum eminet, cui clavis accommodatur quoties elaterem tendere opus eſt. — hìc index ſcrupulorum primorum qui ſemel in hora circumit. — hìc index ſcr. ſecundorum qui 60 converſiones facit in horas. — 9000 vibrationes ſimplices ſingulis horis peragit pendulum, cujus longitudo circiter pollices 6. — Eſt autem triangulare ex binis cycloidibus ſuſpenſum, ut apparet ex figura paginæ præcedentis [Fig. 11] quæ dimidium ejus ac totius compagis exhibet". Dans la Fig. 10 Huygens a indiqué les nombres des dents de toutes les roues ainſi que ceux des pignons.

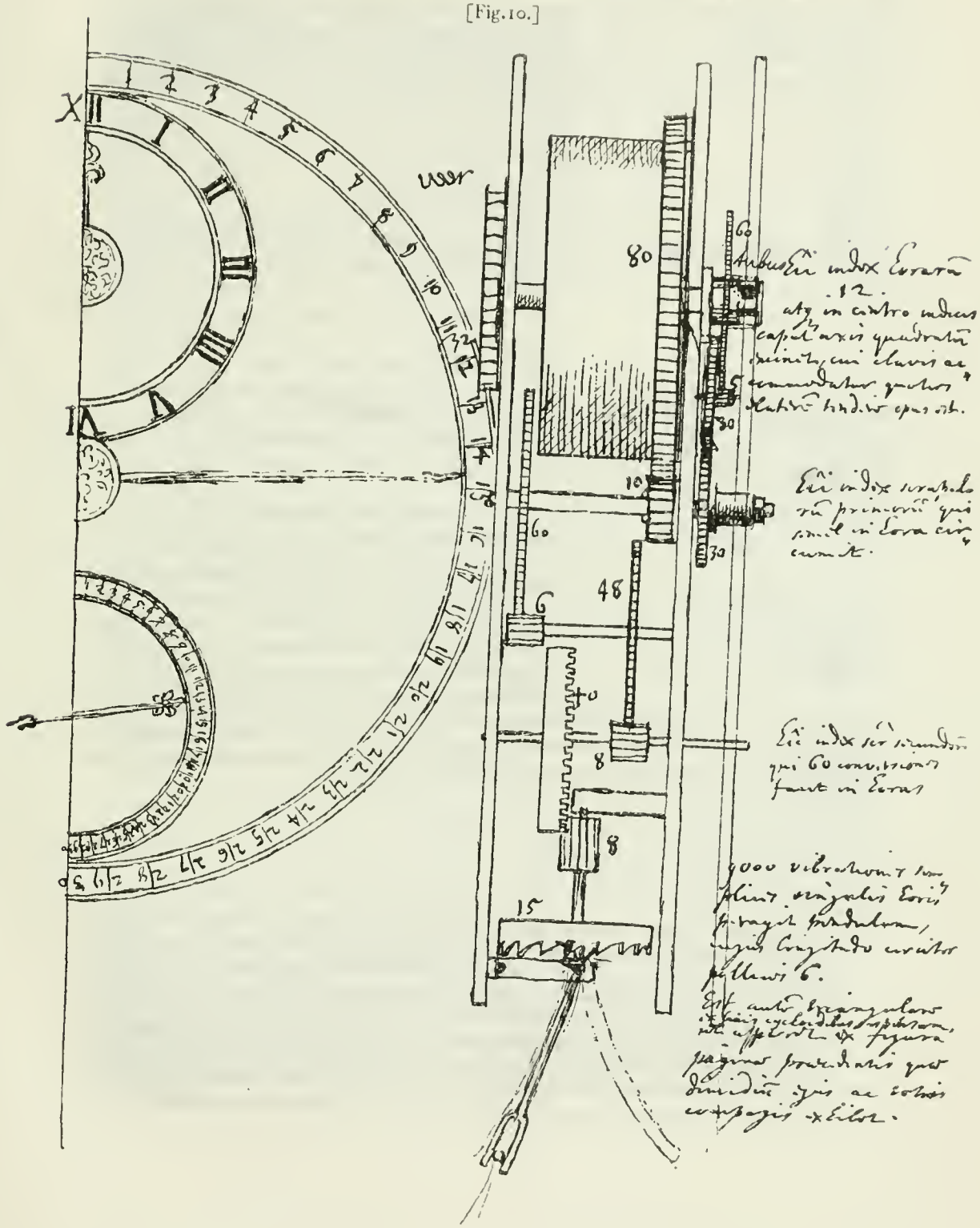
---

[1]) Fig. 21 et 22 des p. 120—121 qui suivent.

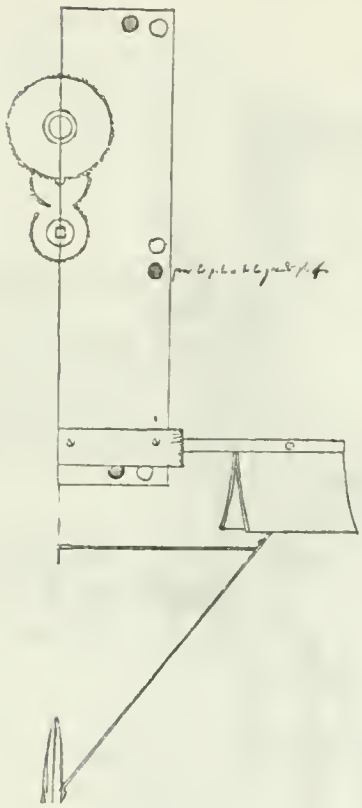
[2]) P. 320—321. La p. 316 porte la date du 16 août 1672.

[3]) On lit dans cette dernière figure auprès d'un des boulons les mots: „pour le pilier de la grande plaque".

[Fig. 10.]



[Fig. 11.]



On trouve, écrits au crayon, les mots tubus à droite près de „index horarum 12" et veer [reſſort] à gauche à la hauteur du tambour à droite qui contient le reſſort moteur. L'horloge n'a apparemment qu'un reſſort unique, comme nous l'avons déjà dit à la p. 182 (l. 12—13) du T. XVII. Il eſt vrai que dans l'„Horologium oſcillatorium", comme ailleurs, Huygens ne dévoile pas tous ſes ſecrets; comparez les notes 2 et 6 des p. 246—247 du T. XVII; pour faire voir qu'il n'y a qu'un reſſort il ne ſuffit donc pas de citer la phraſe (p. 123 qui ſuit): „Motus rotarum omnium non à pondere ſed à chalybea lamina, tympano incluſa, principium habet". Mais dans la figure rien n'indique que le grand reſſort ſervirait à remonter un deuxième reſſort plus petit. La roue (?) à „32" dents (?), placée en dehors de l'eſpace compris entre les deux platines, et auprès de laquelle ſe trouve le mot „veer" écrit au crayon, eſt ſans doute aſſez myſtérieuſe, mais nous ne penſons pas qu'il puiſſe s'agir d'un deuxième reſſort placé en cet endroit [1]). Remarquons encore qu'il n'y a pas de fuſée dans l'horloge de 1672 [2]).

Les arcs cycloïdaux, fruit principal des recherches théoriques de Huygens [3]), reſtèrent en uſage. La p. 12 du T. VII de 1670 ſuffirait pour faire voir combien il était convaincu de leur utilité pratique [4]). Dans l'horloge à pendule triangulaire ces arcs ſont fort larges à cauſe de l'obliquité des fils qui doivent s'y appliquer. Il faut bien remarquer, ce que Huygens ne fait pas dans l'„Horologium oſcillatorium", qu'en vérité la démonſtration de l'„iſochroniſme de la cycloïde" n'eſt pas applicable au cas de fils obliques, de ſorte que, ſi les arcs peuvent avoir eu quelque valeur ce qui eſt douteux [5]), ce n'eſt pas parce qu'ils poſſédaient une forme théoriquement correcte. Quant au fil, c'était probablement déjà en 1672 un fil de ſoie: beaucoup plus tard [6]) Huygens parle expreſſément d'un fil de ſoie rouge.

---

[1]) Dans la première montre à ressorts à remontage fréquent de 1665 de Huygens le deuxième ressort se trouvait „sur l'axe mesme de la roue de rencontre"; et dans la deuxième sur „l'axe de la roue suivante" (T. V, p. 525). Dans la montre de Thuret de la même année (T. V, p. 511) le deuxiéme ressort était également „engagé dans le tour intérieur de la roue qui meut celle de rencontre". On peut aussi le placer ailleurs. R. T. Gould („The Marine Chronometer" p. 140) dit: „The remontoire [c.à.d. le deuxiéme ressort (ou le deuxième poids) du remontoir] may be, and has been, installed at any point in the train. It will be recalled that Huygens fitted his in the crown-wheel [c.à.d. dans la roue de rencontre, comparez la fin du deuxième alinéa de la p. 15 du T. XVII; ceci est exact pour la première montre dont nous venons de parler; il est

Les remontoirs à poids moteurs de 1664—1665 ne furent-ils donc jamais essayés sur mer? Nous n'oserions l'affirmer. En 1668 l'amiral hollandais van Gent paraît s'être servi d'une ou de plusieurs horloges marines[7]). Ce qui est certain c'est que D. Suerius en eut une ou plusieurs en 1672[8]); celles-ci peuvent avoir été des remontoirs de S. Oosterwijck qui les vendait (à moins qu'il n'ait vendu d'autres horloges marines) avec l'Instruction de Huygens de 1665[9]).

II. Horloges astronomiques.

En 1666 Huygens apporta à Paris, outre ses deux remontoirs (note 13 de la p. 9), ses horloges astronomiques sur lesquelles on peut consulter la note 10 de la p. 31 du T. XVII: ce fut „une pen-

vrai que l'auteur ne parle pas de cette montre, mais d'un remontoir à poids], Sully in the centre wheel, etc. . . . a patent taken out by Weber in 1854 covers the use of a remontoire [ressort] in the great wheel itself (in lieu of a fusee)". Voir pour l'expression „great wheel" (et aussi pour l'expression „centre wheel") les notes 1 et 2 de la p. 75 du T. XVII, où il s'agit d'une horloge à poids moteur unique. Dans la Fig. 10 ici considérée la „grande roue" est celle qui fait corps avec le tambour (comparez la p. 72 du T. XVII), mais, comme nous le disons aussi dans le texte, nous ne pensons pas qu'il puisse être question ici d'un deuxième ressort coäxial avec la grande roue.

2) Dans les horloges à pendule astronomiques et de chambre la fusée fut déjà supprimée en 1657 (p. 72 du T. XVII). Huygens la réintroduisit plus tard dans son horloge marine (voir la note 12 de la p. 31 du T. XVII). Remarquons dès maintenant qu'en ce temps (1686) il y est question de deux ressorts; il y avait „dubbele ontsluijtingh" (T. IX, p. 74): cette horloge était un remontoir où le remontage avait lieu deux fois par minute. Les termes de l'Instruction ne font malheureusement pas connaître la position du petit ressort.

3) Voir p.e. les p. 345 et 392—413 du T. XVI et 95—96 du T. XVII.

4) Nous saisissons cette occasion pour remarquer que dans les horloges de chambre néerlandaises du dix-huitième siècle on trouve encore parfois des arcs cycloïdaux.

5) Voir dans le livre „The Evolution of Clockwork etc." de J. Drummond Robertson (comparez sur ce livre la p. 546 du T. XVII) la critique des arcs cycloïdaux des horloges marines par R. Hooke (p. 167—173). Nous pouvons toutefois remarquer à ce propos qu'un des célèbres time-keepers de Harrison (1693—1776) du dix-huitième siècle (T. XVII, p. 180), également destiné à la mer, a encore des arcs de ce genre. Il y a également des arcs cycloïdaux dans les horloges marines construites en France par H. Sully (1680—1728); voir les p. 28 et suiv. de „The Marine Chronometer" par R. T. Gould.

6) Manuscrit F, p. 216, datant de 1685 ou 1686. On trouvera ce passage plus loin dans le présent Tome; voir à ce sujet les Additions et Corrections.

7) T. VI, p. 171, 187. Voir encore sur lui la note 3 de la p. 176 du T. VII.

8) T. VII, p. 192, 195, 210. D'après ce dernier endroit le succès fut médiocre. Il est peut-être aussi question d'une horloge marine d'Oosterwijck aux p. 84—85 du T. VII.

9) T. V, p. 491. Voir aussi la p. 129 du T. VI. En avril 1667 (T. VI, p. 125) Boulliau pria Huygens de faire venir de la Haye une horloge à pendule de son invention sonnant l'heure et fabriquée par son „ouurier".

dule de M. Hugens" (T. VI, p. 59) dont on se servit dans l'observation d'une éclipse du soleil du 2 juillet 1666 [1]).

L'horloge, de 1672 [2]) ou de plus tôt, par la représentation de laquelle l'„Horologium oscillatorium" débute [Fig. 17 de la p. 71 qui suit], est évidemment aussi une horloge astronomique, puisque c'est après en avoir donné la description que Huygens s'apprête (p. 115) à parler de „illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum investigandarum gratiâ, formam". Le privilège de Huygens (note 1 de la p. 8) ne s'appliquait qu'aux horloges marines. Nous pouvons toutefois être assurés que les horloges astronomiques se fabriquaient aussi, sans doute depuis 1666, surtout chez Thuret: c'est son nom qui figure sur la vieille horloge de l'Observatoire de Leiden — voir la p. 19 — presque conforme à celle décrite dans l'„Hor. osc." et couramment appelée „horloge de Huygens".

Dans sa Dédicace au Roi (p. 77) Huygens dit qu'il y avait des horloges de sa façon, „nec pauca", dans l'Observatoire de Paris bâti en 1667—1672 [3]). Les horloges astronomiques sont mentionnées aussi par Jean Picard dans son „Voyage d'Uranibourg": Picard partit de Paris en juillet 1671, emportant „deux horloges à pendule, l'une à secondes, & l'autre à demy-secondes, toutes deux à contrepoids" [4]). À la p. 83 il donne à l'une d'elles le magnifique témoignage que voici: *La grande horloge à secondes qui estoit restée dans la Tour* [astronomique de Copenhague], *alloit si réguliérement, que durant plus de deux mois elle demeura dans un mesme estat à l'égard du moyen mouvement sans varier d'une seconde*". Les arcs cycloïdaux contribuèrent sans doute à la régularité de la marche.

Il est d'ailleurs difficile d'admettre que Picard n'exagère pas quelque peu. Il faut, s'il dit vrai, que durant ces deux mois la température dans la Tour soit restée sensiblement constante — à moins qu'on n'ait déplacé de temps en temps le poids curseur, ce dont Picard ne dit rien — car, comme nous l'avons déjà remarqué [5]) les horloges de Huygens n'étaient pourvues d'aucun dispositif pour compenser automatiquement la dilatation des métaux, qu'il ne connaissait d'ailleurs pas avant 1667 et à laquelle il ne croyait pas encore, ou tout au plus à demi, en 1690 [6]), malgré l'expérience probablement faite sur ce sujet à l'Académie des Sciences sur laquelle on peut consulter l'Appendice IV qui suit. Picard peut avoir pris des précautions pour assurer cette constance de la température dans le cas considéré, puisqu'il connaissait l'influence du temps sur la marche des horloges (même Appendice).

Jean Richer à la p. 6 de ses „Observations astronomiques et physiques faites en l'isle de Caïenne" [7]) dit de même que déjà en 1671 avant d'entreprendre son voyage il était en possession de „deux

---

[1]) Du moins nous jugeons peu probable qu'on se soit servi en cette occasion d'un remontoir ou „horloge à remontage continuel d'un petit contrepoids" (horloge marine), comme le dit la p. 642 du T. VI.

[2]) Voir à la p. 84 qui suit le Privilege du Roy du 4 novembre 1672 pour l'impression de l'„Horologium oscillatorium".

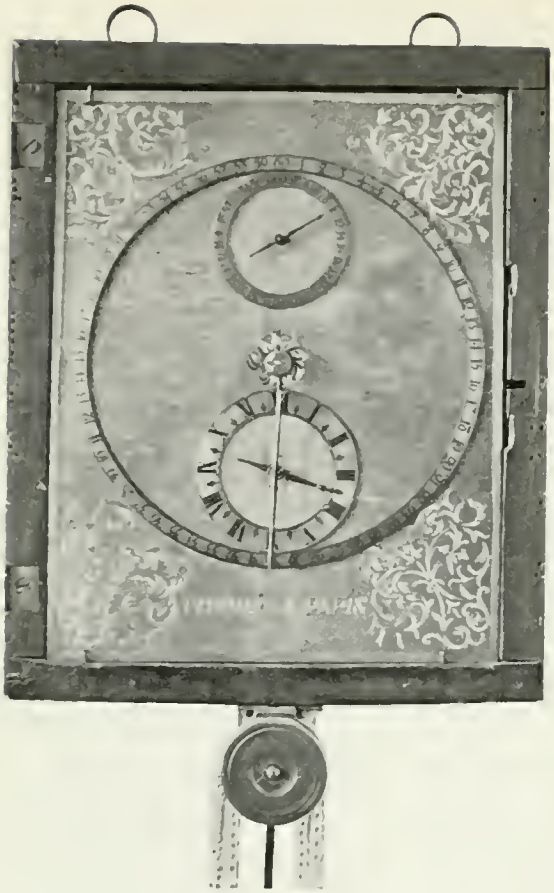
[3]) Les horloges à pendule, mentionnées dans la même Dédicace, qui se trouvaient dans le palais de Louis XIV ont probablement aussi été fabriquées par Thuret qui était „Horloger ordinaire du Roy" (voir la suite du texte). Voir sur ces horloges le dernier alinéa de la p. 103 du T. XVII.

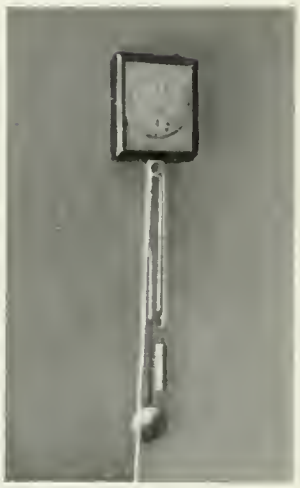
[4]) P. 64 et 68 du „Voyage d'Uranibourg" dans la Première Partie du T. VII des „Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699" (Paris, Cie des Libraires, MDCCXXIX).

[5]) T. XVII, p. 11, note 5 et p. 237, note 3.

[6]) T. XVII, p. 66, note 2.

[Fig. 12.]





Horloges à pendule, dont l'une marquoit les fecondes, & l'autre les demi-fecondes", lefquelles „avoient efté faites par le fieur Thuret Horloger ordinaire du Roy, qui par fon exactitude et la délicateffe de fes ouvrages, a furpaffé jufques à prefent tous ceux qui fe meflent de la fabrique des Montres & des Horloges à pendule".

En 1667 (T. VI, p. 155) Huygens dit généralement que les „pendulifices" parifiens travaillent „pour le moins auffi bien que chez nous".

Nous repréfentons ici [Fig. 12] l'horloge aftronomique, que nous venons de mentionner, de l'Obfervatoire de Leiden, quoiqu'il foit impoffible de dire fi elle a été conftruite avant ou après 1673, ce qui a d'ailleurs peu d'importance vu l'accord presque complet avec celle de l'„Horologium ofcillatorium" datant d'avant 1673. D'après F. Kaifer („Gefchichte der Sternwarte in Leiden", 1868) cette horloge eft mentionnée dans un catalogue de B. de Volder datant d'environ 1705. Toutefois cette lifte d'inftruments appartenant à l'Obfervatoire en 1706 (voir les Réfolutions manufcrites des Curateurs de l'Univerfité de Leiden, ou bien P. C. Molhuyfen „Bronnen tot de Gefchiedenis der Leidfche Univerfiteit", IV, p. 108 *) ne parle que de „Twee horologien wijfende feconden", de forte qu'il n'eft pas démontré que l'horloge en queftion fe trouvait à l'Obfervatoire déjà en ce temps. Les nombres des dents des roues et des pignons font exactement les mêmes que ceux de la Fig. 17 de l'„Hor. ofc.", excepté dans le cas des roues correfpondant à H et I, lefquelles ont, dans l'horloge de Leiden, refpectivement 40 et 20 dents au lieu de 48 et 24. Le poids du pendule de l'horloge de Leiden a la forme d'une lentille; le pendule pèfe 648 gr. (poids) + 45 gr. (verge)[8]; quant à la verge, nous croyons pouvoir admettre qu'elle date de plus tard; c'eft une bande flexible ne portant pas de poids curfeur mais pouvant être allongée ou raccourcie au moyen d'une vis, comme on le voit plus ou moins dans la Fig. 12. L'horloge va toujours bien; lorfqu'elle eft réglée auffi bien que poffible l'erreur ne dépaffe guère 1″ par jour. Sufpendue à hauteur d'homme, elle marche plus de 24 heures[9]), vu qu'en ce temps le poids moteur defcend de 155 cm. L'amplitude des ofcillations eft d'environ 12°.

---

[7]) „Mémoires de l'Académie des Sciences, etc." T. VII (voir la note 4).

[8]) D'après la p. 98 qui suit, le poids de l'horloge de la Fig. 17 pesait trois livres. La livre de ce temps ne différait pas beaucoup de la nôtre; comparez la note 4 de la p. 151 du T. XVII.

[9]) D'après les p. 98—100 qui suivent „dans les meilleures horloges que nous avons jusqu' aujourd'hui, le poids moteur est réduit à six livres" et „suspendue à hauteur d'homme [l'horloge] marche 30 heures".

APPENDICE I

À L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

[1665.][1]

Le Sieur Chreſtien Huygens de Zuijlichem, Gentilhomme Hollandois, ayant inventé une nouvelle et très exacte manière d'Horloges à Pendule ajûſtées en ſorte qu'elles peuvent eſtre portées ſur mer, ſans que leur mouvement s'altere par les plus rudes ſecouſſes de la tempeſte, et en ſuitte ſervir à trouver toutes Longitudes, comme deſjà la preuve tres-certaine en a eſté faicte en des voyages de Long cours, ſupplie très humblement le Roy, qu'en conſideration des peines et fraix qu'il a fallu ſupporter en travaillant à perfectionner cette Invention tant importante, laquelle d'ailleurs venant à eſtre mal imitée pourroit cauſer de grands préjudices et inconveniens à La Navigation, Il plaiſe à S. M. les gratifier d'un Privilège, en vertu duquel il ſoit ordonné, que dans les Royaumes[2] de S. M. perſonne ne puiſſe faire ni contrefaire ſoit entierement ou[3] en partie, La dite Invention, ni genéralement faire des Pendules de la façon qu'il faut pour eſtre d'uſage ſur[4] la Mer, ſans la permiſſion du dit Expoſant, ſur peine de confiſcation deſdits ouvrages et amendes de . . . Livres Tournois, applicables au prouffit de l'inventeur ſuſdit, et ce pour l'eſpace de vingt ans.

---

[1]) Le texte de cette Requête (comparez la p. 7 qui précède) a été emprunté au Vol. 127, „Mélanges Colbert", de la Bibliothèque Nationale à Paris. Cette Pièce figure ici comme Appendice, puisque nous ne l'avons reçue qu'après le commencement de l'impression du préſent Tome. Elle nous semble être de la main de Constantijn Huygens père.

Ce même texte, avec quelques variantes dans l'orthographie, a été imprimé déjà en 1867 par A. Jal à la p. 695 de son „Dictionnaire critique de Biographie et d'Histoire" (Paris, H. Plon), avec la note: „Bibl. Imp. Lettres reçues par Colbert, 5 fév. 1665". La date du 5 février 1665, sans doute exacte, ne se trouve pas sur le document de la Bibliothèque Nationale.

[2]) A. Jal écrit: „le royaume".

[3]) A. Jal écrit: „soit".

[4]) A. Jal écrit: „à".

APPENDICE II

À L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

[AOÛT OU SEPT. 1668] [1]).

CHOSES A CORRIGER AUX PENDULES DE MER [2]).

Mettre des cordes de ſoye au lieu de chaiſnes qui ſe caſſent, et s'accrochent en ſorte qu'elles arreſtent le mouvement de l'horologe.

Je crois qu'avec les cordes le poids deſcendra un peu plus dans 24 heures qu'avec les chaines, a quoy il faudra avoir egard en faiſant les boetes plus longues.

Faire les boetes plus larges afin que le pendule ne puiſſe y heurter.

Mettre plus de poids aux horologes afin que les vibrations du pendule ſoient plus grandes, car eſtant petites, il arrive quelque fois que les palettes donnent contre le coin des dents de la roue de rencontre.

Il faudra que les cycloides ſoient un peu plus eſtendues, afin que le filet plie tousjours contre leur courbure.

Faire les boetes plus fortes et ſur tout la ſeparation entre les poids. Et empeſcher qu'ils ne balottent.

Pour la ſuſpenſion, que l'ouverture du cylindre de cuivre [3]) ſoit plus grande, afin que dans les grandes inclinaiſons du vaiſſeau l'horologe puiſſe demeurer perpendiculaire.

Je crois que ſi le col de la boule [3]) eſtoit plus long, le pendule ſouffriroit moins des tranſports ſubits du vaiſſeau.

---

[1]) L'Appendice II est emprunté à la p. 19 du Manuscrit D. La p. 17 date du mois d'août et la p. 37 de sept. 1668.

[2]) Cette Pièce fut écrite pendant l'expédition du duc de Beaufort (comparez la p. 12 qui précède) qui était parti vers la fin de mars 1668 (T. VI, p. 200) et dont Huygens avait reçu des nouvelles avant le 11 mai 1668 (T. VI, p. 218). Il y avait eu une grande tempête. Les corrections proposées par Huygens sont peut-être une conséquence de certaines remarques (voir le dernier alinéa de la p. 120 qui suit) faites par le duc ou plutôt par de la Voye qui l'accompagnait (voir les p. 226 et 379 du T. VI). Le rapport de 1669 de de la Voye n'existe plus à ce qu'il parait; nous ne possédons que quelques remarques de Huygens sur ce rapport (voir la note 5 de la p. 117 qui suit).

[3]) Voir le dernier alinéa de la p. 167 ainsi que le No. 12 de la p. 173 du T. XVII. L'expression

Il faut que la boule [3]) foit bien arrondie, et il faudra l'ufer dans un creux de grais, ou en y appliquant ce creux quand elle eft fur le tour.

Il faut attacher le cylindre de cuivre par 3 vis au fer d'en haut, parce qu'autrement cela balotte comme fur deux pivots. Et ces eferous doivent eftre plus forts.

Il faut trouver moyen que l'eguille des minutes et des fecondes foient fermement attachees, parce qu'autrement elles font fujettes a demeurer derriere en montant, et avancer plus qu'il ne faut en defcendant.

Il faut que le crochet au fommet du pendule foit plus profond afin qu'il ne puiffe facilement fe decrocher [4]).

Demander les pendules qu'a M. du Seuil qu'il les embale et mette les morceaux de plomb [5]) qu'il doit toutes [fic] ofter dans la petite caiffe apart comme de la Voie luy a fait entendre et qu'il decroche les pendules et les enveloppe enfemble dans du papier. Et qu'il face charger les balots fur un cheval.

„la boule" porte à croire que l'horloge n'était pas suspendue à deux boules mais à une seule (comparez le No. 7 de la p. 26 du T. VII).

[4]) Il est possible qu'une horloge ainsi corrigée fut employée dans l'expédition „vers l'Amérique" dont il est question en avril 1669 (T. VI, p. 428). L'horloge avait été corrigée avant le 13 mars 1669 (T. VI, p. 379). En ce temps la traduction française du „Kort Onderwijs" de 1665 était prête ou peu s'en faut (voir la p. 195 du T. XVII). La liste des corrections est suivie par une Pièce qui se rapporte à cette Instruction; voir les p. 371—372 qui suivent. La suite du texte, qui est écrite en marge, parle peut-être d'un transport de l'horloge corrigée.

En mai 1670 le frère Lodewijk (T. VII, p. 26) parle de divers changements qui peuvent fort bien ne pas avoir été récents. Il dit e. a. qu'il n'y a plus de „bride" au-dessous des arcs cycloïdaux; en d'autres termes le deuxième bras de la „lettre F renversée" de Bruce avait été abolie (voir les p. 166—167 du T. XVII, ainsi que la p. 116 qui suit). D'après la lettre de Lodewijk l'horloge ainsi corrigée fut employée par Richer dans son voyage au Canada etc. de 1670; voir la note 6 de la p. 27, ainsi que les p. 54—55 du T. VII, d'après lesquelles le succès fut médiocre.

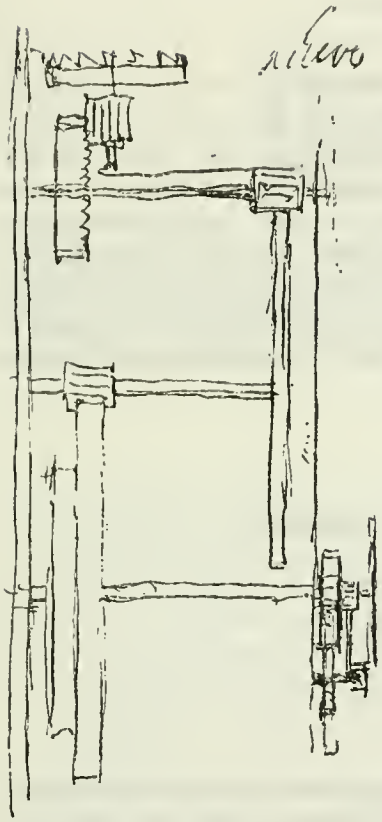
[5]) Leçon alternative: contrepoids.

APPENDICE III

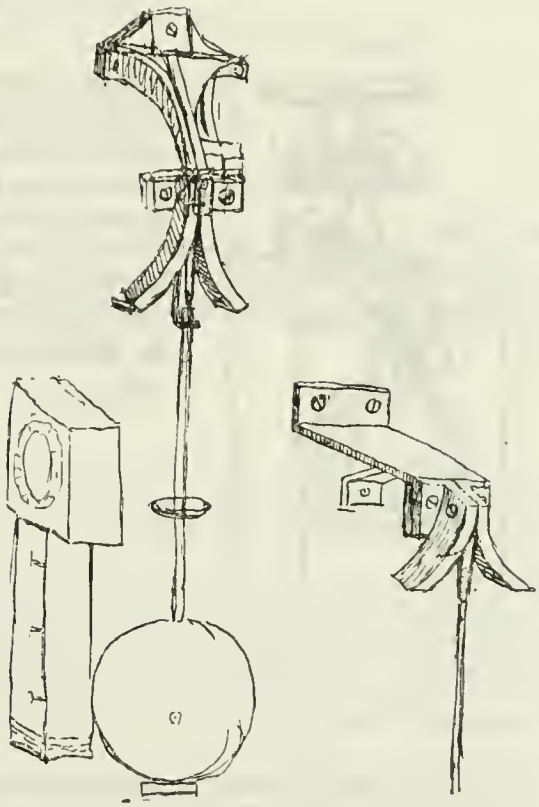
À L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

[1668—1670]

[Fig. 13.][1])



[Fig. 14.][2])



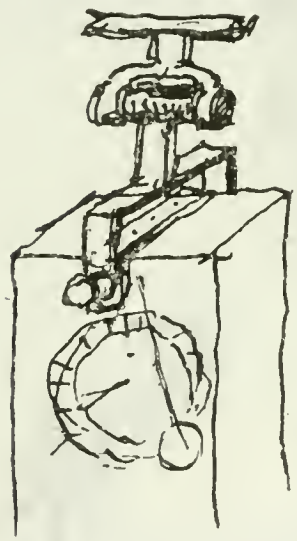
4 pieds de haut [Fig. 14].
14 pouces de large.
lentille de $\frac{1}{2}$ livre.
poids coulant de $\frac{1}{56}$ de livre.
$9\frac{1}{2}$ pouces de pendule.
poli a l'huile pour empeſcher la rouille du cuivre.

faire la grande platine plus forte.
arcbouter la piece qui porte les cycloides.
augmenter le poids du pendule.
faire que la fuſpenſion de la boete viene directement au-deſſus du pendule.

$\frac{1}{360}$ d'une ligne ſur la longueur de ce pendule de $9\frac{1}{2}$ pouces fait 1″ ſeconde de difference en 24 heures.

boete echancree 2 portes.

[Fig. 15.][3])



faire le pendule tres peſant, de 8 ou 10 livres. ou s'il eſtoit de 3 pieds, le faire de 40 ou 100 livres puis qu'il eſt d'autant plus juſte qu'il eſt peſant. Les Cycloides fortes a proportion. Mais il faudroit, afin que la boete ne fut point eſbranlee, faire l'un des aiſſieux qui eſt pour le mouvement a coſtè, à meſme hauteur que le point de ſuſpenſion du pendule, comme dans cette figure [Fig. 15]. Il faudroit que ces pieces de fer fuſſent bien fortes et groſſes pour ne pas faire reſſort.

---

[1]) La Fig. 13, où on lit „achevé" date de 1668: elle est empruntée à la p. 36 du Manuscrit D, dont la page suivante porte la date du 21 sept. 1668. Sur cette p. 37 se trouve la figure que nous avons reproduite dans le T. VI entre les p. 260 et 261, de l'horloge envoyée à Estienne à Chartres.

En février 1668 une horloge avait été envoyée à „l'amy de M. de Combes en Canada" (T. VI, p. 190—192).

[2]) La Fig. 14 et le texte qui l'accompagne sont empruntés à la p. 181 du Manuscrit D (février ou mars 1669). Voir encore „une de nos bonnes horologes" vis-à-vis de la p. 491 de 1669 du T. VI.

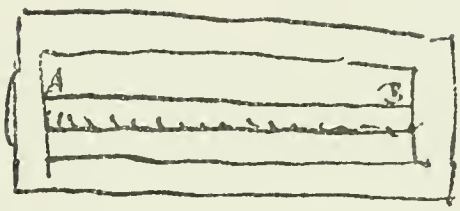
[3]) La Fig. 15 et le texte qui l'accompagne sont empruntés à la p. 254 du Manuscrit D qui porte la date du 15 janvier 1670.

APPENDICE IV [1])

À HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673.

[1675 ?]

[Fig. 16.]



Pour voir la force de l'extenſion des corps par la chaleur. AB [Fig. 16] cylindre de fer verre marbre ou autre corps dur, que l'on chaufera par le milieu eſtant arreſtè par les bouts dans un chaſſi de fer ou de bois que l'on n'echauffera point, pour voir avec quelle force les coſtez du chaſſi feront pouſſez.

---

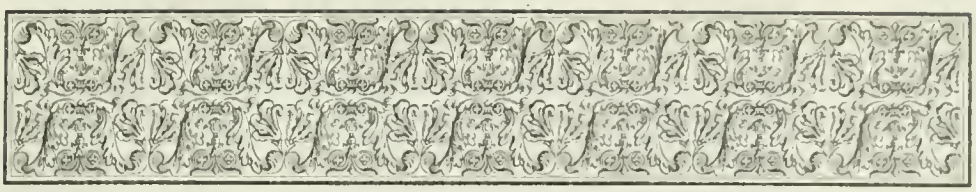
[1]) Cet Appendice est emprunté à une feuille détachée qui se trouve dans le portefeuille „Physica Varia". C'est la feuille à laquelle nous avons déjà emprunté la Fig. 18 de la p. 168 du T. XVI. La date 1675 se trouve à son revers.

Des expériences de ce genre peuvent avoir été faites — l'époque restant toutefois incertaine — à l'Académie des Sciences, puisqu'en 1690 (T. IX, p. 485) Huygens parle à propos de la question de savoir „si sa longueur [c. à. d. la longueur de la verge d'un pendule] s'accroit [par la chaleur] de quelque chose de perceptible", des „experiences que nous fimes a Paris dans l'Academie des Sciences si j'ay bonne memoire". Les derniers mots portent à croire que les expériences, si réellement elles ont été faites, n'ont pas occupé longtemps les membres de l'Académie.

Quoique l'influence de la température sur la longueur d'une verge métallique n'ait pas été étudiée par Huygens, il savait cependant déjà en 1659 que la marche d'une horloge n'est pas absolument indépendante du temps; voir p. e. la note 2 de la p. 66 du T. XVII. Picard, dont nous avons mentionné (p. 18) le voyage d'Uranibourg de 1671, le savait également; voir les p. 9—10 de sa „Mesure de la Terre" de 1671 (Mémoires de l'Academie Royale des Sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699, Tome VII, Première Partie, Paris, Cie des Libraires, 1729). Il était accoutumé à observer exactement la marche des horloges (voir la p. 440 du T. VI).

Le fait que Huygens en 1669 ne croyait pas à la dilatation de la verge du pendule est nettement prouvé par sa remarque (T. VI, p. 379) que ses horloges ne sont pas „sujettes aux changements du temps" puisqu'il a „remediè a cela par les Cycloïdes".

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM DE 1673.



Avertiſſement.

Nymphes de Schéveningue habitant l'onde pure,
Vous qui de ces pays protégez la ſtructure [1]),
Délices de tous ceux qui fréquentent vos plages,
Bien aimées de Phébus, eſprits gracieux et ſages,
Veuillez me ſecourir et inſpirer mes chants.
Qu'en revanche ni Pan ni ſes Faunes hideux
Ne ſe puiſſent jamais approcher de ces lieux
Et ſouiller la blancheur de vos flots écumants [2]).

Toi que la Gloire élève au-deſſus du ciel même,
Daigne prêter l'oreille, Huygens, à ce poème
Ecrit en ton honneur, en l'honneur de ton père,
De tes frères auſſi et de ta race entière

[1]) En latin (leçon du manuscrit): „Finitimûm tutela". Puisque la mer apporte le sable qui forme les dunes, on peut dire qu'elle protège elle-même la côte et ses habitants. On voit les dunes dans le dessin de Schéveningue par Chr. Huygens par lequel débute le T. XVII.

[2]) Voir la note 6 de la p. 31. Les mots „bien aimées de Phébus" (en latin: „Dilectæ Phoebo") évoquent l'image de la plage ensoleillée.

Dont tu es le fleuron. Tes ſublimes penſées [1])
Dans un cadre mythique ici ſeront placées.
Puiſſe ainſi des anciens la riche fantaiſie
Orner de ſes ſplendeurs la noble aſtronomie.

Qu'on nous pardonne de commencer cet Avertiſſement par une traduction, néceſſairement peu littérale, du début de la „Hadriani Vallii Daphnis Ecloga ad Chriſtianum Hugenium Zulichemium, Conſtantini F." que Huygens a fait imprimer conformément à l'intention de Vallius [2]) dans ſon ouvrage de 1673 [3]). Nos ancêtres du dix-ſeptième ſiècle goûtaient plus que nous les imitations des bucoliques claſſiques [4]). Suivant beaucoup de commentateurs la cinquième églogue de Virgile célèbre Jules Céſar ſous le maſque du héros Daphnis; pareillement chez Vallius ou van der Wall la figure de Daphnis prend de plus en plus les traits de Huygens. Toutefois ce n'eſt pas ſeulement chez Virgile ou d'autres auteurs latins que van der Wall a cherché ſon inſpiration: il mentionne auſſi le poète Aratos, imbu de la ſageſſe d'Eudoxe et de Théophraſte, dont les Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα, fort connus au dix-ſeptième ſiècle, ſont voués en majeure partie à la deſcription des conſtellations [5]).

---

[1]) En latin: „præclara reperta". L'expression „sublime" ne nous paraît pas trop forte. Dans le „Siècle de Louis XIV", Chap XXXI, Voltaire parle de la „géométrie sublime" de Huygens: „On doit à Huygens, sinon la première invention des horloges à pendule [comparez la note 4 de la p. 13 du T. XVII et la p. 60 qui suit], du moins les vrais principes de la régularité de leurs mouvements, principes qu'il déduisit d'une géométrie sublime". Viviani dans une lettre de juillet 1673 (T. VII, p. 286) parle à propos de l'horloge de Huygens de la „sublimità della sua inventiva".

[2]) Voir sa lettre de mars 1665, T. V, p. 291. Consultez sur Vallius (van der Wal, Wall, Walle) la note 8 de la p. 234 du T. II. Huygens lui envoya en 1654 son „De Circuli Magnitudine inventa" (T. I, p. 287, note 4).

[3]) Nous avons déjà publié ce poème datant de 1665 dans le T. V (p. 292—299), où l'on trouve aussi les corrections apportées en 1673 par v.d. Wall suivant le désir de Huygens (dont la lettre fait défaut; voir la réponse de v. d. Wall de mars 1673 à la p. 257 du T. VII). Des trois vers insérés en 1673 en l'honneur de la France et de Louis XIV (voir la p. 34 qui suit) on n'en trouve qu'un et demi dans le manuscrit de v.d. Wall: il paraît par conséquent probable que ces vers soient de Huygens.

Dans la traduction nous avons omis les vers 4—5 (il y faut lire „Pervigilem" au lieu de „Per vigilem"), où il est annoncé que le poème consistera pour la plus grande partie en un discours prononcé par le marin Ancon. Tandis que les noms Thestylis et Corydon sont empruntés à Virgile, Ancon est peut-être une paraphrase de Vallius, puisque le mot ἄγκος signifie vallée.

[4]) Voir p. e. la note 1 de la p. 34 qui suit.

Ce qui nous frappe dans le poème conſidéré — et c'eſt là la raiſon pour laquelle nous accordons aux premiers vers ici traduits une place d'honneur — c'eſt que l'auteur en chantant la louange de Huygens le range du côté de Phébus Apollon [6]) par oppoſition à Pan: c'est dire qu'il le glorifie comme un héros intellectuel recherchant en premier lieu la ſcience pure, la ſcience dans le ſens le plus élevé du mot.

Il convient en effet, puiſque l'„Horologium oſcillatorium" eſt un des chefs-d'œuvre de Huygens, de faire reſſortir, comme nous l'avons auſſi fait brièvement en d'autres occaſions [7]), que le but le plus élevé qu'il ſe propoſe c'eſt d'abord l'étude rationnelle de la géométrie — appelée fort juſtement à la p. 77 qui ſuit „pars multò præcipua" de l'ouvrage de 1673 —, enſuite celui d'approfondir „experientia ac ratione" [8]) la ſtructure de l'univers. On peut dire qu'au fond ces deux études n'en font qu'une: pour Huygens et ſes contemporains la conformité de la géométrie euclidienne avec l'eſpace réel et les objets qu'il contient eſt au-deſſus de tout ſoupçon [9]). Huygens ſe ſent κοσμοθέωρος, pour employer le mot forgé par lui vers la fin de ſa vie. C'eſt pour mieux connaître la ſtructure de l'univers qu'il taille des lentilles, qu'il calcule la marche des rayons dans les lunettes, qu'il s'applique à perfectionner les horloges. Les queſtions pratiques ont leur importance et l'obſervation eſt indiſpenſable. Il n'en eſt pas moins vrai qu'il nous faut auſſi, qu'il nous faut même avant tout [10]), auſſi bien pour les découvertes que pour les inventions, les yeux de l'eſprit; nous avons cité cette expreſſion ſhakeſpearienne dans la note 14 de la p. 343 du T. XVII; nous la rencontrons en 1686 ou 1687 chez Huygens lui-même: à la p. 259 du Manuſcrit F il dit en parlant de la forme ſphéroïdale aplatie que la terre doit avoir en vertu de ſa rotation: „Ad hæc mentis oculos ægrè et quasi caligantes plerique attollunt haud aliter atque ad lucis radios ii qui è diuturnis tenebris emerſere". Ceci ne rappelle pas ſeulement Shakeſpeare, mais ſurtout la fameuſe caverne de Platon [11]).

---

[5]) Le nom d'Aratos ne se trouve pas dans le poème, mais l'auteur parle (v. 12) des „Commenta Solensia". Or, Soli était le lieu de naissance d'Aratos.

[6]) Rappelons qu'Apollon est le dieu du soleil et que le mot φοῖβος signifie pur.

[7]) P. e. à la p. 353 du T. XVII.

[8]) L. 28 de la p. 197 du T. III.

[9]) Comparez le premier alinéa de la p. 39 qui suit.

[10]) Comparez la note 17 de la p. 345 du T. XVII.

[11]) Il est peu probable qu'il s'agisse ici d'une ressemblance fortuite: Huygens, il est vrai, ne cite nulle part ni Platon ni Shakespeare, mais l'expression τὸ τῆς ψυχῆς ὄμμα se trouve (Ch. 13) dans le Livre VII de la Πολιτεία de Platon, lequel débute par l'image de la caverne.

Dans ſa Dédicace à Louis XIV — dont il eſt déjà queſtion en février 1665 [1]) — Huygens fait reſſortir ſon amour pour la ſcience pure. En inſiſtant en même temps ſur l'utilité générale d'horloges exactes [2]) il exprime ſans doute une penſée propre à faire apprécier ſon ouvrage par les fondateurs de l'Académie des Sciences, mais pour cela il n'a nul beſoin de forcer ſon naturel: il voyait fort bien la néceſſité pratique d'aider les marins à trouver les longitudes [3]). Rappelons auſſi que le travail manuel, la conſtruction d'inſtruments, lui plaiſait depuis ſon enfance [4]). Il n'eſt pas poſſible à l'homme de vivre uniquement ſur les cimes de l'Olympe.

En s'intéreſſant à la fois aux mathématiques pures, à l'aſtronomie, à la phyſique et à la technique et en ne conſidérant pas ces ſciences (ou arts) comme ſéparées les unes des autres par des cloiſons étanches, Huygens devenait un des fondateurs de l'aſtronomie théorique et de la phyſique mathématique et pratique en même temps qu'un promoteur du contact ſouvent étroit qui exiſte de nos jours entre la ſcience et la technique. Déjà au ſeizième et dix-ſeptième ſiècle nous trouvons dans la perſonne de Joſt Burgi un horloger doublé d'un mathématicien. Huygens eſt, lui, un mathématicien doublé d'un horloger. Ses inventions du pendule régulateur librement ſuſpendu [5]), des arcs cycloïdaux [6]), du poids curſeur [7]), dont la première était une heureuſe trouvaille tandis que les deux autres avaient un caractère nettement mathématique — quoique l'idée d'un réglage par le déplacement de certains poids fût ancienne [8]) —, le rapprochèrent des artiſans et le forcèrent de s'aſſocier avec eux tout en gardant à bon droit le ſentiment de ſa prééminence. Il n'eſt certes pas étonnant que les maîtres reconnus de l'art, capables de conſtruire des horloges tandis que Huygens ne conſtruiſait que des modèles [9]), et dont pluſieurs étaient doués eux auſſi d'un eſprit inventif [10]), n'étaient pas toujours diſpoſés à reconnaître cette ſupériorité. Ce que nous

---

[1]) T. V, p. 246.
[2]) Comparez sa lettre de février 1665 à Chapelain (note précédente).
[3]) T. XVII, p. 8—9.
[4]) T. XVII, p. 248.
[5]) T. XVII, p. 9 et note 4 de la p. 13.
[6]) T. XIV, p. 206, T. XVI, p. 345, T. XVII, p. 95—96.
[7]) T. XVI, p. 414—433, T. XVII, p. 83 (premier alinéa), p. 105—111.
[8]) T. XVII, p. 28, note 2.
[9]) Voir la note 2 de la p. 52 du T. XVII, et ce que Huygens écrit en 1683 dans le Manuscrit F à propos du „pendulum cylindricum trichordon" et de l'horloger van Ceulen; consultez sur cet endroit les Additions et Corrections.

avons dit aux p. 8—9 des relations entre Huygens et Thuret fait bien voir combien il était probable que ces deux hommes de mérite ne parviendraient pas toujours à se mettre absolument d'accord [11]).

Huygens s'est appliqué à donner à l'ouvrage de 1673 un caractère monumental. Nous avons déjà parlé [12]) du soin extrême qu'il mit à donner de plusieurs théorèmes des démonstrations fort exactes à la mode d'Archimède. Voir encore sur ce sujet le premier alinéa de la p. 50 qui suit. Ce n'est d'ailleurs pas seulement la forme de ses démonstrations qui est empruntée aux mathématiciens grecs. Nous avons dit à la p. 369 du T. XVI, en parlant de la formule fondamentale des corps oscillants

$$l = \frac{\Sigma r^2}{nb} \text{ ou, si l'on veut, } l = \frac{I}{Mb} \text{ [13])}$$

que dans la Pars Quarta de l'„Hor. osc." Huygens lui donne avec raison une place éminente. Rappelons qu'il trouva la première de ces formules [14]) peu avant le 10 octobre 1664 [15]) et que ce fut également en octobre [16]) qu'il établit ensuite le théorème énoncé à la p. 461 du T. XVI (Prop. XIII de la Pars Quarta de l'„Hor. osc.") dont nous avons dit à la p. 373 du T. XVI qu'on en trouve de plus dans l'„Hor. osc." une généralisation (Prop. XVI de la Pars Quarta) qu'il connaissait en 1669 [17]). Ce

[10]) Comparez les p. 159 et 182 du T. XVII.

[11]) Le lecteur aura compris que nous faisons allusion au différend de 1675 à propos du *ressort spiral régulateur du balancier* des montres (comparez sur le *ressort régulateur du balancier* la note 7 de la p. 159 du T. XVII, déjà citée à la p. 3 qui précède), dont il est question plus loin dans ce Tome.

Nous avons parlé dans le T. XVII (p. 80—83) de la dispute de Huygens avec le maître hollandais S. Douw. Voir aussi le passage dont il est question dans la note 9.

[12]) T. XVI, p. 349.

[13]) Où l désigne la longueur du pendule isochrone, I le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe d'oscillation, M la masse du corps et b la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension. Comparez la p. 364 du T. XVI. Voir la note 3 de cette page sur la formule $l = \frac{\Sigma r^2}{nb}$

[14]) Sans toutefois se servir du signe Σ; voir la note 3 de la p. 372 du T. XVI.

[15]) T. XVI, p. 462 et 470—472.

[16]) Voir les l. 4—5 de la note 3 de la p. 461 du T. XVI.

[17]) Et probablement beaucoup plus tôt, peut-être déjà en octobre 1664, vu que la possibilité de la généralisation est assez évidente.

que nous n'avons pas dit dans les notes 3 de la p. 461 et 3 de la p. 462 du T. XVI c'eſt que ce qui permettait à Huygens de tirer immédiatement de la formule fondamentale la propoſition de la p. 461 c'était ſa connaiſſance d'un théorème de Pappus dont il s'était occupé en 1650; voir à ce ſujet la p. 229 du T. XI. Dans l'„Hor. oſc." ce théorème forme la Prop. XII de la Pars Quarta, mais Pappus n'y eſt pas mentionné. Il eſt intéreſſant de noter l'influence directe des recherches des géomètres grecs ſur l'établiſſement des Prop. XIII et XVI.

L'„Horologium oſcillatorium" débute (p. 74—81) par la Dédicace au Roi dont nous venons de parler, où Huygens en le remerciant de ſa libéralité (comparez la note 5 de la p. 4 qui précède) lui adreſſe les compliments d'uſage [1]). En faiſant une alluſion à ſa nationalité en même temps qu'à la guerre de Hollande et en parlant en général de la gloire militaire du règne de Louis XIV, il trouve ſans ſe départir de l'extrême politeſſe rendue néceſſaire par les circonſtances, l'occaſion de dire qu'à ſon avis la gloire la plus haute du règne réſide ailleurs [2]). C'eſt la gloire de Louis XIV protecteur des arts et des ſciences qu'expriment auſſi, avec l'emphaſe obligatoire, les trois vers inſérés par Huygens (comparez la note 3 de la p. 30) dans le poème de Vallius [3]):

Inferior nullis ut item neque Gallia deſit;
Gallia magnanimi Regis ſpendore ſuperba,
Borbonios ignes cui parturit arduus æther [4]).

Vallius vient de dire que l'aſtronomie a été cultivée par les Chaldéens, les Babyloniens, les Grecs, les Egyptiens, les Italiens, les Arabes, les Eſpagnols et les Allemands — il eût pu mentionner les Polonais (Copernic) et les Danois (Tycho Brahé), mais il

---

[1]) La Dédicace fut approuvée par J. Chapelain le 4 février 1673 (T. VII, p. 250). Dans sa lettre Chapelain prodigue aussi des louanges au poème de Vallius.

[2]) Voir quelque remarques de Huygens sur la guerre de Hollande de 1672 e. a. aux p. 144, 181—184 et 191 du T. VII.

[3]) Après l'avant-dernier alinéa de la p. 296 du T. V.

[4]) Voir la fin de l'avant-dernier alinéa de la cinquième des pages occupées par le poème de Vallius dans l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium".

[5]) Leçon de l'édition de 1673. Vallius avait écrit (l. 7 d'en bas de la p. 296 du T. V): „suis qui sidera terris". Cette modification n'est pas indiquée à la p. 299 du T. V.

[6]) Voir la p. 258 du T. VII.

eſt évident qu'il n'a pas la prétention d'être complet —; quant aux Allemands: „. . canit . . Daphnis . . tandem quos conſultos Germania miſit Aſtrorum cœlique, ſuæ qui ſidera terræ" [5]), c.à.d. „Daphnis mentionne enfin les aſtronomes provenant de l'Allemagne, étoiles de leur pays". Dans ce catalogue la France manquait; c'eſt pourquoi Huygens, faiſant alluſion à la création de l'Obſervatoire de Paris (comparez la p. 78 qui ſuit) qui n'exiſtait pas encore lorſque le poème fut compoſé, écrit:

> [Daphnis ajoute] que la France elle auſſi, n'étant inférieure à aucune autre nation, ne fait pas défaut,
> La France qui ſe diſtingue par la magnificence et l'éclat de ſon Roi,
> Auquel le ciel s'apprête à vouer les aſtres de Bourbon.

Suivant l'exemple de Galilée qui baptiſa „étoiles des Medicis" les ſatellites de Jupiter, Huygens propoſait en effet [6]) de donner le nom d'„étoiles des Bourbons" aux ſatellites de Saturne dont il avait découvert le premier à la Haye tandis que l'aſtronome italien Caſſini, également appelé à Paris par la libéralité du Roi, ou, ſi l'on veut, par le grand Colbert, et attaché à l'Obſervatoire de Paris [7]) en avait découvert un deuxième vers la fin de 1671 et bientôt après un troiſième. Huygens avait d'ailleurs pris part aux obſervations de Caſſini [8]).

Sans le privilège accordé par Louis XIV (p. 7) et ſans l'appel de Huygens à Paris, il ne ſerait fort probablement pas entré en relations perſonnelles avec I. Thuret. Attendu que la Pars Prima de l'„Hor. oſc." contient la deſcription des horloges aſtronomiques et marines conſtruites à Paris, la Dédicace dit à bon droit qu'une partie de l'honneur de l'ouvrage revient à Louis XIV. Cependant les mots „ante omnia" de la l. 13 de la p. 81 exagèrent évidemment l'importance de la part du Roi dans le développement des ſciences en général et dans la genèſe de l'œuvre de Huygens en particulier. Le contenu des Tomes XVI et XVII fait voir que Huygens, en arrivant à Paris, était en poſſeſſion de tous les matériaux néceſſaires pour compoſer ſon œuvre, comme le dit d'ailleurs déjà un article de P. Tannery imprimé en 1924 dans l'„Hiſtoire Générale du IVe Siècle à nos jours" publiée ſous la direction de E. Laviſſe et A. Rambaud [9]).

---

[7]) Lorsque Cassini arriva à Paris au commencement de 1669, le bâtiment était élevé au premier étage. Il ne s'y installa qu'en septembre 1672.

[8]) Voir les notes 11 de la p. 115, 6 de la p. 117, 1 et 2 de la p. 118 du T. XV.

[9]) Chez A. Colin à Paris, 1922—1924.

Tannery écrit fort juſtement [1]): „L'ouvrage capital d'Huygens eſt ſon *Horologium oſcillatorium* publié ſeulement en 1673; mais ſes découvertes ſont bien antérieures". Le reſte de la phraſe: „et avaient été en grande partie communiquées ſoit à l'Académie des Sciences, ſoit à la Royal Society" doit toutefois être pris *cum grano ſalis:* les Pièces des T. XVI et XVII écrites à la Haye avant la création de l'Académie des Sciences ſont en majeure partie reſtées inédites juſqu'à nos jours et Huygens n'avait communiqué à la „Royal Society", ainſi qu'à quelques perſonnes en France, que quelques réſultats ſans démonſtration [2]).

Huygens ne commença probablement que vers ſeptembre 1669 la rédaction de ſon ouvrage, avant ou après avoir envoyé à la „Royal Society" au commencement de ce mois les anagrammes du T. VI [3]) qui s'y rapportent en partie. Le programme de la Pars Secunda qui conſtitue la partie B de notre Appendice II à la Pars Prima date du mois nommé [4]), et les Pièces qui conſtituent l'Appendice à la Pars Secunda et les Appendices III—V à la Pars Quarta ſont de janvier 1670 [5]).

Il paraît donc avoir repris en 1669 le projet de 1660 (voir les p. 117—118 du T. XVII) qu'il diſait en janvier 1665 avoir „achevè pour la plus grande partie" [6]).

Vers la fin de janvier 1670 Huygens tomba malade. Il fut viſité par Fr. Vernon qui écrit le 25 février [7]) avoir reçu de lui un paquet cacheté contenant la ſolution des 12 anagrammes de ſeptembre 1669, c.à.d. des 12 [8]) propoſitions ſur le mouvement avec leurs démonſtrations [9]). Lodewijk Huygens qui vint tenir compagnie à ſon frère mit G. Mouton [10]) au courant en juin 1670 ou plus tôt du titre du livre et du fait qu'il paraîtrait, ſuivant l'expreſſion de Mouton, „dans l'Eſclat & la majeſté de ſes belles demonſtrations". La rédaction d'une partie des démonſtrations de l'„Hor. oſc." avait apparemment eu lieu avant la maladie. Il ne peut en effet être queſtion

---

[1]) À la p. 414 du T. VI; son article intitulé „Les Sciences en Europe" constitue le Ch. X du Tome VI.

[2]) Voir e. a. les p. 331 et 375 du T. XVI et 241 du T. XVII, ainsi que les notes 2 de la p. 370 du T. XVI et 2 de la p. 246 du T. XVII.

[3]) T. VI, p. 487—490.

[4]) Voir la note de la partie B de l'Appendice nommé.

[5]) À moins que l'Appendice III à la Pars Quarta ne date déjà de la fin de 1669 (voir la note 1 de la première page de cet Appendice).

[6]) T. V, p. 187, citée aussi dans la note 11 de la p. 119 du T. XVII.

[7]) T. VII, p. 10.

[8]) Ou plutôt 10, comme le dit la note 17 de la p. 10 du T. VII; ou bien 11 en comptant deux fois le N°. 5; voir la p. 487 du T. VI.

dans le cas du paquet cacheté de Pièces publiées dans le T. XVI ſeulement [11]) puiſque les propoſitions des anagrammes contiennent quelque choſe de plus ſur le „rectangulum diſtantiarum" (T. XVI, p. 373). C'eſt ſans doute à la Haye à la maiſon paternelle où il ſéjourna du 9 ſeptembre 1670 [12]) au 12 juin 1671 [13]) — et peut-être dans le même cabinet d'étude où il avait rédigé les parties achevées avant 1665 de l'ouvrage tel qu'il ſe le figurait en 1660, et avant elles les longues démonſtrations géométriques de la Dioptrique qu'on trouve dans le T. XIII — que Huygens continua ou termina la rédaction des démonſtrations de l'„Hor. oſc.". Pendant ce travail il a pu avoir la même impreſſion qu'en 1663 où dans une lettre à J. de Witt (T. IV, p. 311) il ſe dit „miratus . . . quæ momento pene temporis cogitatione complecti ac ſingula perſequi poteram, tot verbis, ut legenti plana fierent, opus habere". Le 9 mars 1672 [14]) il eſt déjà queſtion dans une lettre de lui d'„achever noſtre impreſſion", quoique le permis d'imprimer (voir la p. 84 qui ſuit) ne date que du 30 ſeptembre 1672. Ajoutons que Huygens reçut la première feuille imprimée peu avant cette date (T. VII, p. 229) et que l'impreſſion fut terminée avant mai 1673 (T. VII, p. 269). Nous avons dit dans le T. XVII [15]) qu'il eſt poſſible qu'une démonſtration auſſi exacte que poſſible du tautochroniſme de la cycloïde ait exiſté dès 1664.

C'eſt ici le lieu de remarquer que, quelque peine que Huygens ſe ſoit donné pour rendre ſes démonſtrations rigoureuſes, celle du tautochroniſme de la cycloïde, ou plutôt une de celles qui ſe rapportent au mouvement d'un point peſant ſuivant une courbe matérielle cycloïdale ou autre ſituée dans un plan vertical, fut pourtant jugée inſuffiſante par Newton: voir les p. 326—327 du T. VII, où Newton critique la phraſe: „cum flexus ad B nihil obſtare motui ponatur" de la l. 35 de la p. 145 qui ſuit. La raiſon pour laquelle cette ſuppoſition n'a pas été mentionnée parmi les hypothèſes fondamentales de la Pars Secunda c'eſt ſans doute que Huygens ne croyait cette

---

[9]) Des 11 propositions 5 se rapportent à la force centrifuge, dont les démonstrations datent déjà de 1659 (voir le T. XVI), une au mouvement cycloïdal, 5 au centre d'oscillation, donc à la Pars Quarta.

[10]) Qui avait fait présent en avril à Huygens de son livre mentionné dans la Prop. XXV de la Pars Quarta de l'„Hor. osc.". Voir sur ce livre la p. 59 qui suit.

[11]) Le paquet contenait sans doute le Manuscrit „De Vi Centrifuga". Il peut avoir contenu aussi des brouillons collés (plus tard?) dans le Manuscrit B (T. XVI, p. 374, note 3).

[12]) T. VII, p. 37, note 9.

[13]) T. VII, p. 78, note 1.

[14]) T. VII, p. 152.

[15]) Note 2 de la p. 139.

ſuppoſition pratiquement vraie (c'eſt là auſſi l'opinion que Newton lui attribue) que dans le cas limite où la ligne briſée devient une courbe. Il eût ſans doute pu faire mention de cette conviction dans les hypothèſes fondamentales; mais dans ce cas n'aurait-il pas été obligé d'y parler auſſi de l'hypothèſe de la rigidité abſolue des courbes matérielles qui ne ſe déforment pas par le mouvement du mobile, et n'aurait-il pas dû differter ſur la poſſibilité d'identifier plus ou moins le mouvement réel d'un petit corps avec celui du point peſant ſans aucunes dimenſions qui conſtitue le mobile de tous les théorèmes de la Pars Secunda? Des diſcuſſions de ce genre l'euſſent entraîné aſſez loin ſans contribuer, nous ſemble-t-il, à la clarté de l'expoſition. Toutefois l'obſervation de Newton mérite certainement notre attention: elle nous fait bien voir qu'une mécanique rationnelle abſolument conforme à l'obſervation eſt une chimère. Pour pouvoir appliquer nos théories de phyſique mathématique à ce qui nous paraît être la réalité objective, il eſt néceſſaire d'idéaliſer cette dernière; comparez le premier alinéa de la p. 256 du T. XVI ainſi que la p. 241 du T. XVII.

Dans la Pars Quarta on rencontre également une ſentence qui donne à réfléchir; Huygens y dit (Hypoth. II) qu'un pendule matériel parcourt des arcs égaux en montant et en deſcendant et il ajoute: „De pendulo ſimplici hoc demonſtratum eſt prop. 9 de Deſcenſu gravium. Idem vero et de compoſito tenendum eſſe declarat experientia". La propoſition repoſe donc ſur certains principes (les hypothèſes de la Pars Secunda) pour le pendule ſimple qui eſt une fiction, mais pour le pendule compoſé ſeul exiſtant elle eſt indémontrable et relève directement de l'expérience. On pourrait ſe demander quelle eſt dans ces circonſtances la raiſon d'être de la démonſtration donnée pour le pendule ſimple. Gardons-nous cependant de critiquer ici l'œuvre de Huygens. Nous pouvons être aſſurés qu'en cet endroit il s'eſt critiqué lui-même [1]): il eût ſans doute été heureux de donner une démonſtration, baſée ſur des hypothèſes évidentes, de la réverſibilité du mouvement du pendule compoſé, et il n'a dû invoquer qu'à regret le recours à l'expérience directe. D'ailleurs il n'y a ici, malgré ſon déſir de faire la part de la raiſon pure auſſi grande que poſſible [2]), aucune contradiction réelle: les hypothèſes de la Pars Secunda, tout auſſi bien que l'hypothèſe

[1]) Le choix des hypothèses était évidemment pour Huygens une chose fort importante; voir sur celui des hypothèses du Traité „De Motu Corporum ex Percussione" les notes 5 de la p. 94, 2 de la p. 96, 7 de la p. 97, 5 de la p. 124 et 5 de la p. 221 du T. XVI.

nommée de la Pars Quarta, ont apparemment été tirées de l'expérience ou, si l'on veut, suggérées par elle. Quant à la Pars Tertia, entièrement géométrique, elle n'est précédée d'aucune hypothèse: voir ce que nous avons dit à la p. 31 sur la conformité jugée certaine de la géométrie euclidienne avec l'espace réel et les objets qui s'y trouvent.

L'autre hypothèse, la première, de la Pars Quarta, c'est le célèbre principe — évidemment emprunté lui aussi à l'observation — que par le mouvement spontané d'un groupe de corps partant du repos leur centre commun de gravité ne peut pas s'élever à une hauteur supérieure à celle qu'il avait au commencement. Nous nous sommes suffisamment étendus sur ce principe dans les Tomes précédents [3]; cependant nous devrons y revenir plus loin dans le présent Tome à l'occasion de la „Controversia" qui s'engagea plus tard (et même déjà avant 1673) sur ce sujet.

À propos de cette hypothèse de la Pars Quarta nous devons d'ailleurs remarquer que déjà dans la Prop. VI de la Pars Secunda Huygens admet que le centre de gravité d'un corps ne peut pas s'élever spontanément, mais sans avoir énoncé cette hypothèse au début de la Pars Secunda.

Il nous semble parfaitement inutile de donner ici, après tout ce que nous avons dit dans les T. XIV—XVII, un résumé systématique du Traité de Huygens. Nous nous bornons à attirer l'attention sur quelques questions particulières.

Questions de mathématiques pures.

A. *Quadrature du cercle.* Les trois grands problèmes de l'Antiquité, la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle, ont intéressé Huygens depuis sa jeunesse [4]. Il n'a jamais été convaincu de l'impossibilité de la quadrature du cercle et a toujours espéré qu'on finirait par la trouver [5]. On rencontre dans l'„Hor.

---

[2]) Comparez la note 1 de la p. 278 du T. XVI, où nous avons cité l'expression évidemment exagérée „absque experimento" de la Prop. XXVI de la Pars Quarta.

[3]) Voir e. a. les p. 21, 56—57 (et 597), 332 (note 1) et 357—360 du T. XVI et 243 (note 7) du T. XVII.

[4]) Voir sur ce sujet les T. XI, XII et XIV.

[5]) Voir le premier alinéa de la p. 398 du T. VI (polémique de 1669 avec J. Gregory), et le début de la lettre de Huygens à Leibniz de novembre 1674 (T. VII, p. 393). Voir aussi l'opinion de Leibniz (1691) à la p. 34 du T. X, ainsi que la note 1 de la p. 33 de l'article de F. Schuh,

ofc." (Prop. IX de la Pars Tertia) quelques théorèmes fur la quadrature des conoïdes et fphéroïdes que Huygens fut amené à établir à la fuite de fes recherches fur la quadrature du cercle; voir la lettre de de Slufe de décembre 1657 citée à la p. 211 qui fuit et celle de Huygens à de Slufe de février 1658 [1]). Ajoutons en paffant que la démonftration de ces théorèmes n'a été publiée par Huygens ni ici ni ailleurs; comparez le deuxième alinéa de la p. 33 qui précède. Nous avons publié les démonftrations de Huygens dans le T. XIV auquel, ici comme dans d'autres cas analogues, nous renvoyons le lecteur dans les notes.

Dans l'„Hor. osc." Huygens n'exprime plus le vague efpoir (voir les p. 536—539 du T. XVI) que la recherche des centres d'ofcillation pourra conduire à la quadrature du cercle. Comparez la note 2 de la p. 56 qui fuit.

B. *Développées et développantes femblables.* À la p. 104 qui fuit Huygens pofe la queftion de favoir s'il exifte, outre la cycloïde, d'autres courbes telles qu'en choififfant convenablement la longueur du fil à partir d'un point donné de la première courbe, l'on obtient par le développement une courbe pareille. Vers la fin d'octobre 1678 un certain de Vaumefle qui avait lu l'„Hor. ofc." découvrit [2]) „que par leuolution de la cycloide circulaire [c.à.d. de la cardioïde, en d'autres termes de l'épicycloïde produite dans le cas où le cercle générateur eft égal au cercle immobile] eft décrite une autre cycloïde circulaire triple de la premiere". Ceci donna occafion à Huygens de démontrer avant la fin de la même année que par l'évolution d'une épicycloïde quelconque on peut obtenir une épicycloïde femblable. Voir les §§ 2 et 3 de l'Appendice III à la Pars Tertia; c'eft une Pièce lue à l'Académie des Sciences le 3 décembre 1678 qui fait défaut dans les Régiftres de l'Académie. Jacques Bernoulli publia en mai 1692 [3]) la propofition que la fpirale logarithmique a la même propriété et peut même engendrer une fpirale égale. La queftion fut reprife quelques dizaines d'années plus tard par Iac. Hermann [4]) et par G. W. Krafft qui démontra dans fon

cité aussi à la p. 174 du T. XII: „Sur quelques formules approximatives pour la circonférence du cercle et sur la cyclométrie de Huygens" (Archives néerl. d. sciences exactes et naturelles, Série III A, T. III, la Haye, M. Nijhoff, 1914).

[1]) T. II, p. 134. Comparez la p. 200 du T. XIV.

[2]) T. VIII, p. 117.

[3]) Voir la note 16 de la p. 119 du T. X. Il dit (p. 210 des „Acta eruditorum" de 1692) à propos de la propriété „sui evolutione seipsam describere" de la spirale logarithmique: „quod jam olim

article de 1727 „De Lineis Curvis quæ evolutæ ipſæ ſe generant"[5]) que la cycloïde et la ſpirale logarithmique à angle conſtant de 45° ſont les ſeules lignes qui engendrent des lignes égales tandis que des lignes ſemblables ne peuvent provenir par évolution que des autres ſpirales logarithmiques et des épi- ou hypocycloïdes[6]). Il dit à tort que ce fut Tschirnhaus qui s'occupa pour la première fois (d'après l'article „Inventa nova etc." des Acta Erud. de 1682) de ces dernières lignes. Comparez la fin du § 1 de l'Appendice III nommée. Voir ſur les relations de Huygens avec Tschirnhaus la p. 381 du T. VII ainſi que les p. 499 et 511 du T. IX.

C. *Rayon de Courbure.* On a remarqué qu'en établiſſant la théorie des développées Huygens ne dit rien ſur la courbure. Cantor affirme „dass Huygens an Krümmungsverhältniſſe gar nicht dachte"[7]). Il eſt vrai qu'il n'obſerve pas — non plus qu'Apollonios dans le cinquième livre de ſes „Conica"[8]) — que le point d'interſection de deux normales infiniment voiſines eſt le centre d'un cercle de courbure, mais

---

etiam Fratri meo obſervatum". On trouve en effet la même chose à la p. 459 du Tomus Tertius des Opera Omnia de Jean Bernoulli, mentionné dans la note 7 de la p. 43 qui suit.

[4]) Travail inédit, cité par G. W. Krafft.

[5]) Cet article occupe les p. 216—230 des „Commentarii Ac. Sc. Imp. Petrop. T. II ad annum MDCCXXVII", Petropoli Typis Acad. MDCCXXIX.

[6]) Après lui L. Euler traita le même sujet dans son „Investigatio curvarum quæ evolutæ sui similes producunt", p. 3—52 des „Comm. Ac. Sc. Imp. Petrop. T. XII ad annum MDCCXL", Petr. Typ. Ac. MDCCL. Il généralisa la question dans un deuxième article de 1775 intitulé „Investigatio curvarum quæ similes sint suis evolutis vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cuiuscunque", p. 75—116 des „Nova Acta Ac. Sc. Imp. Petrop. T. I", Petr. Typ. Ac. MDCCLXXXVII.

[7]) M. Cantor, „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" III, p. 177 (2ième éd. Leipzig. Teubner, 1901).

[8]) Les livres V, VI et VII des „Conica", dont le cinquième traite des normales aux coniques, furent publiés pour la première fois en 1661 par Borelli et Abraham Ecchellensis, après que Borelli eut en 1658 retrouvé à Florence le texte arabe (T. II, p. 226, 252). Pour des détails sur ce manuscrit on peut consulter la p. 472 du T. I de la Correspondance du P. Marin Mersenne (note 2 de la p. 52 qui suit). Déjà longtemps avant Borelli Golius avait entrepris le même travail d'après un autre texte arabe mais sans, paraît-il, en pouvoir venir à bout; Huygens le savait au moins depuis 1651 (T. I, p. 161) et évidemment beaucoup plus tôt, puisque son père en fait mention en 1646 dans une lettre à Mersenne (T. II, p. 555) et que ce dernier en parle à la p. 274 de son „Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopsis" de 1644; mais rien ne démontre qu'il ait vu le manuscrit ou la traduction de Golius. Il convient toutefois d'ajouter que Golius était professeur d'arabe et de mathématiques à l'Université de Leiden lorsque Huygens y étudiait, et qu'il peut fort bien avoir causé avec lui en ce temps sur ce sujet (l. 8 d'en bas de la p. 161 du T. I), d'autant plus que son père connaissait Golius depuis longtemps (voir p.e. la p. 549 du T. XVII). Rappelons que la théorie des développées de Huygens est de la fin de 1659 (T. XVII, p. 147, note 2).

la notion de courbure ne lui était nullement étrangère. On peut voir aux p. 17—18 du T. XVII qu'avant d'avoir trouvé la vraie forme des arcs du pendule (et c'est de la construction de ces arcs qu'est sortie la théorie des développées [1]), il composait en 1657, du moins en théorie, ces arcs ou „platines courbes" [2]) de portions de circonférences de cercle. D'ailleurs, comme nous l'avons observé dans la note 2 de la p. 288 du T. XVII, déjà en 1654 il considérait, en s'occupant théoriquement de la taille d'une lentille elliptique, le point où les normales infiniment voisines de l'axe de rotation d'un ellipsoïde coupent cet axe comme un véritable centre de courbure, quoique sans se servir de ce terme [3]).

Dans la partie B datant de 1670 de notre Appendice à la Pars Secunda de l'„Hor. osc." Huygens détermine la relation qui existe dans un cas spécial entre deux rayons de courbure, ici aussi sans se servir de ce terme.

En juin 1686 Leibniz publia dans les „Acta eruditorum" [4]) sa „Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi": il y parle du cercle osculateur. Comme Kepler (note 3) et Huygens en 1654 — il ne cite d'ailleurs ni l'un ni l'autre — ils s'inspire plus ou moins de la „praxis catoptrica et dioptrica". Leibniz séjourna à Paris de 1672 à 1676 et Huygens eut alors une grande influence sur lui: voir la note 12 de la p. 244 du T. VII, où Leibniz dit e.a. sur le don que Huygens lui fit de l'„Hor. osc.": „Id mihi accuratioris Geometriæ initium vel occasio fuit" [5]). En mars 1691 dans une Pièce envoyée à Leibniz [6])

---

[1]) T. XVII, p. 144, note 1. Comparez ce que dit Huygens à la fin de la Prop. VI de la Pars Tertia de l'„Hor. osc." sur la „superficies secundum cycloidem curvata".

[2]) T. XVII, p. 11, l. 6.

[3]) Huygens peut avoir connu en 1654 (ou plus tôt) les „Ad Vitellionem Paralipomena" de Kepler, où celui-ci (Prop. XX, Ch. III) se sert dans un cas analogue de l'expression „ratio curvitatis"; en considérant une parabole, il parle du „circulus qui continuat rationem curvitatis" en un point donné de la courbe.

[4]) T. X, p. 156.

[5]) Toutefois les considérations de 1686 de Leibniz sur le cercle osculateur manquent d'exactitude et sont même positivement erronées: il dit généralement: „Circuli osculantes inveniuntur per quatuor radices æquales, seu per duos contactus in unum coincidentes". Jacques Bernoulli signala cette erreur dans son article de mars 1692 dans les Acta Eruditorum „J. B. Additamentum ad Solutionem Curvæ Causticæ fratris Jo. Bernoulli, una cum Meditatione de Natura Evolutarum, & variis osculationum generibus". Il y dit (p. 116): „Vidimus . . in osculo primi gradus tres tantum intersectiones coincidere, non duos contactus, qui quatuor intersectionibus æquivalent". Leibniz reconnut son erreur dans l'article publié en septembre 1692: „G. G. L. Generalia de Natura linearum, anguloque contactus et osculi etc.". Dans ces articles Huygens est souvent mentionné. P. e. à la p. 110 de l'article de Bernoulli il est dit que, suivant Leibniz aussi, „Hugenium primum animadvertisse, quod centra osculorum curvas osculantium perpetuo incidant in lineas istas . . quarum evolutione illæ describuntur".

Huygens se sert de l'expression „radius curvitatis" qu'il n'emprunte, semble-t-il, à aucun autre auteur. La même expression se trouve dans son article sur la chaînette du 5 mai 1691 publié dans la livraison de juin 1691 des „Acta eruditorum". Comme son frère (note 5) Jean Bernoulli en 1691 ou 1692 témoigne en faveur de Huygens[7]).

Dans le traité posthume „Methodus fluxionum et serierum infinitarum", Newton parle du „radius curvaturæ" ainsi que du „centrum curvaturæ". D'après les lettres de décembre 1671 de J. Collins à G. A. Borelli et à F. Vernon[8]) ce traité fut prêt pour la presse déjà en 1671[9]), mais il a dû avoir été remanié plus tard par l'auteur puisque, comme l'observe Cantor[10]), il contient des propositions rappelant si fortement certaines parties de l'„Hor. osc." que l'on doit admettre „Newton habe diese Stellen der M. fl. erst geschrieben nachdem er das Hor. osc. gelesen hatte"[11]). D'ailleurs, dans les deux lettres nommées, Collins donne beaucoup de détails sur le contenu du traité, mais il ne dit rien sur la courbure ni sur l'évolution des courbes, si ce n'est qu'il a exhorté Newton à publier bientôt son ouvrage puisque „D. Hugenius tractatum de Dioptrica et de Curvarum evolutione jam molitur", ce qu'il avait

[6]) T. X, p. 59.

[7]) Dans ses „Lectiones Mathematicæ de Methodo Integralium, aliisque; conscriptæ in usum Ill. Marchionis Hospitalii, cum Auctor Parisiis ageret Annis 1691 & 1692" (Joh. Bernoulli Opera Omnia Tomus Tertius, Lausannæ & Genevæ, Sumptis Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum, MDCCXLII) il ne se sert pas encore de l'expression „rayon de courbure", mais il parle longuement des cercles osculateurs; il dit p. e. à la p. 432 (Lectio Decima Quinta) en parlant „de centro D circuli osculantis": „Variabunt quoque centra D, adeo ut describant certam quandam curvam EDδ, quam D. Hugenius ostendit esse illam, ex cujus evolutione describitur curva ABβ".

[8]) P. 81 de l'édition de 1856 par J. B. Biot et F. Lefort (Paris, Mallet-Bachelier, 1856) du „Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de Analysi promota etc." Nous avons aussi consulté l'édition de Londres (J. Tonson & J. Watts) de 1722; la première est de 1712.

[9]) Le traité parut en 1736 en anglais („Method of fluxions and infinite series with application to the geometry of curved lines", ed. J. Colson, London); nous avons consulté l'édition latine de 1744 („Is. Newtoni equitis aurati Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica", collegit partimque Latinè vertit ac recensuit Joh. Castillioneus Jurisconsultus, Lausannæ & Genevæ, apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, MDCCXLIV).

[10]) „Vorl. üb. Gesch. d. Math." II, 1899, p. 178.

[11]) On trouve à la p. 104 du T. I des „Opuscula" (note 9) le Probl. V: „Determinare Quantitatem Curvaturæ, quam habet data quævis Curva in dato Puncto". À la p. 113 il est question dans le Coroll. IV de l'Exempl. IV d'un poids oscillant suspendu „in inversis Trochoïdibus" et se mouvant par conséquent „in Perimetro Trochoïdis [i. e. Cycloidis] inferioris", ce qui est évidemment emprunté à l'„Hor. osc.".

appris probablement de Vernon lui-même (voir la p. 36 qui précède). Dans ſa lettre du 24 octobre 1676 à Leibniz[1]) Newton dit à propos de ce même traité: „Ipſe autem tractatum meum non penitus abſolveram, ubi deſtiti [il ne dit pas quand] a propoſito; neque in hunc diem mens rediit ad aliqua adjicienda". Il est poſſible qu'après l'exhortation de Collins et avant d'avoir reçu l'„Hor. oſc." Newton, ſachant que Huygens traiterait „de Curvarum evolutione", ait ajouté quelque choſe à ſon traité déjà en 1672, puiſque dans ſa lettre du 10 décembre 1672 à Collins[2]) il dit que ſa méthode ne ſert pas ſeulement à mener des tangentes, mais auſſi „ad reſolvendum alia abſtruſiora Problematum genera *de Curvitatibus* [nous ſoulignons], Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum, etc." (les trois derniers ſujets avaient déjà été mentionnés par Collins dans ſes lettres de déc. 1671) et que „hanc methodum intertexui alteri iſti, qua Aequationum Exegeſin inſtituo, reducendo eas ad Series infinitas". Nous ignorons donc à quelle époque Newton s'eſt ſervi la première fois de l'expreſſion „radius curvaturæ".[3]).

Comme dans notre édition du Traité ſur la Force Centrifuge (T. XVI), nous nous abſtenons généralement dans celle de l'„Hor. oſc." de notes traduiſant en formules plus modernes les théorèmes de Huygens. On trouve des notes de ce genre dans la traduction allemande publiée en 1913[4]). Toutefois nous avons indiqué dans une note à la Prop. XI de la Pars Tertia que les raiſonnements géométriques de Huygens conduiſent à la formule générale du rayon de courbure.

Questions de mécanique théorique.

A. *Peſanteur et force centrifuge.* Dans l'„Hor. oſc." Huygens s'abſtient de toute hypothèſe ſur la cauſe de la peſanteur dont il avait traité en 1659 et en 1668[5]); voir

---

[1]) „Commercium epistolicum J. Collins etc.", édition de 1856, p. 137.

[2]) Même ouvrage, p. 84.

[3]) Dans les „Lectiones Opticæ in Acad. Cantabrigiensi Annis 1669, 1670 & 1671 in Scholis publicis habitæ, & ex MSS. editæ, Londini; An. 1729", réimprimées par J. Castillioneus dans le deuxième Tome des „Opuscula" (note 9 de la p. préc.), Newton parle (Lemma IX, p. 164) de „Ad datam quamvis Curvam concursum axis & vicinissimi perpendiculi determinare", mais sans se servir du terme „radius curvaturæ", comme on pourrait le croire d'après la p. X de l'„Editoris Præfatio" dans le T. I des „Opuscula".

[4]) Chr. Huygens „Die Pendeluhr". A Heckscher et A. v. Oettingen, Ostwalds Klassiker d. ex. Wiss. N°. 192, W. Engelmann, Leipzig, 1913.

ſur les conſidérations de 1659 les p. 244 et 276—277 du T. XVII. Il ſe contente de parler (Hyp. II de la Pars Secunda) de la „gravitatis actio, undecunque illa oriatur", ſe plaçant ainſi au point de vue phénoménologique de Galilée. Comparez d'ailleurs la note 4 de la p. 277 du T. XVII et remarquez que le calcul de la viteſſe $\sqrt{gr}$ (note 7 et 8 de la même page) d'un mobile décrivant une circonférence concentrique avec un grand cercle de la terre eſt indépendant de toute hypothèſe ſur la nature de la peſanteur. Huygens connaiſſait dès 1659 la grandeur abſolue de la force centrifuge. Pluſieurs de ſes Propoſitions ſur cette force, p.e. la treizième et dernière, par laquelle ſe termine l'„Hor. oſc.", ſont bien voir — et ceci mérite d'être remarqué — que ſelon lui [6]) le facteur m de la formule mg eſt le même que celui de la formule $\frac{mv^2}{r}$ [7]), réſultat qui, nous ſemble-t-il, peut provenir tout ſimplement de la conſidération de 1659 du mobile ſuſdit décrivant la circonférence concentrique [8]): l'égalité des accélérations centripète g et centrifuge $\frac{v^2}{r}$ dans ce cas peut avoir amené Huygens tout naturellement à admettre auſſi l'égalité des *conatus* [9]) (ou forces) correſpondants. Le dernier alinéa de la p. 277 du T. XVII, ainſi que les p. 303 et 304 du T. XVI,

[5]) En 1668 (comparez la note 8 de la p. 277 du T. XVII) avait eu lieu à l'Académie des Sciences, d'après les Régiſtres, une série de conférences ſur la nature de la peſanteur; Huygens y avait défendu la théorie, ou plutôt ſa théorie à lui, des tourbillons. Pluſieurs autres membres n'admettaient nullement des hypothèſes de ce genre. Huygens ne publia qu'en 1690 ſon „Diſcours de la Cauſe de la Peſanteur" de 1668, publication dont nous avons auſſi fait mention à la p. 328 du T. XVI.

[6]) Comparez le Traité ſur la Force Centrifuge de 1659 (T. XVI) qui ne fut publié qu'en 1703; voir auſſi la fin de la note 2 de la p. 246 du T. XVII.

[7]) Voir ſur les formules mg, $\frac{mv^2}{r}$ et $\sqrt{gr}$, qui expriment la penſée de Huygens ſous une forme moderne, la p. 245 ainſi que la note 8 de la p. 303 (et auſſi la p. 250) du T. XVI. Nous pouvons ajouter que c'eſt la même „maſſe" qui intervient ſelon lui (quoique la notion de la maſſe comme diſtincte du poids ne ſoit pas nettement formulée par lui avant l'apparition des „Principia" de Newton en 1687; comparez p. e. la note 5 de la p. 230 du T. XVI) dans le choc des corps; voir à la p. 180 du T. XVI le dernier alinéa: „Je conſidere en tout cecy des corps d'une meſme matiere, ou bien j'entends que leur grandeur ſoit eſtimée par le poids" (1669). À la p. 244 de 1668 du Manuſcrit E Huygens avait fait cependant une réſerve ſur ce point, diſant: „An vis percutiendi in corpore duro ſequatur gravitatem corporis ejusdem. Videbatur ſuccedere in parva quantitate, in magna non item".

[8]) Il eſt évidemment ſans importance que le mobile en queſtion eſt dans la Pièce de 1659 une particule de „materia ſubtilis".

[9]) P. 276 du T. XVII, l. 3 d'en bas. Voir auſſi le dernier alinéa de la p. 245 du T. XVI.

font voir clairement qu'en étudiant la force centrifuge il a commencé par considérer le cas où la gravité et la force centrifuge se balancent.

Dans le début de la Pars Secunda de l'„Hor. osc." ce sont des idées et des théorèmes de Galilée que Huygens précise. Ici comme dans la Pars Quarta et dans les théorèmes V—XIII sur la force centrifuge de la Pars Quinta, c.à.d. dans tout ce qui se rapporte au mouvement des corps sous l'action de la pesanteur, la philosophie corpusculaire de Descartes, en d'autres termes la théorie des tourbillons, ne joue aucun rôle.

Voir sur un sujet non traité dans l'„Hor. osc." les p. 247, 285 et 286 du T. XVII.

B. *Arcs cycloïdaux et pendule composé.* Les arcs cycloïdaux n'assurent l'isochronisme que pour le pendule simple. Quelle doit être en théorie la forme des arcs pour un pendule composé (en supposant toujours le poids du fil négligeable)? C'est une question dont L. Euler s'est occupé en 1750 [1]). Huygens ne l'a pas abordée. Il se contente de dire (Prop. XXIV de la Pars Quarta) que les arcs cycloïdaux seraient corrects si tous les points du corps suspendu au fil impondérable décrivaient des cycloïdes, ce qui serait le cas si ce corps se déplaçait sans aucune rotation. Voir sur cette question l'Appendice IV à la Pars Quarta.

C. *Rectangulum oscillationis ou rectangulum distantiarum.* En 1669 Huygens donna le nom de „rectangulum distantiarum" au produit de la distance de l'axe d'oscillation au centre de gravité du corps oscillant considéré, par la distance de ce centre au centre d'oscillation. Comme nous l'avons dit à la p. 373 du T. XVI, Huygens avait établi en 1664 la constance de ce produit pour différents axes d'oscillation parallèles entr'eux dans deux cas: 1. celui où le corps est une surface oscillant perpendiculairement à son plan (T. XVI, p. 508), 2. celui où le corps est une surface symétrique par rapport à un axe vertical qui oscille dans son plan (T. XVI, p. 528). Il ajoutait, mais sans le démontrer, que le produit nommé est constant pour une surface plane quelconque (T. XVI, p. 528, note 2). Il est entendu que le plan qui contient les deux axes parallèles considérés passe toujours par le centre de gravité du corps. Dans l'„Hor. osc." la constance du „rectangulum distantiarum" pour un corps quel-

[1]) „De Motu Tautochrono Pendulorum Compositorum", Novi Commentarii Ac. Scient. Imp. Petrop. T. III ad Annum MDCCL et MDCCLI, Petropoli, Typ. Ac. Scient. MDCCLIII, p. 286—306.

conque oſcillant ſuivant un plan déterminé eſt démontré (Pars Quarta, Prop. XIX) en partant des Prop. VI et XVIII de la même Pars. La Prop. VI établit la formule générale

$$l = \frac{\Sigma r^2}{nb}$$

(voir la p. 33 qui précède) et la Prop. XVIII conduit à la formule également applicable à un corps quelconque

$$l - b = \frac{\Sigma r'^2}{nb},$$

où r eſt la diſtance d'un point du corps à l'axe d'oſcillation et r' celle du même point à un axe parallèle paſſant par le centre de gravité du corps [2]). Comme les deux formules peuvent s'écrire

$$l = \frac{I}{Mb} \quad \text{et} \quad l - b = \frac{I'}{Mb},$$

où M eſt la maſſe du corps et I et I' déſignent les moments d'inertie [3]) par rapport aux deux axes nommés, la deuxième formule réſulte de la première auſſitôt qu'on a établi la relation $I = I' + Mb^2$, ce qui eſt une formule moderne bien connue. Il eſt évident par là que la démonſtration de Huygens conſiſte en ſomme à établir cette relation. Et celle de la Prop. XIX conſiſte à tirer des formules

$$l_1 - b_1 = \frac{\Sigma r'^2}{nb_1} \quad \text{et} \quad l_2 - b_2 = \frac{\Sigma r'^2}{nb_2},$$

qui s'appliquent à un même corps oſcillant d'abord autour de l'axe 1, enſuite autour de l'axe parallèle 2 ſitué dans le plan paſſant par l'axe 1 et le centre de gravité du corps, la formule

$$b_1(l_1 - b_1) = b_2(l_2 - b_2),$$

qui exprime la conſtance du „rectangulum diſtantiarum".

De cette dernière formule réſulte la célèbre Propoſition XX qui exprime la réverſibilité du pendule, puiſque les relations

$$b_1(l_1 - b_1) = b_2(l_2 - b_2) \quad \text{et} \quad l_1 = b_1 + b_2$$

ne peuvent coëxiſter à moins qu'on n'ait auſſi

$$l_2 = b_1 + b_2, \quad \text{donc} \quad l_2 = l_1.$$

---

[2]) l est la longueur du pendule isochrone, b la distance du centre de gravité du corps à l'axe d'oscillation, n le nombre des particules qui composent le corps.

[3]) Voir la p. 378 du T. XVI.

Si l'on écrit $$I = M\rho^2 \text{ et } I' = M\rho'^2,$$
où ρ et ρ' désignent des rayons d'inertie (nous continuons à nous servir d'accents pour désigner les grandeurs se rapportant à un axe passant par le centre de gravité), l'équation

$$l - b = \frac{I'}{Mb}$$

donne

$$l = b + \frac{\rho'^2}{b}\text{[1]};$$

en d'autres termes ρ'^2 ou $\frac{\Sigma r'^2}{n}$ est identique avec le „rectangulum distantiarum" que Huygens désigne toutefois dans l'„Hor. osc." par le terme „rectangulum oscillationis" ou „spatium applicandum", c.à.d. espace qui doit être divisé par une longueur (à savoir b). Voir p.e. dans le calcul du „Centrum oscillationis rectanguli" de la Prop. XXI de la Pars Quarta l'expression „spatium applicandum sive rectangulum oscillationis".

Le calcul pratique de ρ'^2 ou $\frac{\Sigma r'^2}{n}$ exige en général la décomposition de $\Sigma r'^2$ suivant des axes rectangulaires, situés dans le „planum oscillationis" et passant l'un et l'autre par le centre de gravité du corps, en $\Sigma y'^2 + \Sigma z'^2$ (comme on peut le voir dans les exemples que Huygens propose) et l'application des méthodes pour trouver ces dernières sommes, déjà consignées dans une Pièce de 1664 ou 1665 (p. 545—549 du T. XVI) à laquelle sont empruntées les Prop. IX—XI de la Pars Quarta. Les grandeurs $\frac{\Sigma y'^2}{n}$ et $\frac{\Sigma z'^2}{n}$ sont simplement appelées rectangula. Dans l'Appendice II à la Pars Quarta nous les appelons respectivement premier et deuxième rectangulum.

En comparant p. e. le calcul de l'„Hor. osc." dans le cas du rectangle oscillant dans son plan dont nous venons de parler [2]) avec les calculs du T. XVI (p. 456 —

---

[1]) On trouve pareillement $l = \frac{\rho^2}{b}$ d'après la formule $l = \frac{I}{Mb}$. Ceci correspond à la Prop. XVI de la Pars Quarta, où le numérateur que nous appelons ici ρ^2 constitue, tout aussi bien que le numérateur ρ'^2 du texte, un „spatium applicandum". Toutefois Huygens — et nous suivrons son exemple — réserve l'expression „spatium applicandum" pour le numérateur que nous désignons ici par ρ'^2 exclusivement.

[2]) Huygens ne donne la longueur du pendule isochrone que pour le cas où le rectangle est suspendu en un sommet, mais l'essentiel était de trouver le „rectangulum oscillationis", d'où se déduisent avec une égale facilité les longueurs des pendules isochrones pour des suspensions quelconques.

méthode inconnue dite fort difficile —, p. 463—469 — méthode de réduction, d'après la p. 369, de l'oscillation latérale à l'oscillation perpendiculaire au plan de la figure — et p. 520—523 — méthode générale, d'après la p. 370, pour les surfaces planes symétriques oscillant dans leur plan), on voit combien le procédé de calcul a été successivement simplifié. C'est dans le septième alinéa de la Prop. XXI de la Pars Quarta que Huygens fait connaître la méthode de calcul pour une surface plane quelconque oscillant dans son plan, que l'on peut comparer avec celle du dernier alinéa de la p. 370 du T. XVI.

D. *Méthode de la Prop. XV de la Pars Quarta.* Nous avons dit à la p. 371 du T. XVI que cette méthode était connue à Huygens en 1665, du moins pour le cas particulier des corps de révolution. Il semble fort possible qu'il l'ait conçue déjà en ce temps pour des corps quelconques possédant les propriétés qu'il mentionne dans la Prop. XV. Remarquons que dans son raisonnement géométrique il y fait usage de la règle dite de Guldin qui est en réalité une règle de Pappus: on la trouve à la fin de la Préface du Livre VII de sa Συναγωγή [3]).

Dans la Prop. XXII Huygens cherche le centre d'oscillation de la sphère en se basant sur la Prop. XV; comparez le dernier alinéa de la p. 472 du T. XVI.

E. *Recherche du centre d'oscillation dans quelques cas particuliers.* Dans l'„Hor. osc." Huygens considère quelques cas particuliers qui ne se trouvent pas dans les Manuscrits B et C ni dans les brouillons de 1664, du moins dans ceux qu'il a conservés. Ce sont 1. le polygone régulier à nombre quelconque de côtés oscillant dans son plan (Prop. XXI) [4]), 2. la pyramide [5]), 3. le cône [6]), 4. le cylindre, 5. le demi-cône (Prop. XXII de la Pars Quarta). Voir sur la parabole oscillant dans son plan (Prop. XXI) qu'on ne trouvera pas dans le T. XVI, l'Appendice II à la Pars Quarta qui traite aussi de l'oscillation d'une croix [7]). Dans la Pièce qui constitue le § 3 de notre Appendice III à la même Pars Huygens considère le cas d'un secteur de sphère.

---

[3]) Voir la note 3 de la p. 439 du T. XVI. Pappus a déjà été mentionné à la p. 34 qui précède.

[4]) Comparez le dernier alinéa de la note de la p. 496 du T. XVI.

[5]) Dans l'Appendice III à la Pars Quarta emprunté au Manuscrit D Huygens écrit vers la fin du cinquième alinéa du § 3: „sicut cum de pyramide ageremus ostensum est", ce qui se rapporte à un calcul peut-être ancien que nous ne possédons plus.

[6]) Voir sur le cône la partie D de l'Appendice II à la Pars Quarta.

[7]) La partie C de cet Appendice traite de l'oscillation d'un demi-paraboloïde.

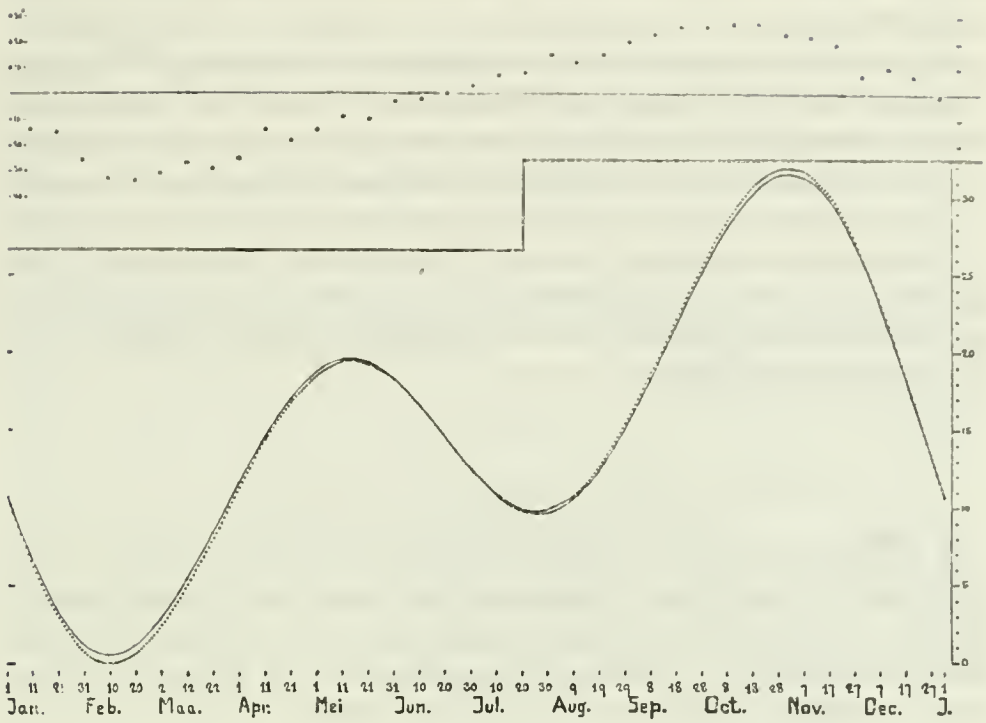
À la fin des Prop. XXI et XXII il parle de figures ſcalènes, planes ou ſolides, iſochrones avec les ſigures droites dont elles proviennent par luxation. Pour prouver cet iſochroniſme il ſe contente de remarquer que d'après une propoſition antérieure les „lineæ graves" dans le premier cas, les ſurfaces planes graves dans le deuxième, dans leſquelles on peut découper les figures données et les ſigures ſcalènes, ſont iſochrones deux à deux. Ce raiſonnement nous paraît un peu trop court pour être convaincant. Ne fallait-il pas plutôt dire que d'après la formule $l=\frac{\Sigma r^2}{nb}$ appliquée aux éléments iſochrones deux à deux, l'égalité de l et de b entraîne celle de Σr^2, que par conſéquent le Σr^2 pour la figure ſcalène entière eſt égal à celui de la figure droite entière, et que, les b, c.à.d. les diſtances des centres de gravité à l'axe de ſuſpenſion, étant auſſi égales entre elles pour les deux figures entières, il en eſt de même de leurs l, c.à.d. des longueurs de leurs pendules ſimples iſochrones [1])? Et même contre cette preuve-là on pourrait encore faire l'objection qu'elle eſt trop conforme à l'eſprit de Cavalieri. Il eſt vrai que la même objection pourrait être faite contre les démonſtrations des Prop. VII—XI et XIII—XVIII de la Pars Quarta puiſque les ſurfaces ou les corps y ſont conſidérés comme compoſés de fort petites particules égales parfois repréſentées par des carrés ou points centraux de carrés (Prop. IX, XIII, etc.), d'autres fois p.e. par de petits priſmes ou parallélépipèdes dont il eſt dit dans la Prop. VII „totum cuneum ABD componi". La rigueur de ces preuves eſt apparemment inférieure à celle des Prop. II—VI, IX, X et XXIV de la Pars Secunda, III de la Pars Tertia et IV—V de la Pars Quarta, où Huygens applique la méthode antique de la réduction à l'abſurde en commençant par ſuppoſer que l'égalité qu'il s'agit de démontrer n'exiſte pas. En revanche, les démonſtrations dans leſquelles l'objet mathématique conſidéré eſt ſuppoſé découpé en un fort grand nombre de parties ſont évidemment moins artificielles [2]).

Expéditions pour déterminer les longitudes et Table de l'Equation.

Nous reviendrons plus loin dans ce Tome ſur les réſultats pratiques des expéditions

---

[1]) Comparez la note 3 de la p. 462 du T. XVI.
[2]) Comparez la p. 348 et la note 1 de la p. 378 du T. XVI.



La courbe continue de notre figure, calculée par Mons. P. P. Bruna d'après les données sur l'orbite de la terre de S. Newcomb (1835—1909), donne l'équation du temps pour l'année 1670. La courbe pointillée représente le résultat des calculs de Huygens consigné dans sa Table. Avec Huygens nous prenons ici pour l'équation l'ascension droite du vrai soleil moins celle du soleil moyen, quoique les astronomes modernes aient l'habitude de considérer la différence inverse.

L'équation du temps a été calculée, pour une ascension droite de 0°, 10°, 20° etc. du soleil moyen, d'après les formules du § 494 du T. II de 1892 du „Handbuch der Astronomie" par R. Wolff (Zürich, F. Schulthess).

Les données de la p. 9 du T. VI („Tables of the four inner planets") des „Astronomical Papers for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac" (Washington, Bureau of Equipment, Navy Department, 1898) ont conduit pour les éléments de l'orbite du soleil en 1670 aux valeurs suivantes:

périgée de l'orbite du soleil..... 277°16′9″
excentricité de l'orbite..... 0.0168465
inclinaison de l'écliptique sur l'équateur 23°28′56″,0.

Puisque Huygens ne tient pas compte des années bissextiles nous avons également calculé une table moyenne au lieu d'attribuer à l'équation d'un jour déterminé une période quadriennale. Comme notre courbe s'accorde le mieux avec celle de Huygens (calculée avant le 15 février 1662, impossible de dire exactement pour quelle année) en admettant que le soleil atteint le point vernal le 21 mars à midi, nous avons pris la longueur du soleil égale à zéro pour cet instant-là.

Dans la partie supérieure de la figure, les différences Huygens-Newcomb sont indiquees en secondes. De juillet à décembre ces différences sont positives; de janvier à juin elles sont négatives. La plus grande différence positive est de 27″, la plus grande différence négative de 34″.

mentionnées par Huygens dans la Pars Prima en parlant en même temps des expéditions ultérieures.

Puiſqu'une détermination exacte des longitudes à l'aide d'horloges n'exige pas ſeulement une régularité parfaite de la marche de celles-ci mais auſſi l'emploi d'une Table fort juſte de l'Équation du Temps, nous nous ſommes demandés ſi la Table des p. 112—113[1]) eſt abſolument correcte. Le doute eſt d'autant plus permis qu'il eût en tout cas, pour ſatisfaire à toutes les exigences, fallu calculer des tables pour quatre années conſécutives dont une biſſextile. On a eu à l'Obſervatoire de l'Univerſité de Leiden la bonté d'exécuter les calculs néceſſaires pour l'année 1670. Dans la figure qui précède on peut voir de combien la courbe correſpondant à la Table de Huygens s'écarte de celle calculée à Leiden.

Précurseurs et concurrents de Huygens.

A. *Tangentes aux courbes engendrées par les points d'une figure roulante.* Comme Huygens le remarque dans la Pièce qui conſtitue la partie A de notre Appendice à la Pars Secunda, il s'eſt inſpiré dans la démonſtration générale de la Prop. XV de cette Pars d'une propoſition de Deſcartes et du commentaire de van Schooten ſur ce ſujet. On peut conſulter là-deſſus la note 1 à l'Appendice nommé.

B. *Centre d'oſcillation et meſure univerſelle de la longueur.* Aux conſidérations des p. 349—353 du T. XVI nous devons ajouter quelques mots ſur Honoré Fabry, mentionné par Huygens, avec Deſcartes, dans le début de la Pars Quarta. Nous avons dit à l'endroit nommé qu'avant octobre 1664 Huygens n'avait pas pris la peine de s'enquérir des recherches de Deſcartes et de Roberval ſur le centre d'agitation; comparez la fin de l'alinéa ſuivant. Le troiſième Tome des „Lettres de Deſcartes" publiées par Clerſelier qui contient les lettres de 1646 de Deſcartes à Merſenne et à Cavendish[2]) ſur ce ſujet, ainſi que des obſervations de Roberval, ne parut qu'en 1667. Huygens a appris à le connaître vers ce temps, quoiqu'il n'en faſſe mention dans ſa correſpondance qu'en 1687[3]), mais il ne diſcute la théorie erronée de Deſcartes ni dans l'„Hor. oſc."

---

[1]) Identique avec celle construite avant le 15 février 1662 de la „Brève Instruction" de 1665 (T. XVII, p. 204, note 1 et p. 207).

[2]) Dans le T. XVI, p. 569, nous avons donné à Cavendish le prénom William. D'après la p. 371 du T. IV de l'édition des „Oeuvres de Descartes" par Adam et Tannery, et aussi d'après la p. 654 de la „Correspondance du P. Marin Mersenne" publiée par Mme P. Tannery, éditée et

ni ailleurs. Quant au „Tractatus Physicus de Motu locali, in quo Effectus omnes, qui ad Impetum, Motum naturalem, violentum, & mixtum pertinent, explicantur & ex principiis Physicis demonstrantur. Auctore Petro Mousnerio Doctore Medico: Cuncta excerpta ex prælectionibus R. P. Honorati Fabry, Societatis Iesu" de 1646[4]), où l'auteur, ou plutôt Fabry, „de pendulis isochronis egit . . sed pleraque falsa dedit nec quicquam demonstravit"[5]), Huygens dit en 1664 le connaître dans une lettre d'octobre de cette année[5]); il le connaissait dès 1647 comme nous le ferons voir.

Mersenne, assez longtemps, paraît-il, avant 1646 où il proposa la question du centre d'oscillation ou plutôt celle du centre de percussion à Descartes et à Huygens, s'était adressé à Honoré Fabry, alors à Lyon, et les propositions sur ce sujet de ce dernier qu'il appelle „un géant en science" lui étaient déjà connues avant l'apparition du livre de Mousnier[6]). Naturellement il désirait que Chr. Huygens fît connaissance avec ce livre. C'est de lui — et du livre antérieur de Fabry sur la philosophie[7]) — qu'il parle dans sa lettre à Const. Huygens du 3 janvier 1647 (T. I, p. 48); et non pas des œuvres de Noel, comme le suppose la note 9 à la page citée. Le volume de Mousnier contient en effet „10 Livres" et „un traité particulier des centres de percussion à la fin"; Mersenne dit qu'il „brusle d'enuie que Mr. vostre fils le voye ce

---

annotée par C. de Waard, dont le T. I a paru en 1933 chez G. Beauchesne à Paris, il s'agit en réalité de Charles Cavendish. C'était, d'après l'article cité dans la note 6, un gentilhomme anglais résidant à Paris.

3) T. VI, p. 198. Dans le début de la Pars Quarta de l'„Hor. osc." Huygens dit connaître les lettres de Descartes sur ce sujet, publiées „haud pridem".

4) Lugduni, apud Ioannem Champion, in foro Cambij.

5) T. V, p. 127.

6) Mersenne nous apprend aussi que P. Mousnier était „un de ses escoliers [escoliers de Fabry], docteur en médecine à Lion". Ce renseignement et celui du texte sont empruntés à l'article „Une lettre inédite de Mersenne à Descartes", publiée par C. de Waard dans le Vol. XIII de 1931 de la Revue „Archeion, Archivio di Storia della Scienza, Organe officiel du Comité international d'Histoire des Sciences et de la Section d'Histoire des Sciences du Centre international de Synthèse", Casa editrice L. da Vinci, Rome, et Paris 2e, 12 rue Colbert. Nous avons dit aux p. 351—352 du T. XVI que les premières expériences de Mersenne sur le centre de percussion datent du commencement de 1646 au plus tard. C. de Waard (article cité, p. 175) observe qu'à son avis Mersenne s'occupait d'expériences de ce genre depuis le printemps de 1643.

À la p. 435 de son livre de 1646, après avoir traité du centre de percussion, Mousnier parle de „innumeris ferè experimentis, tùm ab erudito Mersenno, tùm a nostro Philosopho [Fabry]" qui prouvent „longitudinem funependuli isochroni cum cylindro continere $\frac{2}{3}$ cylindri".

7) „Philosophia Universa per propositiones digesta et in breve compendium redacta", Lugduni 1646.

traité et qu'il l'examine, peut eſtre que l'enuie luy en prendra a luy meſme de le mieux demonſtrer, ou du moins il pourra le faire voir a Mr. des Cartes, qui y a deſia trauaillé". Commençons par remarquer que, vu les dates, il ſemble qu'il faille admettre, et la dernière phraſe citée de Merſenne l'indique également, que Fabry s'eſt occupé de la queſtion indépendamment de Deſcartes (Mouſnier ne fait mention ni de lui ni de Roberval). P. Duhem dit certainement à tort [1]: „Par l'intermédiaire du livre compoſé par l'abbé de Guaſtalla [c.à.d. B. Baldi; comparez la note 2 de la p. 350 du T. XVI] certaines idées de Léonard [2]) feront communiquées à Deſcartes et à Roberval; elles provoqueront entre ces deux grands géomètres un débat qui ne ſera pas exempt d'aigreur; portés par Merſenne, par le P. Fabry, par Pierre Mouſnier à la connaiſſance du jeune Chr. Huygens, les affirmations contradictoires de Roberval et de Deſcartes ſuggéreront à ce phyſicien de génie la théorie du pendule compoſé; etc." Au contraire Huygens ſemble n'avoir appris avant 1665, ou déc. 1664 [3]), ſur les recherches de Deſcartes et de Roberval (que nous jugeons quelque peu poſtérieures à celles de Fabry, quoiqu'indépendantes des ſiennes) que ce que Merſenne lui en écrivit.

Il eſt vrai qu'il a connu Roberval perſonnellement en 1655 (T. I, p. 370), et qu'en cette année et la ſuivante il a été en correſpondance avec lui; mais dans ces lettres il n'eſt pas queſtion du centre d'agitation. D'après le Journal de Voyage il viſita Roberval à Paris le 13 décembre 1660; ſa lettre à Thévenot du 29 janvier 1665 (T. V, p. 209) fait voir qu'alors auſſi il n'a pas fait connaiſſance avec les recherches de Roberval ſur le ſujet en queſtion. Quant à Deſcartes, Huygens ne fait nulle part mention d'aucun entretien avec lui; ce n'eſt que peu avant le 29 janvier 1665, paraît-il [3]), qu'il reçut de Thévenot (lettre citée) des nouvelles ſur les recherches de Deſcartes. Après l'apparition du livre de Mouſnier Deſcartes ne ſemble plus s'être occupé de ce ſujet.

Dans ſa lettre citée Merſenne annonce qu'il enverra le livre nommé ou en tout

---

[1]) P. Duhem „Etudes sur Léonard da Vinci, ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu" I, p. 108, Paris, 1906.

[2]) Dans son ouvrage de 1582 „In mechanica Aristotelis problemata exercitationes" Baldi cite divers ouvrages (e. a. la Mécanique de Guido Ubaldi de 1577), mais il ne fait aucune mention des manuscrits de L. da Vinci. C'est une hypothèse de Duhem que L. da Vinci a exercé une grande influence sur Baldi. Il dit (même ouvrage, p. 155) que „Baldi . . . avait emprunté à Léonard da Vinci la notion de gravité accidentelle; et cette notion s'était présentée à l'esprit de Léonard comme une suite naturelle de la théorie de l'impetus, développée par les physiciens du XIVe siècle". Chez Mousnier, c.à.d. chez Fabry, la théorie de l'„impetus" joue un grand rôle; la conclusion de Duhem: „Non plus que la Nature, la Science ne fait point de saut brusque" nous semble fort bonne; mais tout pourrait s'expliquer aussi sans les manuscrits de da Vinci.

cas „les 2 ou 3 feuillets où ſont les centres de percuſſion [4])". Or, nous avons pu établir qu'il a tenu ſa promeſſe. En effet, comme aucune bibliothèque publique en Néerlande ne poſſède l'œuvre de Mouſnier, nous avons demandé l'exemplaire de la Bibliothèque de l'Univerſité de Göttingue et il s'eſt trouvé que celui-ci porte ſur la première page l'inſcription: „Conſtanter 1647. don. Mar. Merſenni". L'„Appendix Prima phyſicomathematica, De Centro percuſſionis [4])" a été lu par Chr. Huygens puiſqu'on y trouve en marge quelques obſervations de ſa main [5]). Ces notes marginales datent ſans doute de 1664: on y trouve e. a. (p. 437) la multiplication de $b + \frac{\frac{1}{3}zz}{b}$ par $\frac{3}{4}$ que nous avons ſignalée dans la note 1 de la p. 456 du T. XVI. Il eſt queſtion chez Mouſnier (p. 436—437) de la „rationem egregij experimenti, quod ſæpè Doctus Merſennus propoſuit, ſcilicet longitudinem ſunependuli iſochroni eſſe ferè quadruplam perpendicularis ductæ in baſim trianguli Iſoſcelis, librati circa angulum verticis 150. grad."; c.à.d. ſi l'on fait oſciller dans ſon plan un triangle iſoſcèle ſuſpendu au ſommet et dont l'angle au ſommet eſt de 150°, la longueur du pendule ſimple iſochrone ſera environ le quadruple de la hauteur du triangle. Après avoir établi par la multiplication ſuſdite la longueur du pendule ſimple iſochrone pour le cas d'un triangle iſoſcèle de hauteur b et de baſe $2z$, Huygens poſe donc

$$4b \infty \tfrac{3}{4}b + \tfrac{1}{4}\frac{zz}{b},$$

d'où il tire

$$\sqrt{13bb} \infty z.$$

Cette équation conduit pour l'angle au ſommet à 148°59′50″, ce qui eſt en effet à peu près 150°. À l'endroit cité Huygens n'exécute pas le calcul de l'angle. Il tire correctement la racine carrée de 13 et écrit à côté des mots „angulum verticis 150. grad.": „[de]bebat eſſe [. . .] 0°48′ proximè". Il n'eſt pas bien clair ce qu'il a écrit [5]). Dans le calcul de la valeur de l'angle il ſemble avoir commis une erreur, mais ſa formule eſt correcte.

Les autres notes marginales de Huygens ſont les ſuivantes: 1) À la p. 430, où

---

[3]) Il est vrai que nous ignorons la date de la lettre de Thévenot auquel celle de Huygens sert de réponse; mais Huygens ne peut avoir reçu cette lettre avant le 27 novembre 1664 (voir la p. 152 du T. V). En mai 1665 (T. V, p. 355) il espérait que Thévenot lui enverrait un „traité de Roberval des pendules Isochrones" outre ce que Thévenot lui avait déjà mandé sur les résultats de Roberval.

[4]) Chez Mousnier ce sujet occupe 18 pages (p. 420—437). Comparez le début de la lettre de Mersenne du 12 janvier (T. I, p. 59).

[5]) Le livre a été relié plus tard de sorte que les mots écrits en marge sont parfois tronqués.

Mouſnier énonce et croit prouver ſon „Theorema 22. Si voluatur circulus circa punctum circumferentiæ in circulo parallelo ſuo plano, determinari poteſt centrum percuſſionis, quod diſtat $\frac{2}{3}$ diametri à centro motus", Huygens obſerve: „[Im]o [1]) $\frac{3}{4}$ diametri". Il s'agit de l'oſcillation du cercle dans ſon plan ſur laquelle on peut comparer le premier alinéa de la p. 455 du T. XVI.

2) À la p. 431, où Mouſnier dit par inadvertance „Theorema 24. Poteſt determinari centrum percuſſionis ſolidi trium facierum ABDE", Huygens écrit: „mirabile ſolidum, nam tribus pla[nis] ſolidam figuram conſtitui nega[nt] geometræ. Sed auctor qua[rtum] planum non ani[mad]vertit, eſt enim ABDE pyrami[s]".

3) À la p. 426, où Mouſnier cherche (ſans pouvoir achever le calcul) le centre de percuſſion d'un ſecteur de cercle ſuſpendu au centre du cercle et tournant perpendiculairement à ſon plan [2]) et parle e.a. d'un „ſolidum AEFDCB, quod ſcilicet conſtat ex pyramide AEDCB, & ſegmento cylindri EFDCB", Huygens annote: „et præterea ex cuneo ſuper baſi EDF quem autor oblitus eſt" [3]).

À la p. 421 Mouſnier écrit à propos du centre de percuſſion: „Centrum percuſſionis eſt punctum illud corporis impacti in quo ſi contactus fiat, maximus ictus infligitur" [4]), et: „Centrum percuſſionis eſt in illa linea, quæ dirimit utrimque momenta, tùm ratione impetus, tùm ratione diſtantiæ", ce qui veut dire que, lorſqu'on tire par ce centre une droite parallèle à l'axe de rotation conſidéré [5]), les moments des „impetus", c.à.d. la ſomme (ou intégrale) des moments de tous les „impetus" partiels

[1]) Une partie de la lettre m a été conservée.

[2]) Huygens chercha, toujours en 1664, le centre d'oscillation du secteur ainsi suspendu: voir les p. 487—489 du T. XVI. Le „Theorema 13" aux p. 425—426 de Mousnier est ainsi conçu: „Si voluatur sector circa axem parallelum subtensæ, determinari potest centrum percussionis, dato centro grauitatis sectoris, quod tantum hactenus inuentum est ex supposita circuli quadratura".

[3]) Il n'est pas nécessaire d'admettre ici une erreur de Mousnier. Huygens entend apparemment par „segmentum cylindri" un segment d'un cylindre droit terminé par deux plans parallèles, mais il semble également permis de se servir de cette expression lorsqu'un des deux plans est oblique, auquel cas le „cuneus" dont parle Huygens fait partie du „segmentum cylindri" de Mousnier.

[4]) Lorsqu'il s'agit d'une figure oscillant dans son plan et que le centre de percussion se trouve p.e. au point X de son axe de symétrie, Mousnier observe (p. 431) que pour qu'il puisse être question d'une percussion en ce point „incidendam esse striam quandam, seu rimam, quæ terminetur in X".

[5]) On peut également considérer la percussion produite par un corps se mouvant parallèlement à lui-même sans aucune rotation.

eſt égale de part et d'autre de cette droite[6]). Ici il eſt apparemment queſtion d'un corps conſtitué par une ſurface plane. Ajoutons que Mouſnier ne conſidère que les corps homogènes. Quant à l' „impetus" du mouvement, il eſt proportionnel à la viteſſe linéaire (Th. 6 de la p. 423) et à la grandeur de l'élément conſidéré du corps. C'eſt, peut-on dire, la quantité de mouvement mv. Pour évaluer l'intégrale des quantités de mouvement de la ſurface en „mouvement ſolide" (voir ſur ce terme la p. 376 du T. XVI) Mouſnier repréſente les viteſſes de tous les points par des normales à la ſurface. Il obtient ainſi un „ſolidum" qui n'eſt autre que le „cuneus" (ou le „truncus") conſidéré par Huygens dans le cas du mouvement ſolide. Nous avons dit dans la note 2 de la p. 458 du T. XVI que Huygens (cherchant le centre d'oſcillation) paſſe par le raiſonnement conſidéré en cet endroit de la „méthode de la parabole" à la „méthode de l'onglet (ou cuneus)". Nous pouvons ajouter maintenant que puisque Huygens admettait avec Merſenne et Mouſnier l'identité du centre d'oſcillation avec le centre de percuſſion, ce qui reſſort des notes marginales que nous venons de citer, il avait l'avantage de ſavoir que ce ſerait probablement la ſubcentrique de l'onglet (ou du tronc, voir la note 5 de la p. 459 du T. XVI) qui lui donnerait la longueur du pendule iſochrone avec la ſurface en mouvement ſolide. Il a donc certainement profité de la lecture du livre de Fabry.

En ſomme, dans le livre de Fabry, ou de Mouſnier, la détermination du centre de percuſſion eſt correcte pour les ſurfaces planes en mouvement ſolide. C'eſt ce que Huygens reconnaît en diſant dans la Prop. XXI de la Pars Quarta de l'„Hor. oſc.": „Quod unum [ſavoir: la poſition du centre d'oſcillation dans le cas du mouvement nommé] ab aliis ante animadverſum fuit, non tamen demonſtratum".

Non pas démontré: en effet, même ſi le raiſonnement de Mouſnier, qui conduit à fixer l'endroit du centre de percuſſion dans ce cas eſt conſidéré comme ſuffiſant, celui par lequel il tâche d'établir l'identité des deux centres ne l'eſt certainement pas[7]).

---

[6]) Ceci est vrai, mais on peut douter si l'auteur a prouvé que c'est bien ainsi que „maximus ictus infligitur". Il dit que c'est en frappant ainsi que „totus impetus corporis impacti impediatur" (p. 421).

[7]) Nous avons dit (T. XVI, p. 351) que pour Mersenne cette identité était un fait d'expérience. Mousnier (Theor. 30, p. 435) raisonne comme suit: „Si linea rigida libretur circa alteram extremitatem immobilem assumaturque funependulum, cuius longitudo contineat $\frac{2}{3}$ prædictæ lineæ, vibrationes utriusque erunt æquediuturnæ; quod demonstratur; quia centrum percussionis prædictæ lineæ distat $\frac{2}{3}$ ab altera extremitate immobili per Th. 8. atqui centrum percussionis in hoc motu circulari dirigit motum aliorum punctorum; quia defungitur munere centri graui-

Il convient d'ajouter que dans l'„Hor. osc." Huygens ne parle point du centre de percussion et qu'il n'apparaît pas d'où résulte sa conviction, apparemment déjà générale en 1664, de l'identité des deux centres [1]). Par sa démonstration même des p. 457—460 du T. XVI l'identité du centre d'oscillation avec le centre de percussion tel que celui-ci avait été défini par Fabry par la considération des moments des „impetus" était prouvée pour les surfaces planes en mouvement solide. Mais sa note marginale à la p. 430 de Mousnier fait voir qu'il admet aussi l'identité des deux centres pour le cas d'une surface oscillant dans son plan.

Comme on peut le voir par cette note marginale, les considérations de Mousnier sur le centre de percussion dans le cas des surfaces oscillant dans leur plan — et il en est de même dans le cas des corps — ne conduisent pas à la connaissance de la position du centre d'oscillation dans ces cas.

Nous avons mentionné à la p. 375 du T. XVI le principe de Brouncker pour le cas des surfaces planes en mouvement solide. Ce principe s'accorde parfaitement avec la méthode de construction de Fabry; mais Brouncker (p. 144 du T. V) parle seulement du centre d'oscillation et ne donne aucune preuve. Wallis en 1671 [1]) parle dans le même cas du centre de percussion qu'il trouve en se servant d'une considération identique avec celle de Fabry sur les moments des quantités de mouvement.

Nous avons parlé de la mesure universelle de la longueur au moyen des pendules aux p. 353—356 du T. XVI et 120—121 du T. XVII. Malgré le texte de la p. 120 nommé, il semble — voir la lettre de 1668 de Huygens à Estienne (T. VI, p. 260) citée dans la note 8 de la p. 121 nommée — que l'idée d'établir à l'aide de pendules une mesure universelle ait été promulguée en Angleterre indépendamment de Huy-

---

tatis, ut patet ex dictis; nec enim alterum segmentorum præualet; sed totus motus impeditur; per pos. 2 [p. 421: Si percussio ita fiat, ut totus impetus corporis impacti impediatur maxima est] igitur perinde se habet atque si totum pondus, vel totam vim collectam haberet; sed in hoc casu esset ad instar funependuli, in quo non habetur vlla ratio fili, sed ponderis appensi; igitur eius vibratio est æquediuturna cum vibratione prædicti funependuli quod erat demonstrandum". Il parle ensuite des „innumera experimenta" de Mersenne et de Fabry déjà mentionnés plus haut. Dans d'autres cas l'auteur dit: „probatur eodem modo".

[1]) Comparez la note 6 de la p. 353 du T. XVI. Ajoutons que dans la lettre de juillet 1690 citée en cet endroit Huygens eût pu faire mention, non seulement de Wallis, de Mariotte et de Deschales, mais aussi et surtout de Fabry.

Le „centrum virium" de Wallis (note 2 de la p. 461 du T. IX) est défini de la même manière que le „centrum percussionis" de Fabry.

gens et avant lui. Il eſt vrai que cette idée ne pouvait ſembler abſolument pratique que depuis le moment où la formule qui donne la place exacte du centre d'oſcillation avait été établie.

Toutefois G. Mouton (comparez la p. 36 qui précède), connaiſſant la marche exacte des horloges de Huygens [1]), ſe montre déjà en 1670 un avocat convaincu de cette idée qu'il développe dans la dernière partie (p. 427—448) de ſon livre. Il y propoſe un ſyſtème décimal de longueurs, l'unité étant empruntée à la dimenſion du globe terreſtre: il veut que le „Milliare Geometricum in uno gradu circuli terræ maximi ſexagies exactè continetur". La millième partie du „milliare" eſt nommée „virga" et la dix-millième partie „virgula", la longueur approximative de cette dernière étant donnée par une ligne de 20,2 cm. Il conſtate qu'un pendule ſimple de cette longueur exécuterait 3959,2 oſcillations ſimples en une demi-heure, valeur moyenne calculée d'après les nombres obſervés des oſcillations de différents pendules pouvant être conſidérés comme ſimples, l'un deux ayant p.e. un globe de plomb et une verge formée d'un fil de fer fort mince, un autre étant formé par un globe de fer ſuſpendu à un cheveu, etc. La longueur de chacun de ces pendules (comparez la p. 355 du T. XVI) eſt pour Mouton la diſtance du point de ſuſpenſion au centre du globe.

C. *Horloges à pendule oſcillant dans un plan antérieures à celles de Huygens.* Le paſſage bien connu de la Préface (p. 91 qui ſuit), où Huygens avance qu'il eſt fort peu croyable que des horloges à pendule aient été achevées et employées avant celles conſtruites à la Haye depuis 1657, nous oblige de revenir brièvement ſur ce ſujet, ſur lequel on peut conſulter auſſi les p. 36—39 du T. XVII. Nous ne diſcuterons pas la queſtion de l'horloge à pendule qui aurait exiſté depuis 1615 ou 1616 à Angoulême chez de Boismorand [2]), vu que de Carcavy, qui n'avait pas vu cette

[1]) Il parle des horloges de Huygens dans le Cap. III intitulé „De horologiis accuratissimis, et ad numerandas Perpendiculorum vibrationes aptissimis" à la p. 433 de son ouvrage: „Observationes Diametrorum Solis et Lunæ apparentium, Meridianarumque aliquot altitudinum Solis & paucarum fixarum. Cum tabulâ declinationum Solis constructa ad singula graduum Eclipticæ scrupula prima. Pro cujus, et aliarum tabularum constructione seu perfectione, quædam numerorum proprietates non inutiliter deteguntur. Huic adjecta est Brevis Dissertatio de dierum naturalium inæqualitate; & de temporis æquatione. Una cum nova mensurarum geometricarum idea: Novâque methodo eas communicandi, & conservandi in posterùm absque alteratione" (Lugduni, Matth. Liberal, MDCLXX). Mouton ajoute que les horloges vulgaires à balancier „nullo modo huic negotio apta sunt, propter multiplicem illorum anomaliam, & inconstantiam vibrationum": comparez le premier alinéa de la p. 28 du T. XVII.

[2]) Voir les lettres de P. Carcavy de septembre 1659 (T. II, p. 535) et de mars 1660 (T. III, p. 38).

horloge lui-même et que Huygens a connu perſonnellement à Paris, paraît ne pas être revenu ſur ce ſujet dont Huygens ne dit rien dans l'„Hor. oſc." [1]). Les croquis de Leonardo da Vinci [2]) que Huygens n'a pas connus ſont voir, comme nous l'avons dit, qu'il avait été queſtion depuis longtemps de balanciers en forme de pendule, lesquels ne paraiſſent pas cependant — et c'eſt là un point d'une importance capitale — avoir dû ſervir à *contrôler* la marche de l'horloge par un mouvement oſcillatoire plus ou moins indépendant (comparez la note 5 qui ſuit). Cette remarque s'applique auſſi à l'horloge à pendule d'un certain Camerini portant la date 1656 (N. B.) qui eſt repréſentée à la p. 139 de „The Evolution of Clockwork, etc." de Monſ. J. Drummond Robertſon [3]). Un pendule de forme primitive s'y meut devant le cadran. Des horloges de ce genre, dont l'hiſtoire eſt fort peu connue [4]), ne pouvaient évidemment être des inſtruments de préciſion.

On ſemble être d'accord pour conſidérer comme trompeur le paſſage des Saggi de 1667 de l'Accademia del Cimento où l'horloge de 1649 de Vincenzio Galilei eſt mentionnée dans des termes qui portent le lecteur à croire (quoique cela ne ſoit pas dit *expreſſis verbis*) que cette horloge a marché et a pu, telle qu'elle était, ſervir de modèle pour la conſtruction d'autres horloges exactes [5]).

Quant à cette horloge de Vincenzio Galilei ou „horologe a pendule commencee par Galilei", pour nous ſervir des termes de Boulliau [6]), il eſt certain qu'elle n'était point achevée, puiſque Viviani dans ſa lettre du 20 août 1659 au grand-duc Leopoldo

---

[1]) Nous avons parlé des horloges de Jost Burgi dans la note 4 de la p. 6 du T. XVII.

[2]) T. XVII, p. 38.

[3]) Voir sur cet ouvrage la p. 546 du T. XVII.

[4]) Comparez la note 2 de la p. 47 de la „Geschichte der Räderuhren" de 1905 de E. Bassermann-Jordan.

[5]) „Saggi di Natvrali Esperienze fatte nell' Accademia del Cimento sotto la Protezione del Serenissimo Principe Leopoldo di Toscane" (Firenze, G. Cocchini, MDCLXVII), p. XXII: „... fu stimato bene applicare il Pendolo all' oriuolo, su l'andar di quello, che prima d'ogni altro immaginò il Galileo, e che dell' anno 1649 messe in pratica Vincenzio Galilei suo figliuolo. Così, è necessitato il Pendolo dalla forza della molla, o del peso a cader sempre dalla medesima altezza; onde con iscambieuol benefizio non solamente vengono a perfettamente vguagliarsi i tempi delle vibrazioni, ma eziandio a correggersi in certo modo i difetti degli altri 'ngegni di esso oriuolo". Ce passage, sans être entâché, croyons-nous, d'inexactitude dans le sens strict du mot, tend, grâce à une rédaction habile, à faire attribuer à Galilée et son fils des vues théoriques qui étaient dues à Huygens: voir la p. 66 et suiv. du T. XVII („Horologium" de 1658). Huygens dit à bon droit (T. VII, p. 280) que l'auteur (L. Magalotti) „nostros conatus dissimulat".

de Medici[7]) dit e.a. que Vincenzio était occupé peu avant ſa mort à „intagliar l'altra ruota dentata". La figure de la p. 656 du T. XIX de l'Ed. Naz. montre clairement que la moitié de la grande roue ſeulement eſt pourvue de dents. Cette figure repréſente ſans aucun doute un inſtrument réel puiſqu'il en exiſte une deuxième figure où il eſt vu ſous un autre angle[6]). Mais quoique l'horloge ne fût pas achevée, l'auteur avait apparemment déjà éprouvé, en y attachant un poids moteur, le mécaniſme de l'échappement à double virgule qu'on y voit. En effet, Viviani dit: „volle il Sig.r Vincenzio che io . . vedeſſi così per prova e più d'una volta, come pur vedde ancora il ſuddetto arteſice [Dom. Baleſtri], la congiunta operazione del contrapeſo e del pendolo". J. B. Biot qui en 1858 prend le parti de Huygens[8]) commet une étrange erreur (entièrement ſans conſéquence chez lui) en diſant (p. 677) que Vincenzio G. a conſacré „tout au plus deux mois et demi à ce travail". En effet, il vient de dire, en citant la lettre de Viviani, que Vincenzio commença ſon travail en avril 1649 et qu'il mourut le 16 mai ſuivant. A-t-il voulu écrire: un mois et demi? Ce ſerait encore beaucoup trop, puiſque Viviani dit que Vincenzio mourut „nel giorno XXII del ſuo male". Suivant Viviani, il tomba donc malade le 25 avril. Par conſéquent vingt-cinq jours au plus ont été conſacrés à la conſtruction de l'horloge ſi le récit de Viviani, comme nous l'admettons ici, eſt abſolument conforme à la vérité[9]). Monſ. Drummond Robertſon — à qui nous avons de grandes obligations; voir les p. 38 et 546 du T. XVII — fait mention ſans critique (p. 96) des „at the moſt two and a half months" de Biot. Il eſt d'avis qu'en ce temps Vincenzio a pu conſtruire plus d'une horloge. Mais comme tailler les roues était pour lui une „inſolita fatica", il paraît peu probable qu'en vingt-cinq jours tout au plus il ait pu conſtruire autre choſe que le modèle inachevé dont d'ailleurs il eſt ſeul queſtion chez Viviani. Il eſt vrai que Viviani ajoute: „*ſtimava* [nous ſoulignons] di potere in diverſa forma e con altre invenzioni adattare il pendolo all' oriuuolo", et que l'inventaire de ſa veuve, morte en 1668, mentionne „Un Oriuolo non finito di ferro col Pendolo, prima invenzione del

---

6) T. III, p. 8. On trouve là la figure qui fut envoyée a Boulliau.

7) T. III, p. 470 et p. 6 du Vol. XIX des „Opere di Galileo", Ed. Naz.

8) Dans son article „Dell' orologio à pendolo di Galileo Galilei, dissertation de M. Eugenio Albèri" dans le n° de novembre 1858 du Journal des Savants (Paris, Imprimerie impériale).

9) Nous ne parlons pas ici des variantes que présentent les deux exemplaires de la lettre conservés à Florence et à Paris; voir sur ce sujet les p. 470—484 du T. III et 283—284 du T. VII, ainsi que la p. 647 du T. XIX de l'Ed. Naz.

Galileo". [1]) La queſtion de ſavoir ſi Vincenzio G. a conſtruit un ou pluſieurs oriuoli ſerait importante ſi l'on voulait ſoutenir qu'il a trouvé le temps de fabriquer, outre de groſſiers modèles, une horloge à pendule exacte et marchant bien, ce que nous ne pouvons nullement admettre [2]).

D'ailleurs, l'„Oriuolo non finito" de l'inventaire de la veuve n'eſt-elle pas préciſément le modèle unique dont parle Viviani? Albéri le penſait [1]), Biot de même, et cette hypothèſe peut paraître au premier abord preſque certaine. Elle ne l'eſt pourtant pas, car, nous l'avons dit à la p. 472 du T. III, „dès 1659 un modèle, attribué à Galilei, était en poſſeſſion du Prince Léopold" et c'eſt de ce modèle qu'il envoya la figure à Boulliau [3]). Or, cette figure s'accorde avec celle du T. XIX de l'Ed. Naz. comme nous l'avons dit à la p. 61. D'autre part la figure du T. XIX s'accorde parfaitement avec la deſcription détaillée qui ſe trouve dans la lettre de Viviani. Quoiqu'à Florence cette figure n'ait pas été trouvée *dans* la lettre [4]) il paraît donc à peu près certain, comme on l'admet généralement, que c'eſt bien là la figure du modèle dont Viviani parle. S'il en eſt ainſi, ce modèle-là était donc en 1659 en poſſeſſion de

---

[1]) Mentionné par Alberi à la p. 340 du Suppl. au T. XIV de son édition des Oeuvres de Galilée (voir la p. 38 du T. XVII et la p. 472 du T. III).

[2]) Mons. Drummond Robertson fait parler Viviani comme suit: „But, whilst engaged in this unwonted task, he [Vincenzio] was overtaken by a most acute attack of fever, and was obliged to leave it unfinished; and on the twenty-first day of his illness, that is, on May 16, 1649, all the most accurate clocks, together with *this most exact time-measurer*, were by him destroyed (si guastarono) and stopped for ever; whilst he (as it pleases me to believe) passed on, to measure, in the enjoyment of the Divine Essence, the moments of Eternity, that pass all understanding". Il ajoute: „Was it not in a moment of delirium that Vincenzio was drawn to this act of destruction?"

On peut consulter le texte italien de Viviani aux p. 482—483 du T. III. Nous le traduisons comme suit: „le 22ième jour de sa maladie, c.à.d. le 16 mai 1649, toutes les horloges plus justes, de même que ce très exact mesureur du temps, perdirent leur valeur pour lui et s'arrêtèrent pour lui à tout jamais au moment où il passa (comme j'aime à le croire) à mesurer, dans la jouissance de l'essence divine, les moments, incompréhensibles pour nous, de l'éternité". Il n'y est donc, pensons-nous, question d'aucun délire ni d'aucune destruction d'instruments. „Ce très exact mesureur du temps" ne peut désigner grammaticalement que l'horloge inachevée, puisqu'il vient d'être question de cette horloge-là. Nous ne croyons donc ni à la construction ni à la destruction par Vincenzio G. d'une horloge à pendule achevée et véritablement exacte.

[3]) Voir ses lettres de mars et d'août 1659 aux p. 462 et 468 du T. III.

[4]) Voir la p. 677 de l'article de Biot (note 8 de la p. 61) ou la p. 90 du livre de Mons. Drummond Robertson.

Leopoldo. On peut trouver étrange qu'il l'attribue à Galilée père (T. III, p. 468), mais ceci pourrait s'expliquer par le fait que la lettre à Boulliau où il ſemble le dire eſt du 21 août 1659, tandis que la lettre de Viviani adreſſée à lui eſt du 20 août (T. III, p. 470); en écrivant à Boulliau il venait donc de recevoir cette dernière dont les premières lignes parlent du „maraviglioſo miſurator del tempo col pendolo di Galileo Galilei": il a donc pu penſer en ce moment que l'inſtrument en queſtion provenait ſuivant Viviani de Galilée père. D'ailleurs dans ſa lettre d'août il n'en attribue en ſomme que l'*invention* à Galilée, et les mots „è fabricato il modello del [et non pas: dal] medeſimo" ne diſent pas nettement que la *conſtruction* aurait eu lieu par Galilée lui même [5]). Il n'y a donc là aucune difficulté. Et il n'eſt pas déraiſonnable de ſuppoſer qu'il ait reſtitué le modèle à la veuve, de qui il doit l'avoir reçu. Quoi qu'il en ſoit, ce point n'eſt pas de grande importance: ſi Vincenzio G. a trouvé le temps en avril 1649 de conſtruire un deuxième modèle imparfait, à plus forte raiſon n'a-t-il pas eu celui de conſtruire une horloge achevée.

Viviani dit enſuite que Philippe Treffler conſtruiſit pour le Prince Leopoldo un compteur à roues très légères. La note 53 de la p. 483 du T. III dit que ce mécanicien s'établit à Florence en 1658, mais nous ignorons l'origine de cette date apparemment inexacte: Monſ. Drummond Robertſon cite à la p. 102 de ſon livre une pièce qui prouve que Treffler était déjà en 1656 horloger de ſon Alteſſe. Ce compteur fut, paraît-il, conſtruit en ou vers 1655, puiſque Viviani ajoute qu'en ce temps, ſavoir 14 ans après le moment où Galilée propoſa d'appliquer le pendule aux horloges, Fr. Generini conſtruiſit pour le Prince un modèle de fer dans lequel „era unito al pendolo il contrappeſo". Il dit enfin „che Filippo ſoprannominato adattò la 'nvenzione ad un oriuuolo da camera per Sua Altezza etc."; malheureuſemment il ne dit pas — ce qui eſt le point important dans la queſtion de priorité — ſi cette conſtruction d'horloges à pendule par Treffler — les premières horloges de ce genre conſtruites à Florence qui aient marché — eut lieu avant ou après que le Grand-duc Ferdinando, frère de Leopoldo, eut reçu en 1657 l'horloge de Coſter, dont il eſt

---

[5]) En mars 1659 (T. III, p. 462) Leopoldo parlait d'„un modello fatto dal medesimo Signore Galileo", et il semble bien qu'il parle du même modèle. En ce moment il n'était nullement au courant de la marche exacte des événements puisqu'il s'imaginait que Galilée avait construit une horloge à pendule et à poids moteur pour les Etats de Hollande. C'est précisément parce qu'il ne se sentait pas au courant qu'il demanda à Viviani d'écrire une relation exacte.

queſtion dans la première note de la p. 38 du T. XVII et que Viviani ſemble ne pas avoir connue. D'après Leopoldo écrivant en mai 1659 (T. III, p. 464) ce fut *pour Ferdinando* que le „virtuoſo" [Treffler?] conſtruiſit „tre anni ſono" un „oriuuolo rozzamente fatto". C'eſt de cette horloge qu'il eſt auſſi queſtion dans la lettre de Leopoldo de mars 1659 (T. III, p. 462); on y trouve également l'expreſſion „tre anni ſono". Si cette expreſſion eſt littéralement exacte, le „virtuoſo" avait conſtruit en 1656 pour Ferdinando une horloge à pendule „rozzamente fatto", mais qui pouvait marcher. On nous permettra d'ajouter que lors même que cette conſtruction n'aurait eu lieu que dans la deuxième moitié de 1657, après que Ferdinando eut reçu l'horloge de Coſter, elle aurait cependant été antérieure d'un an à la publication de ſeptembre 1658 de l'„Horologium" de Huygens et aurait pu paſſer pour ceux qui la voyaient ſans connaître celle de Coſter pour une invention originale faite à Florence. Obſervons encore qu'il n'y a aucune raiſon pour admettre que les horloges de Treffler aient été pourvues de l'échappement à deux virgules du modèle de Vincenzio, puiſque Viviani dit que le modèle de Generini dont Treffler s'inſpira [1]) était „con diverſa e molto ingegnoſa applicazione". Leopoldo dit en mai 1659 (T. III, p. 464), après avoir vu la figure de l'„Horologium" de 1658 de Huygens, que le „virtuoſo tre anni ſono ne inventò *un ſimile* [nous ſoulignons] [2])". Il ne faut ſans doute pas attacher trop d'importance à ce mot. Mais alors, pourquoi attribuer une valeur abſolue à l'expreſſion „tre anni ſono"?

D'ailleurs il n'eſt pas abſolument impoſſible qu'en diſant „tre anni ſono" Leopoldo entende parler de 1657, puiſque 1657, 1658 et 1659 ſont trois années; de même que Huygens dit au début de l'Hor. oſc.": „Annus agitur ſextus decimus . . ." quoique l'intervalle entre la publication de l'„Horologium" (ſept. 1658) et celle de l'„Hor. oſc." (avril 1673) ne ſoit que de quatorze ans et demi. Viviani (voir la p. 441 qui ſuit) écrit en 1674 que l'„Hor. oſc." a paru „due anni ſono".

Il mérite en outre d'être remarqué que Leopoldo dans la lettre d'août 1659 (T. III, p. 468) dit qu'on a envoyé de Florence au Roi de Pologne, qui ne croyait pas que „mio Signore e fratello haveſſe appreſſo di ſe tale invenzione" une horloge à pendule *fabriquée en Hollande*, ſans doute de Coſter ou d'un de ſes collaborateurs [3]).

---

[1]) L'horloge achevée de Generini fabriquée „alcuni anni sono" dont Leopoldo parle en août 1659 (T. III, p. 468) était apparemment autre chose.

[2]) D'après Leopoldo (l. c.) le „simile" et l'„Oriuuolo rozzamente fatto" étaient deux objets différents.

Somme toute, il ſemble impoſſible d'arriver à une concluſion certaine [4]).

D'ailleurs, cette queſtion de priorité n'eſt pas énormément importante. Ce qui paraît certain, c'eſt que, ſi une véritable horloge à pendule a été conſtruite avant juin 1657 par un horloger travaillant pour l'un ou l'autre Grand-duc, Huygens ne le ſavait point et qu'en Italie même on l'ignorait généralement [5]); comparez le premier alinéa de la note 5 de la p. 37 du T. XVII [6]).

D'autre part, il eſt abſolument poſſible, comme le dit Viviani, que Galilée, frappé de cécité, ait eu peu avant ſa mort l'idée d'adapter le pendule aux horloges; l'affirmation contraire de la note 2 de p. 281 du T. VII ne fait aucune impreſſion ſur nous. Ce qui reſte évidemment douteux c'eſt — comme le dit auſſi Biot — ſi l'échappement à double virgule, que nous avons déſigné à la p. 39 du T. XVII par l'expreſſion „échappement de Galilée", comme on en a l'habitude, a réellement été conçu par lui. Quant à la remarque pathétique de la note 3 de la p. 281 du T. VII ſur la diſparition du modèle de Vincenzio „qui aurait dû être d'un prix ineſtimable aux yeux du Prince Léopold", nous n'y attachons aucune valeur, auſſi peu qu'à la concluſion de la même note (p. 282) que „Viviani s'eſt laiſſé égarer lorſqu'il affirme avoir vu marcher la machine". Sans doute, le modèle de 1649 ne marchait pas, mais Viviani ſe contente de dire qu'il l'a vu fonctionner „per prova", un poids moteur y ayant été attaché. On ne peut raiſonnablement parler (T. VII, p. 286) de „l'impoſſibilité de la marche de l'inſtrument", ce que Huygens lui-même (voir ſa lettre de janvier 1660 à la p. 12 du T. III) ne fait point [7]).

Nous avons dit à la p. 39 du T. XVII que l'„échappement de Galilée" peut être conſidéré comme le précurſeur de l'échappement à ancre, inventé, à ce qu'il paraît, en Angleterre. En effet, l'origine de l'échappement à ancre, comme de beaucoup

---

[3]) T. XVII, note 2 de la p. 12.

[4]) Comparez encore la note 1 de la p. 90 qui suit.

[5]) Suivant Leopoldo lui-même (lettre de mai 1659, T. III, p. 464) les deux instruments dont il est question dans la note 2 n'étaient pas en bon état peu de temps avant qu'il écrivit cette lettre: l'„Oriuuolo rozzamente fatto" dut être „di nuovo esperimentato".

[6]) Rien n'indique aussi que l'horloge à balancier en forme de pendule de Camerini portant la date 1656 que nous avons mentionnée à la p. 60 ait été généralement connue, soit en Italie soit ailleurs. Comparez la note 4 de la p. 13 du T. XVII.

[7]) On peut voir, tant à Florence que dans le „Science Museum" de Londres, un modèle, construit d'après la figure correspondant au texte de la lettre de Viviani, mis en mouvement par un ressort spiral et marchant fort bien.

d'autres inventions, ne peut être déterminée avec une certitude abſolue. On trouvera plus loin dans le préſent Tome une courte Pièce ſur ce ſujet.

On peut encore ſe demander, principalement en ayant égard à un des croquis mentionnés de L. da Vinci, s'il y a eu, avant Huygens, des horloges publiques à pendule, ce dont il n'exiſte, paraît-il, aucune preuve. La queſtion ſe poſe même pour les Pays-Bas. On a vu à la p. 79 du T. XVII que nous n'avons pas réuſſi à démontrer que l'horloge de 1652 de la cathédrale d'Arnhem n'avait pas de pendule. Il ſemble toutefois extrêmement improbable, que ſi des horloges publiques de ce genre avaient exiſté en Néerlande avant 1658, les horlogers qui attaquèrent Huygens en cette année (p. 82—83 du T. XVII) n'en auraient rien dit. Ils paraiſſent auſſi n'avoir connu aucune horloge publique à pendule à l'étranger. L'*argumentum ex ſilentio* a ici beaucoup de force.

D. *Horloges à pendule conique.* On a prétendu que l'horloge publique d'Oſnabrück de la fin du ſeizième ſiècle a probablement été une horloge à pendule conique [1]). Ceci eſt incertain, puiſque nous n'avons ſur cette horloge d'autre renſeignement que celui fourni par le texte cité dans la note 1. Les hiſtoriens ne mentionnent, croyons-nous, aucune autre horloge conique qui aurait été conſtruite avant les jours de Huygens.

R. Hooke exhiba en 1666 une horloge à pendule conique dans une ſéance de la „Royal Society" (T. VII, p. 304). Voir encore ſur ce ſujet la note 13 de la p. 337 du T. VII ainſi que la lettre de Huygens à ſon père d'août 1674 (T. VII, p. 390). Conſultez auſſi l'Appendice II à la Pars Quinta qui ſuit.

---

[1]) Veltman à trouvé une description manuscrite de 1587 de Jost Bodeker, vicaire du dôme d'Osnabrück, de l'horloge construite par lui pour ce dôme; il l'a publiée en 1890 dans le T. XV des „Mitteilungen des historischen Vereins zu Osnabrück" dans son article: „Handschriftliche Aufzeichnungen über einige alte, jetzt verschwundene Uhrwerke der Stadt Osnabrück". Ce travail est cité par E. Bassermann-Jordan dans sa „Geschichte der Räderuhren" de 1905 (p. 43 et suiv.). Il est question dans le manuscrit d'un „gulden Sterne oben in dem Cronament, welcher mit seinem umblauffen [ailleurs: „mit seinem schnellen umblauffen"] so viel ausrichten kan, als der unrast inwendig im wercke, und ist an statt der unrast, etc.". Le balancier n'était pas absent, car Bodeker qui vante la nouveauté de son invention ajoute qu'on peut faire fonctionner à volonté ou bien le balancier ou bien l'étoile. Veltman émet l'hypothèse qu'il s'agit d'un pendule conique et Bassermann-Jordan se déclare d'accord avec lui.

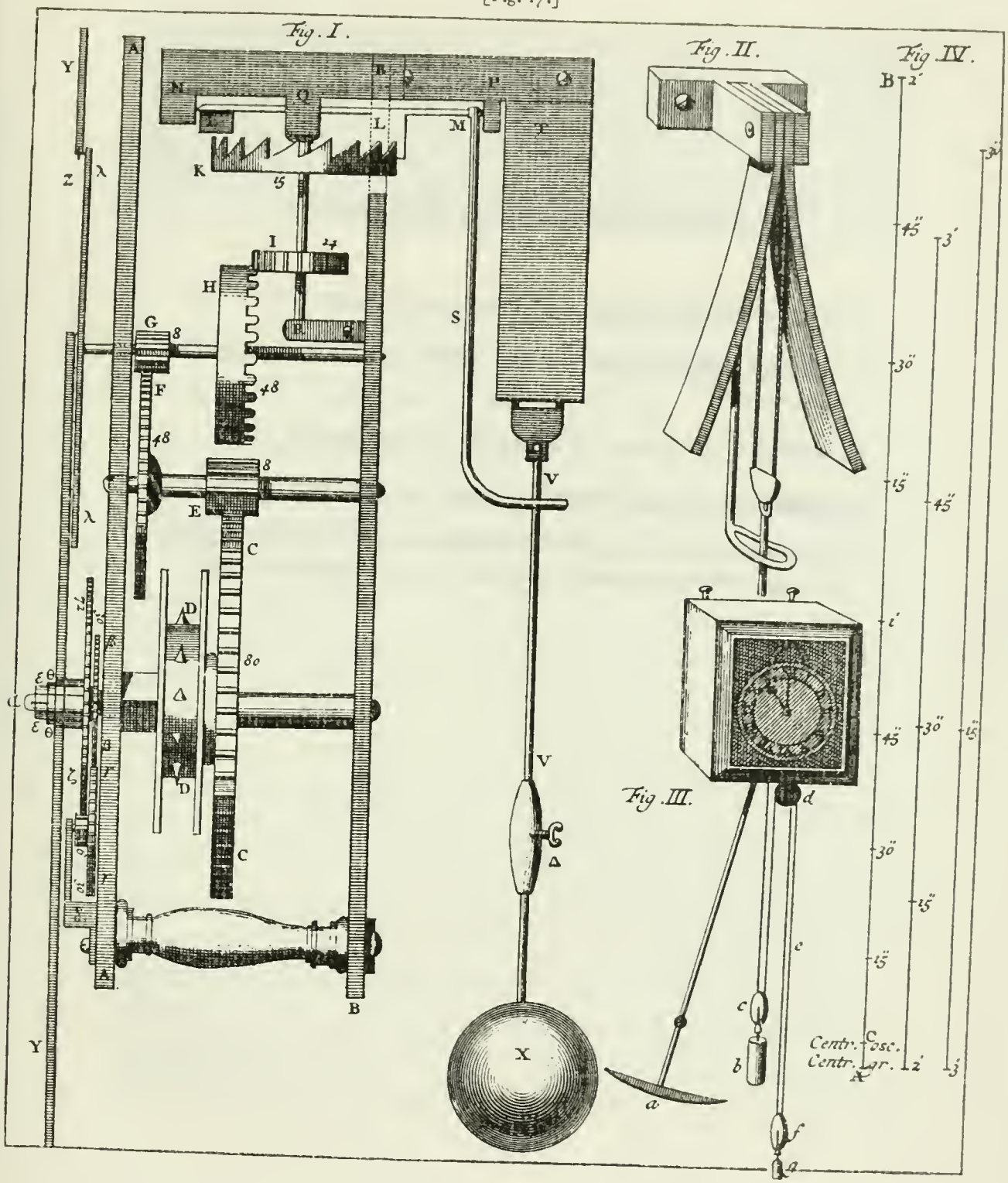
Aucune horloge à pendule conique de ce temps, croyons-nous, n'a été conſervée. Apparemment ces horloges n'ont jamais été en vogue.

Nous indiquons en marge les pages de l'édition originale de 1673 de l'„Hor. oſc.". La Bibliothèque de l'Univerſité de Leiden poſſède l'exemplaire de Huygens (comparez la note 3 de la p. 92 qui ſuit), où celui-ci a corrigé pluſieurs fautes d'impreſſion et introduit dans le texte quelques autres modifications. 's Graveſande dans ſon édition de 1724 a tenu compte de ces remarques, dont quelques-unes ſe rapportent à certaines figures légèrement défectueuſes. Nous reproduiſons ici les figures de 's Graveſande, qui, ſauf ces corrections, s'accordent avec les figures originales; à cela près que celles qui repréſentent des inſtruments ou plus généralement des corps ont été ombrées dans les éditions de 1724 et de 1751.

CHRISTIANI HVGENII ZVLICHEMII, CONST. F. HOROLOGIVM OSCILLATORIVM SIVE DE MOTV PENDVLORVM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.

PARISIIS,
Apud F. Muguet, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum, viâ Citharæ, ad insigne trium Regum.
MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

[Fig. 17.]



Ce livre eſt diviſé en cinq parties

dont

La première contient la deſcription de l'horloge à pendule,

La deuxième traite de la chute des corps peſants et de leur mouvement en une ligne cycloïde,

La troiſième de l'évolution et de la dimenſion des lignes courbes,

La quatrième du centre d'oſcillation ou d'agitation, tandis que

La cinquième contient la figure d'une horloge autrement conſtruite où le mouvement du pendule eſt circulaire, et les théorèmes ſur la force centrifuge.

Dividitur liber hic in partes quinque,

quarum

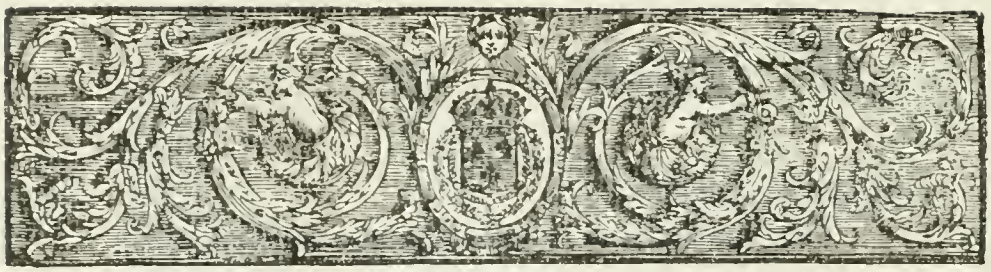
Prima *Defcriptionem* HOROLOGII OSCILLATORII continet.

Secunda agit de *Defcenfu gravium*, & *motu eorum in Cycloide*.

Tertia de *Evolutione & Dimenfione linearum curvarum*.

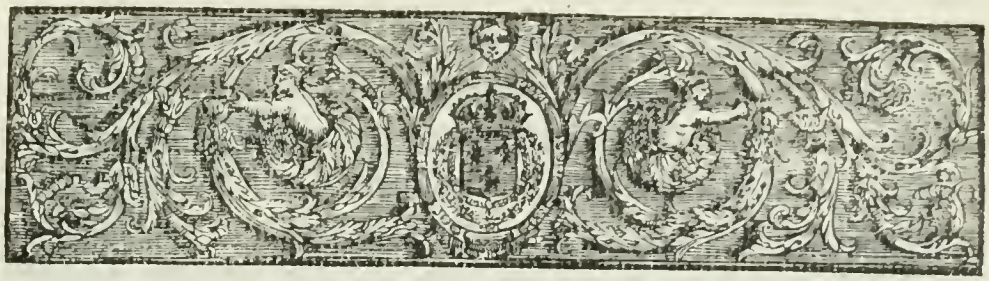
Quarta de *Centro Ofcillationis feu Agitationis*.

Quinta *alterius Horologii conftructionem*, in quo circularis eft penduli motus, exhibet, & Theoremata de *Vi Centrifuga*.



A LOUIS XIV LE GRAND
ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE.

C'eſt principalement à la France, Grand Roi, que nous devons la renaiſſance et le rétabliſſement en ce ſiècle de la Géométrie: ici naquirent ceux qui les premiers renouvelèrent et rappelèrent à la vie, en y conſacrant une grande, et la meilleure, partie de leurs forces, cette ſcience oubliée et pour ainſi dire enſevelie. Suivant leurs traces des hommes fort ingénieux, partout en Europe, la développèrent enſuite avec un tel ſuccès que peu de choſes, ſemble-t-il, ont été laiſſées à découvrir aux générations futures, tandis que les réſultats obtenus par les anciens ont été dépaſſés de beaucoup. Dans cette ſcience que j'ai toujours beaucoup admirée et aimée, je me ſuis propoſé ſurtout, toutes les fois que je m'y adonnai, la conſidération de problèmes dont la ſolution ſerait utile ſoit pour la commodité de la vie ſoit pour la connaiſſance de la nature. Mais c'eſt lorſque je tombais ſur des ſujets où l'utilité était unie à une difficulté de les tirer au clair qui exigeait des raiſonnements ſubtils que



LVDOVICO XIV,

FRANCIÆ ET NAVARRÆ

REGI INCLYTO.

ENATAM, Rex maxime, reſtitutamque hoc ſæculo Geometriam, Galliæ præcipue debemus. Hinc enim orti, qui magna meliorique ſui parte deperditam, ac veluti ſepultam, inſtaurarunt primi, & in lucem reduxerunt. Quorum veſtigiis inſiſtentes, ita eam deinde, per totam Europam, excoluere viri ſubtiliſſimi, ut pauca jam poſterorum induſtriæ ab his relicta videantur; veterum vero inventa longiſſime prætervecti ſint. In hac ſcientia, quam ſemper admiratus ſum & amavi plurimum, quandocunque ad eam animum applicui, illa mihi præ cæteris propoſui inveſtiganda, quæ vel ad vitæ commoda, vel ad Naturæ cognitionem, reperta prodeſſe poſſent. Tunc verò optimè operam me collocaſſe exiſtimavi, cum in ea incidiſſem, in quibus utilitas cum inve-

j'avais l'impreſſion de m'y appliquer le plus avantageuſement. Et s'il eſt permis de joindre au préſent don quelque recommandation afin qu'il ne paraiſſe pas tout-à-fait indigne de Ta grandeur, j'oſe dire n'avoir nulle part eu mieux l'occaſion de tendre avec ſuccès vers le double but dont je parlais que dans le cas de l'invention de mon Horloge. En effet, comme il s'agit d'une part d'une invention mécanique, mais que de l'autre, et de beaucoup la plus importante, c'eſt une conſtruction baſée ſur des principes géométriques, il faut ſavoir qu'en cette dernière qualité elle exigeait le recours nullement aiſé aux artifices les plus abſtraits de l'art, de ſorte que parmi tous les ſujets auxquels j'ai voué juſqu'ici une étude tant ſoit peu profonde, j'attribue ſans héſiter la première place à cette ſpéculation-ci.

Quant à l'utilité de mon invention, il n'eſt pas néceſſaire, Puiſſant Roi, que je me ſerve de beaucoup de paroles pour la faire voir. En effet, non ſeulement Tu as pu conſtater par une expérience journalière, depuis que mes pendules ont mérité d'être reçues dans les appartements intimes de Ton palais [2]), de combien elles ſurpaſſent les autres horloges, mais de plus Tu n'ignores pas les uſages plus ſpéciaux auxquels je les deſtinais dès le commencement. Je veux parler des ſervices qu'elles peuvent rendre tant dans les obſervations céleſtes que dans la meſure des longitudes des différents lieux par les navigateurs. En effet, ſuivant Tes ordres nos Horloges ont été envoyées par mer plus d'une fois; d'autre part on en peut voir un aſſez grand nombre deſtinées à l'uſage

niendi difficultate, ac ſubtilitate aliqua, conjuncta foret. Quod ſi commendationis nonnihil accerſere muneri nostro permittitur, ne prorſus indignum tua magnitudine appareat; non alias felicius, quam in hoc Horologii invento, utrumque illud me conſecutum eſſe profiteor. Etenim, cum ex parte mechanicum ſit inventum; ex parte altera, eaque multò præcipua, geometricis principiis conſtet; id quod ad hanc[1]) attinet, non levi conamine, ex intimis artis receſſibus petendum fuit: adeo quidem, ut inter omnia, quæ impenſiore ſtudio hactenus pertractaverim, haud dubie primum huic ſpeculationi locum tribuam. Quænam vero in his ſit utilitas, non eſt quod multis, Rex potentiſſime, oſtendere tibi laborem. Non ſolum enim diutinâ experientiâ compertum habes, ex quo regiæ tuæ penetralibus recipi meruere Automata noſtra[2]), quantum, æquabili horarum demonſtratione, cæteris hujuſmodi machinationibus excellant: ſed & potiores uſus eorum, quibuſque jam inde à principio mihi deſtinata fuere, non ignoras. Illos ſcilicet, quos & in Cæleſtium obſervationibus, & in Longitudinibus locorum inter navigandum dimetiendis, præſtare apta ſunt. Tuo enim juſſu, non ſemel, per mare vecta fuere Horologia noſtra. Tuis auſpiciis eadem nec pauca, Aſtronomiæ

---

[1]) L'édition originale a „ad posteriorem hanc", mais le mot „posteriorem" a été biffé par Huygens.

[2]) Voir le dernier alinéa de la p. 103 du T. XVII.

des aſtronomes et placées ſous Tes auſpices dans ce merveilleux Obſervatoire que Tu as récemment fait conſtruire avec une libéralité inſigne et ſurpaſſant celle de tout autre roi. Toutes les fois que je réfléchis à ces choſes, je me félicite hautement du bonheur qui m'eſt échu de faire cette invention dans le temps de Ton règne.

Perſonne, ſachant combien cette invention Te doit, ne demandera donc, me ſemble-t-il, pour quelle raiſon j'ai cru devoir vouer à Ton auguſte nom les ſpéculations qui contiennent la théorie et la deſcription de mon inſtrument. Or, on trouvera encore bien plus naturel que je Te dédie ces pages lorſqu'on aura appris que c'eſt grâce à Ta magnificence que je jouis du loiſir de méditer tranquillement ſur ce ſujet ainſi que ſur d'autres. En effet, il me fallait d'une part faire voir dans une certaine meſure l'utilité de ce loiſir et d'autre part témoigner quelque reconnaiſſance pour Tes nombreux et continuels bienfaits. Je ſais bien que, Te vouant aux grandes affaires, celles dont il convient à un homme ſi haut placé de s' occuper, Tu n'es nullement libre, quelle que ſoit la capacité de Ton eſprit, de fixer Ton attention ſur des ſpéculations de ce genre. Toutefois j'oſe penſer, Grand Roi, que ceci ne T'empêchera nullement d'accepter mon don avec quelque plaiſir et d'approuver mes efforts, puiſque nous voyons que ce qui Te plaît le mieux c'eſt ce qui a le plus d'utilité publique, et que Tu ne ſouhaites rien davantage que de faire prendre un grand effor aux meilleures ſciences, de les voir s'enrichir par de nouvelles découvertes. Ceci en effet eſt abondamment prouvé par

uſibus dicata, viſuntur in præclara illa Uraniæ arce, quam inſigni nuper magnificentia, quantaque antehac regum nemo, exædificandam curaſti. Quæ quoties mecum reputo, toties de fortuna hujus inventi, quod in tua tempora inciderit, non parum mihi gratulari ſoleo. Nec jam requiret quiſquam, opinor, qui quantum tibi illud debeat intelliget, cur lucubrationes has, quibus rationem ejus omnem deſcriptionemque explicui, auguſto Nomini tuo inſcribendas duxerim. Ac minus etiam id mirabitur, qui mihi, ad hæc atque alia meditanda, tranquillum otium benignitate tua contigiſſe didicerit. Namque & hujus, ut mihi aliquatenus apud te ratio conſtaret, adnitendum erat; & quoquo modo conandum, ut, multis continuiſque à te beneficiis affectus, nonnulla grati animi ſignificatione defungerer. Scio equidem, rebus maximis, negotiiſque iis intento, quæ in illo rerum faſtigio poſitum agitare convenit, haudquaquam tibi liberum eſſe, ut ad hujusmodi contemplationes animum, alioqui rerum omnium capacem, advertas. Sed non ideo minus grata hæc fore, minusve tibi probatum iri arbitror, Rex auguſtiſſime; cui illa maxime placere videmus, quæ plurimum publicè proſunt; neque aliud magis curæ eſſe, quam ut nova incrementa ſumant optimæ diſciplinæ, noviſque illuſtren-

cette grande et extraordinaire libéralité avec laquelle Tu protèges ces ſciences et ceux qui y excellent; libéralité que les très grands frais des guerres, bien qu'ils ſurpaſſent énormément les dépenſes ordinaires, ne diminuent en rien et que les confins de la France, Ton royaume, ne limitent point. Ce qui prouve clairement que Ton but n'eſt pas ſeulement d'augmenter le bonheur de ceux qui vivent ſous Ta domination, mais encore de rendre le monde entier, partout où il ſe montre digne de Tes bienfaits, plus ſavant, plus civiliſé, plus heureux. Peut-être les monuments littéraires tels que celui-ci contribueront-ils eux auſſi quelque choſe à cette gloire, qui eſt Ta gloire la plus véritable et la plus haute: ils pourront ſans doute, tout en démontrant à la poſtérité qu'en ce temps les études et les arts fleuriſſaient, lui faire voir que cette floraiſon eſt due avant toutes choſes à Ta ſageſſe et Ta grandeur d'âme.

tur inventis. Hoc enim ſatis declarat eximia illa tua, ac ſingularis, tum in ipſis promovendis, tum in his qui cognitione earum præminent remunerandis, liberalitas. Quam non immenſæ, ac ſolito majores, bellorum impenſæ quidquam imminuunt: non Galliæ tuæ fines circunſcribunt. Ut plane te hoc agere appareat, quo non ſolum ſub imperio tuo viventes, ſed & Orbis univerſus, quacunque beneficio tuo dignus eſt, te regnante, eruditior, ornatior, felicior evadat. Cui veriſſimæ præclariſſimæque gloriæ tuæ, ita aliquid fortaſſe etiam hæc literaria monumenta conducent; ut, ſi viguiſſe hoc tempore ſtudia iſta, arteſque, poſteris teſtari poſſint, ſimul illos edoceant, tuæ hoc virtuti, atque animi magnitudini, ante omnia acceptum ferendum eſſe. Lutetiæ Pariſiorum; XXV. Mart. A. CIↃIↃCLXXIII.

HADRIANI VALLII
DAPHNIS,
ECLOGA.

Ad Chriſtianum Hugenium Zulichemium Conſtantini F. [1]).

Finitimum tutela, ſimul jucunda voluptas,
Dilectæ Phœbo, Sceverinides Oceaninæ;
Hunc quoque Pierium mihi fortunate laborem:
Pervigilem noctem quo carmine duxerit Ancon
5 Navita, dicemus: veſtro ſic gurgite numquam
Pan lavet, aut turpes inceſtent æquora Fauni.
Te, quem Fama vehit ſuper aurea ſidera curru,
Ne pigeat nobis aurem præbere faventem,
Hugenide, decus Hugenidum, fratrumque patriſque:
10 Haud indigna tuo ferimus donaria ſenſu,
Siceliſin aptata modis à vate Batavo
Mixta Palæphatio commenta Solenſia [2]) verſu,
Teque intertextum tuaque præclara reperta.
Jam caput Oceano, ſtipata minoribus aſtris,
15 Extulerat, radijs fraternis æmula Phœbe [3]),
. . . . . .
32 Fert radians æther, vultus formaſque natantum [4]).
. . . . . .

LES HUIT DERNIERS VERS DU POÈME ONT ÉTÉ CHANGÉS [5]) EN:

Hæc Ancon: mihi viſa tibi quæ digna referri,
250 [6]) Hugenide, decus Hugenidum, cui ſidera curæ,
Nec Phœbum ac Pimplæ fas eſt contemnere Divas,
Queis tua tota domus, fratres, genitorque dicati.
Sic neque te facies peregrini terreat aſtri,
Idemve anne alius vario fulgore cometes.

A. CIↃIↃCLXV.

---

[1]) Voir sur l'Eclogue de Vallius (T. V, p. 292—298) les p. 29 et 34 de l'Avertissement qui précède. On remarquera que les vs. 5—6 ont été modifiés conformément aux „mutanda" de la p.

299 du T. V, et que de plus les vs. 9—10 ainsi que les vs. 11—12 du texte original ont été intervertis.

[2]) Voir la note 5 de la p. 31. Les. vs. 56—57 (l. 10—9 d'en bas de la p. 293 du T. V) rappellent le début des Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα d'Aratos.

[3]) Nous avons déjà dit à la p. 30 que Vallius s'inspire en grande partie de Virgile. Comme celui-ci — et comme Homère — il considère, dans la longue partie mythologique de son poème, le ciel comme une voûte d'azur recouvrant la terre plate entourée de toutes parts par l'Oceanus. C'est de l'Oceanus que sortent, en se levant, la lune et les autres astres; comparez avec les vs. 14—15 les vs. 589—591 du Livre VIII de l'Eneïde.

Le vs. 35 (l. 11 de la p. 293 du T. V) et les vs. 169—172 (l. 22—25 de la p. 296) contiennent une allusion à la découverte de Mira Ceti par l'astronome hollandais J. F. Holwarda; comparez sur ce sujet la p. 293 du T. III.

Dans les vs. 173—182 dont nous avons parlé à la p. 34 Vallius donne, sous la forme poétique qui dispense de toute exactitude historique, un aperçu rapide du développement de l'astronomie depuis des temps fort anciens jusqu'aux jours de Huygens, et les vs. 183—221 (se terminant à la l. 9 d'en bas de la p. 297 du T. V) célèbrent ce dernier comme celui à qui était réservé, après le „primus Batavus" et Galilée, le „sollertior usus" de la lunette, partant la découverte d'un satellite de Saturne et de la véritable forme de cette planète, ainsi que l'invention de l'horloge à pendule capable e.a. de diriger les „Labyrintheos cursus" des navigateurs. Enfin l'apparition d'une comète donne à Ancon, ou Vallius, l'occasion de faire allusion aux observations de Huygens sur ce sujet.

[4]) Forme modifiée du vs. 32, non indiquée à la p. 299 du T. V.

[5]) Modification non indiquée dans le T. V.

[6]) C'est le vs. 253 du poème dans l'édition de 1673.

Notons encore que dans la l. 4 d'en bas de la p. 297 du T. V „cavasque" est une faute d'impression pour „carasque".

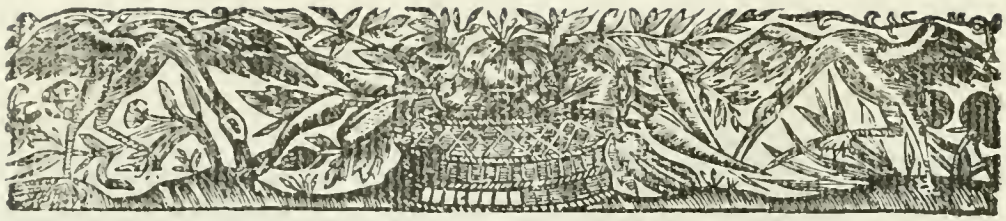
PRIVILEGE DV ROY

LOUIS par la grace de Dieu de Roy de France & de Navarre: A nos amez & feaux Conseillers, tenans nous Cours de Parlement, Maistres des Requestres ordinaires de nostre Hostel, Baillifs, Seneschaux, Prevosts, leurs Lieutenans, & tous autres Justiciers & Officiers qu'il appartiendra, Salut. Nostre cher & bien amé FRANÇOIS MUGUET nostre Imprimeur ordinaire, Nous a tres-humblement fait remontrer qu'il luy auroit esté mis ès mains un Livre intitulé, *Christiani Hugenii Zulichemii Const. F. Horologium Oscillatorium, seu de motu Pendulorum ad horologia aptato demonstrationes Geometricæ*, qu'il desireroit donner au public s'il Nous plaisoit luy en accorder la permission, humblement requerant icelle, À CES CAUSES voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous luy avons permis & accordé, permettons & accordons par ces presents d'imprimer ou faire imprimer ledit Livre en telle forme, caractere, volume, & autant de fois que bon luy semblera, durant le temps de six années entieres & consecutives, à commencer du jour qu'il sera achevé d'imprimer pour la premiere fois, faisant tres-expresses dé fenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, de l'imprimer ou faire imprimer, vendre my débiter durant ledit temps en aucun lieu de nostre Royaume, sans le contentement de l'Exposant, ou de ceux qui auront droit de luy, sous quelque pretexte que ce soit, à peine de quinze cens livres d'amende applicable, un tiers à Nous, un tiers à l'Hôpital General de nostre ville de Paris, & l'autre tiers à l'Exposant, de confiscation des exemplaires contrefaits, & de tous dépens, dommages & interests, à la charge qu'il en sera mis deux exemplaires en nostre Biblioteque ordinaire, un en celle du cabinet de nostre Louvre, & un autre en celle de nostre amé & feal Garde des Sceaux le sieur Daligre. SI vous mandons que du contenu en ces presentes vous fassiez jouir & user l'Exposant, & ceux qui auront droit de luy pleinement & paisiblement, cessant à faissant cesser tous troubles & empêchemens au contraire, voulans qu'en inserant ces presentes ou extrait d'icelles en chacun des exemplaires, elles soient tenuës pour bien & deuëment signifiées, Commandons au premier nostre Huissier ou Sergent sur ce requis, faire pour l'execution des presentes tous exploits à ce necessaires. CAR tel est nostre plaisir. DONNÉ à Versailles le dernier jour de Septembre l'an de grace mil six cens soixante-douze. Et de nostre Regne le trentiéme. Signé, LOUIS. Par le Roy, COLBERT.

Registré sur le Livre de la Communaute des Marchands Libraires & Imprimeurs de Paris, le 4. Novembre 1672. suivant l'Arrest du Parlement du 8. Avril 1653, & celui du Conseil Prive du Roy du 27. Fevrier mil six cens soixante-cinq. Signé, D. THIERRY, *Syndic.*

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le premier jour d'Avril 1673.

Les Exemplaires ont esté fournis.



L'HORLOGE À PENDULE

OU

DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES

SUR LE

MOUVEMENT DES PENDULES ADAPTÉ AUX HORLOGES

PAR

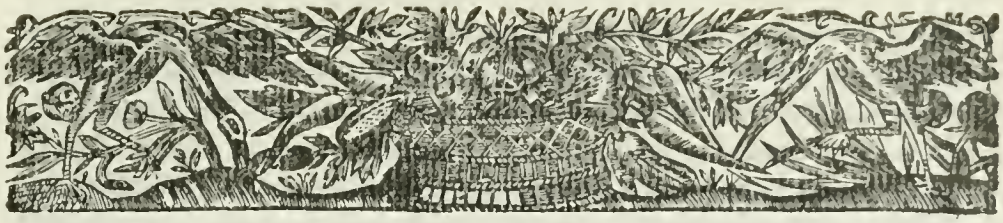
CHRISTIAN HUYGENS DE ZUYLICHEM,

FILS DE CONSTANTYN.

Quinze années se sont écoulées [1]) depuis celle où nous avons fait connaître par la publication d'une brochure [2]) la construction des horloges que nous avions récemment inventée à cette époque. Attendu que depuis ce temps nous avons trouvé plusieurs choses qui regardent la perfection de cet ouvrage, nous nous sommes résolus à les expliquer en particulier dans ce livre-ci.

Ces choses sont si intimement liées à la perfection de cette invention qu'elles peuvent être considérées comme la principale partie et pour ainsi dire le fondement, qui y manquait auparavant, de tout ce mécanisme. En effet, le pendule simple ne possédait pas de mesure du temps certaine et égale, puisqu'on observe que les plus larges mouvements sont plus tardifs que les plus étroits; or, nous avons trouvé par le moyen de la géométrie une façon differente, inconnue jusqu'ici, de suspendre ce pendule: nous avons découvert une ligne possédant une courbure telle qu'elle se prête d'une façon entièrement admirable à lui donner l'égalité désirée. Depuis notre application de cette ligne aux horloges leur mouvement est devenu si constant et si certain qu'ensuite de plusieurs expériences faites par terre et par mer il est maintenant manifeste que ces horloges sont très utiles et à l'astronomie et à l'art de naviguer. C'est cette ligne que

[1]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 64 qui précède.



CHRISTIANI HVGENII ZVLICHEMII, CONST. F. (p. 1).

HOROLOGIVM OSCILLATORIVM,

SIVE

DE MOTV PENDVLORVM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.

ANNUS agitur ſextus decimus [1]) ex quo fabricam horologiorum, tunc recens à nobis inventorum, edito libello publicam fecimus [2]). Ab illo verò tempore cùm multa invenerimus ad perfectionem operis ſpectantia, viſum eſt ea ſingula hoc libro exponere. Quæ quidem adeo ad perfectionem ejus inventi pertinent, ut potiſſima ejus pars cenſeri poſſint, ac velut fundamentum totius mechanicæ hujus, quo prius deſtituta erat. Menſura enim temporis certa atque æqualis, pendulo ſimplici naturâ non inerat, cum latiores excurſus anguſtioribus tardiores obſerventur; ſed geometria duce diverſam ab ea, ignotamque antea penduli ſuſpenſionem reperimus, animadverſâ lineæ cujusdam curvaturâ, quæ ad optatam æqualitatem illi conciliandam mirabili planè ratione comparata eſt. Quam poſtquam | horologiis adhi- (p. 2).
buimus, tam conſtans certusque eorum motus evaſit, ut poſt crebra experimenta terra marique capta, manifeſtum jam ſit & Aſtronomiæ ſtudiis & arti Nauticæ plurimùm in

---

[2]) L'„Horologium" de 1658.

décrit en l'air par ſa circonvolution continuelle un clou attaché à une roue courante. Les géomètres de notre temps l'ont appelée cycloïde et l'ont examinée avec ſoin à cauſe de ſes diverſes autres propriétés. Quant à nous, nous l'avons conſidérée à cauſe de cette faculté dont nous parlions, ſavoir celle de meſurer le temps, laquelle nous y avons trouvée ſans en avoir le moindre ſoupçon, rien qu'en raiſonnant ſuivant les méthodes de l'art. Ayant depuis longtemps fait connaître cette propriété à quelques amis verſés en ces matières (car c'eſt peu de temps après la première édition de l'horloge que nous l'avons aperçue), nous la propoſons maintenant à lire à tous confirmée par la démonſtration la plus exacte que nous ayons pu trouver. Ainſi ce ſera en cette démonſtration que conſiſtera la principale partie de ce livre. Pour la donner, il a été néceſſaire tout d'abord de corroborer et d'amplifier la doctrine du grand Galilée touchant la chute des corps graves, doctrine dont le fruit le plus ſouhaité et pour ainſi dire le ſommet le plus élevé eſt préciſément la propriété de la cycloïde que nous avons découverte.

Au reſte, afin qu'on pût rapporter cette propriété à l'uſage des pendules, il nous a fallu établir une nouvelle théorie des lignes courbes, ſavoir la théorie des courbes qui par leur évolution en engendrent d'autres. Ceci conduit à la comparaiſon de la longueur des lignes courbes et des lignes droites entre elles que j'ai pourſuivie même au-delà de ce que mon ſujet demandait: je l'ai fait à cauſe de la beauté et de la nouveauté apparentes de cette théorie.

Pour expliquer la nature du pendule compoſé, dont je démontre l'utilité dans la conſtruction de ces automates, il a été néceſſaire d'y ajouter enſuite la théorie des centres d'oſcillation, dont pluſieurs ſe ſont occupés juſqu'ici ſans beaucoup de ſuccès; on y trouvera, ſi je ne me trompe, quantité de propoſitions remarquables relatives à des figures linéaires, planes et ſolides.

Mais devant toutes ces choſes je mets la conſtruction mécanique de l'horloge, et l'application du pendule, dans la forme qu'on a trouvée la plus propre aux uſages aſtronomiques et à l'inſtar de laquelle on peut facilement fabriquer toutes les autres, en y apportant les changements néceſſaires.

Or, parce qu'il eſt arrivé dans le beau ſuccès de cette invention ce qui arrive ordinairement, et ce que j'avais prédit, ſavoir que pluſieurs déſireraient en être les auteurs, ou bien qu'ils voudraient attribuer cet honneur non pas à eux-mêmes mais du moins à quelqu'un de leur nation plutôt qu'à nous, je ſuis d'avis qu'à la fin il y a lieu de faire face à leurs efforts iniques. Et véritablement, il ne ſera guère néceſſaire de

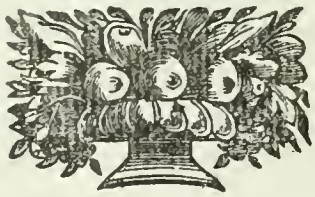
iis esse præsidii. Hæc ea est linea quam defixus in circumferentia currentis rotæ clavus, continua circumvolutione, in aëre designat; à Geometris nostri ævi cycloidis nomine donata, & ob alias multas sui proprietates diligenter expensa; à nobis verò propter eam quam diximus mensurandi temporis facultatem, quam nihil tale suspicantes, ac tantùm artis vestigiis insistentes, inesse ipsi comperimus. Hanc cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo post primam horologii editionem animadversa fuit) nunc eandem, demonstratione quàm potuimus accuratissima firmatam, omnibus legendam proponimus. Itaque in hac tradenda demonstratione potissima pars hujus libri versabitur. Ubi primùm necesse fuit novis nonnullis demonstrationibus stabilire & promovere ulterius viri maximi Galilei de descensu gravium doctrinam, cujus fructus desideratissimus, atque apex veluti summus, hæc ipsa quam invenimus cycloidis est proprietas.

Quæ porro ut ad pendulorum usum aptari posset, nova curvarum linearum consideratio adhibenda fuit, earum scilicet quæ sui evolutione alias curvas generant. Unde comparatio inter se longitudinis curvarum cum rectis nascitur, quam ulterius etiam quam præsens necessitas postulabat prosecutus sum, propter theoriæ, ut mihi visum est, elegantiam & novitatem.

Cæterùm ad explicandam Penduli Compositi naturam, cujus utilitatem in constructione horum automatôn demonstro, adjungenda fuit Centrorum Oscillationis contemplatio, à pluribus quidem, sed minus feliciter, hactenus tentata; in qua theoremata complura animadversione, ni fallor, digna reperientur, ad figuras lineares, planas, solidasque pertinentia. Ante hæc omnia vero præmittitur ipsa horologii mechanica constructio, pendulique applicatio, eâ formâ quæ ad usus astronomicos aptissima reperta est, ad cujus instar reliquæ omnes, mutatis quæ opus est, facile ordinari possint.

Quia vero contigit egregio hujus inventi successu, quod fieri plerumque solet, quodque futurum prædixeram, ut plures sese ejus auctores esse cuperent, aut si non sibi ipsis, suæ tamen nationis alicui potius quàm nobis eum honorem tribui vellent, iniquis eorum conatibus tandem aliquando occurrendum hic | arbitror. Nec sanè aliud fere (*p.* 3).

leur oppofer autre chofe que ceci, favoir qu'il y a feize ans que j'ai trouvé la conftruction des dites horloges par mes méditations particulières, et que je l'ai fait mettre à effet quand ni par les paroles ni par les écrits de perfonne il en avait été fait mention et qu'on n'en entendait pas le moindre bruit (je parle de l'ufage du pendule fimple transféré aux horloges; car pour l'addition de la cycloïde, je ne crois pas que perfonne veuille me la difputer); que l'année fuivante, qui était la cinquante huitième de ce fiècle, j'ai fait imprimer la figure et la defcription de cet automate; et que j'ai envoyé de toutes parts des exemplaires tant de l'ouvrage lui-même que de ma brochure. Car comme ces chofes font fi connues à tout-le-monde qu'elles n'ont befoin d'être confirmées ici ni par les témoignages des favants ni par les Actes des Etats de Hollande, comme elles pourraient l'être, il eft facile de voir ce qu'on doit juger de ceux qui, fept ans plus tard, ont préconifé la même conftruction dans leurs livres comme fi elle était due à eux ou à leurs amis [1]). Quant à ceux qui en font remonter l'origine à Galilée, s'ils difent qu'il s'eft effayé à trouver cette machine mais fans pouvoir parvenir au but, il me femble qu'ils ôtent de fa louange plutôt que de la mienne, attendu que dans ce cas j'ai cherché la même chofe que lui avec plus de fuccès. Que s'ils foutiennent que la conftruction a été achevée foit par Galilée lui-même, foit par fon fils comme un favant l'a récemment prétendu, et que de telles horloges achevées ont été exhibées, je ne fais comment ils efpèrent qu'on leur en croira, puifqu'il eft peu vraifemblable qu'une invention fi utile eût pu être ignorée durant huit années entières et jufqu'à ce que je l'euffe publiée. Mais s'ils difent que cette invention a été cachée expreffément, ils voient affez que tout autre homme défireux de s'en arroger l'honneur, pourrait fe fervir du même raifonnement. Il leur faudrait donc dans ce cas donner une preuve de ce qu'ils avancent; fuppofé qu'ils la donnent en effet, la chofe ne me regardera néanmoins en aucune façon à moins qu'on ne démontre en même temps que j'étais, moi, feul à favoir ce que tout-le-monde ignorait [2]). Voilà ce que j'ai jugé néceffaire de dire pour ma défenfe. Mais venons maintenant à la conftruction de l'automate.

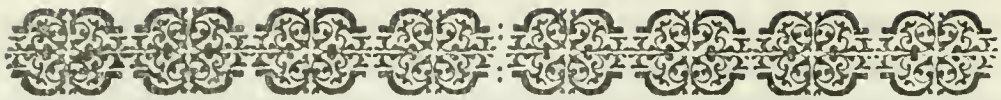


[1]) Nous ignorons quels sont les livres (ou le livre unique) auquel Huygens fait ici allusion. Un livre écrit sept ans après l'invention de l'horloge réglée par un pendule librement suspendu,

opponere iis neceſſe fuerit præterquam id unum, nempe ante annos ſexdecim, cum nec dicto nec ſcripto cujusquam de horologiis hujusmodi mentio facta eſſet, aut rumor ullus omnino ferretur (loquor autem de penduli ſimplicis uſu ad horologia translato, nam de Cycloidis additione nemo credo controverſiam movebit) conſtructionem eorum propria meditatione me adinveniſſe & perficiendam curaſſe. In ſequenti anno, qui nempe hujus ſæculi quinquageſimus octavus fuit, delineationem automati deſcriptionemque typis vulgaſſe; exemplaria, tum operis ipſius, tum libelli, quaquaverſum dimiſiſſe. Nam cum hæc ita omnibus nota ſint, ut nec teſtimoniis eruditorum, nec Bataviæ Ordinum actis, quibus poſſent, confirmari opus habeant, facile apparet quid de illis exiſtimandum ſit, qui ſeptem poſt annis eandem conſtructionem, quaſi à ſe ſuisve amicis profectam, libris ſuis venditarunt [1]). Qui vero Galileo primas hic deferre conantur, ſi tentaſſe eum, non vero perfeciſſe inventum dicant, illius magis quam meæ laudi detrahere videntur, quippe qui rem eandem, meliore quam ille eventu, inveſtigaverim. Cum autem vel ab ipſo Galileo, vel à filio ejus, quod nuper voluit vir quidam eruditus, ad exitum perductum fuiſſe contendunt, horologiaque ejusmodi re ipſâ exhibita, neſcio quomodo ſibi creditum iri ſperent, cum vix veriſimile ſit adeo utile inventum ignoratum manere potuiſſe annis totis octo, donec à me in lucem ederetur. Quod ſi deditâ operâ celatum fuiſſe dicant, idem hoc intelligunt à quolibet alio poſſe obtendi, qui ſibi originem inventi arrogare cupiat. Itaque probandum quidem id foret, neque eo magis ad me tamen quicquam pertineret, niſi unà quoque oſtendatur, id quod omnes latebat, mihi ſoli innotuiſſe [2]). Et hæc quidem neceſſariæ defenſionis cauſa dicenda fuere. Nunc ad ipſius automati conſtructionem pergamus.

dont le premier modèle avait été construit en décembre 1656 (T. XVII, p. 13, note 4 et p. 52, note 2), devrait dater de 1663. Il semble toutefois possible que Huygens entende parler d'un livre paru en Italie en 1662, savoir les Éphémérides de Cornelio Malvasia (1603—1666) — voir le titre complet à la p. 143 du T. III — dont il cite à la p. 243 du Manuscrit C le passage suivant de la p. 196: „Horologium nobis esse domi nostræ constitutum cujus motus per vibrationes penduli, modo jam Florentiæ ante annos aliquot invento, regulatur". Malvasia ne fait apparemment pas partie de „ceux qui en font remonter l'origine à Galilée", dont il est question dans la phrase suivante du texte.

[2]) Voir sur ce passage les p. 59—66 de l'Avertissement qui précède.



PREMIÈRE PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE

Contenant la deſcription de l'horloge [1]).

La figure ci-contre [Fig. 17 I, p. 71] repréſente l'horloge vue de côté. Elle fait voir premièrement deux platines AA, BB, longues d'un demi pied ou un peu plus, larges de deux pouces et demi, dont les angles ſont reliés par quatre petites colonnes, en ſorte que les platines ſont éloignées l'une de l'autre d'un pouce et demi. Dans elles ſont plantés les axes des principales roues, de part et d'autre. La première roue et la plus baſſe eſt celle qui eſt marquée C, dans laquelle ſont découpées 80 dents et à l'axe de laquelle eſt également fixée la poulie D, hériſſée de pointes de fer pour pouvoir tenir la corde avec les poids qui y ſont ſuſpendus et dont nous dirons plus loin la diſpoſition. La roue C tourne donc par la force d'un poids; elle communique le mouvement au pignon E le plus proche qui a huit dents et en même temps à la roue F attachée au même axe qui en a 48. Par cette dernière eſt mené un autre pignon G et une roue H coaxiale avec lui, leſquels ont les mêmes nombres de dents que la roue et le pignon précédents. Mais cette roue H eſt de l'eſpèce que nos artiſans appellent „roue à couronne" [2]). Ses dents mènent le pignon I ainſi que la roue K fixée ſur le même axe vertical. Ce pignon a 24 dents et la roue en a 15 qui ſont taillées comme celles d'une ſcie. Au-deſſus de la roue K et au milieu d'elle eſt placée horizontalement la verge à palettes LM, dont les extrémités ſont ſoutenues de part et d'autre par les gnomons NQ et P ſéparément attachés à la platine BB. Il faut remarquer dans le gnomon NQ la partie Q proéminente vers le bas, laquelle laiſſe paſſer l'axe LM par une ouverture oblongue et maintient en outre dans la poſition verticale l'axe dont nous avons dit qu'il eſt commun à la roue K et au pignon I et qui s'appuie en bas ſur le gnomon R [3]). Dans la platine BB eſt pratiquée une large ouverture deſtinée à laiſſer paſſer l'extrémité de la verge à palettes LM, qui, inſérée avec ſa pointe ſubtile dans le gnomon P, ſe meut ainſi plus librement que ſi elle était ſoutenue par la platine BB elle-même et ſe

---

[1]) On trouve aussi une traduction française de cette Première Partie par L. Reverchon dans „l'Horloger, Revue Générale, réd. et adm. 19 rue de Turbigo, Paris" de décembre 1922 et ns. suivants.

[2]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 15 du T. XVII.

[3]) L'édition originale a N. Mais les „Corrigenda" imprimés à la dernière page de l'édition originale de I„Hor. osc." disent: „Pro N lege R; quæ litera in figura omissa est". Dans son

HOROLOGII OSCILLATORII (p. 5).

Pars Prima,

Deſcriptionem ejus continens.

FIGURA adſcripta [Fig. 17 I] horologium à latere inſpiciendum præbet, ubi primum laminæ binæ ſunt AA, BB, ſemipedali aut paulo ultra longitudine, latæ pollices duo & ſemis, quarum anguli quatuor columellis coaptantur, ut ſesquipollice inter ſe diſtent. His laminis rotarum præcipuarum axes utrinque inſeruntur. Prima atque infima eſt quæ notatur C, dentibus 80 inciſa, cujus axi orbiculus quoque D affixus eſt, aculeis ferreis aſper, ut funem cum appenſis ponderibus contineat, quæ qua ratione ordinentur poſtea dicetur. Ponderis itaque vi rota C vertitur; hæc movet proximum tympanum E dentium octo, unáque rotam F eodem axe hærentem, cui dentes 48. Hanc excipit tympanum aliud G, & in eodem axe rota H, quibus dentium numerus idem qui tympano rotæque præcedenti. Sed hæc rota ejus eſt generis quas à forma coronarias vocant artifices noſtri [2]). Hujus dentibus agitatur tympanum I ſimulque rota K, quæ eodem axe tenetur, ad perpendiculum erecto. Tympano dentes 24; rotæ 15, atque hi ad inſtar ſerræ dentium inciſi. Supra mediam rotam K transverſus jacet axis pinnatus LM, cujus extrema ſuſtinent hinc inde gnomones NQ & P, ſeorſim affixi laminæ BB. Notanda vero in gnomone NQ pars deorſum prominens Q, quæ oblongo foramine patens transmittit axem LM, ſimulque retinet eum quem rotæ K tympanoque I communem eſſe diximus, inferiori ſui parte gnomoni R [3]) innitentem. In lamina BB foramen amplum excavatum eſt, quo ultra ipſam extendatur axis pinnatus LM, qui ſubtili cuſpide inſertus gnomoni P, liberius ita movetur quam ſi ab ipſa lamina BB ſuſtineretur ſimulque ultra eam promineret, debet enim prominere

---

exemplaire (voir la p. 67 qui précède) Huygens a biffé la lettre N en écrivant en marge „R quæ in figura omissa est". Dans ce qui suit nous tenons compte des corrections de ce genre sans en faire mention dans les notes. Après avoir de plus ajouté une douzaine de corrections manuscrites aux „Corrigenda" mentionnés, Huygens observe encore: „Multa diagrammata verso folio repetenda fuerant, quod omissum magno lectorum incommodo". Toutefois quelques figures avaient été répétées. 's Gravesande dans son édition de 1724 a tenu compte des corrections manuscrites (voir p.e. la note 1 de la p. 308 qui suit). Chez lui les figures ne sont pas incorporées dans le texte; elles occupent 27 planches.

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

prolongeait en même temps au travers d'elle: elle doit en effet néceſſairement ſe prolonger de ce côté-là afin que la manivelle S puiſſe y être attachée pour oſciller avec elle. Car il s'agit d'un mouvement oſcillant ou alternatif puiſque les dents de la roue K frappent à tour de rôle les palettes LL d'une manière fort connue et qui pour cette raiſon n'exige pas d'explication plus ample.

Quant à la manivelle S dont la partie inférieure eſt recourbée et percée d'un trou oblong, elle embraſſe la verge de fer du pendule à laquelle eſt attaché le plomb X. Cette verge eſt ſuſpendue en haut à un double fil entre deux petites lames dont l'une ſeulement, ſavoir T, eſt ici viſible. Pour cette raiſon nous avons tracé à côté une deuxième figure [Fig. 17 II] deſtinée à faire voir la forme et la courbure de l'une et de l'autre et toute la manière de ſuſpendre le pendule. Nous devrons toutefois revenir ſur ce ſujet et différer amplement ſur la véritable courbure des lames.

Parlons maintenant du mouvement de l'horloge; nous expliquerons plus loin les autres parties de la figure. Il paraît facilement que d'une part le mouvement du pendule VX eſt entretenu par la force des roues tirées par les poids après que ce mouvement lui a été donné au début par la main, et que d'autre part les oſcillations déterminées du pendule impoſent à toutes les roues et par conſéquent à l'horloge entière la loi et la règle du mouvement. En effet, la manivelle, quelque légère que ſoit l'impulſion qui lui eſt communiquée par les roues, ne ſuit pas ſeulement le pendule qui l'entraîne, mais contribue auſſi quelque choſe à ſon mouvement à chaque va-et-vient durant un temps très court; elle perpétue donc le mouvement qui ſans ce ſecours manquerait peu à peu de lui-même ou plutôt par la réſiſtance de l'air et tendrait au repos. D'autre part, le pendule ayant cette propriété d'avoir toujours la même allure et de ne s'en écarter que lorſque ſa longueur change, il n'eſt nullement permis à la roue K (du moins après que nous avons obtenu l'égalité d'allure dont nous parlions au moyen de la courbure des lames entre leſquelles le pendule eſt ſuſpendu) d'aller tantôt plus vite et tantôt plus lentement, quoiqu'elle tâche ſouvent de le faire comme elle en a l'occaſion dans les horloges vulgaires: ici toutes ſes dents doivent néceſſairement paſſer l'une après l'autre dans des temps égaux. Il eſt donc manifeſte que les converſions des roues précédentes ainſi que celles des aiguilles, qui ſont les dernières, ſont auſſi rendues uniformes, vu que toutes les parties ſe meuvent proportionnellement. Par conſéquent s'il y a quelque défaut dans la conſtruction, ou qu'à cauſe du changement de temps les axes des roues tournent plus difficilement, pourvu que cette difficulté ne ſoit pas aſſez grande pour amener l'arrêt complet de l'horloge, il n'y aura néanmoins à craindre aucune inégalité ou retardation du mouvement: toujours l'horloge meſurera bien le temps à moins qu'elle ne le meſure pas du tout.

Les aiguilles tournent et ſont diſpoſées de la façon ſuivante. YY eſt une troiſième platine parallèle aux deux premières, diſtante de celle qui eſt marquée AA de la quatrième partie d'un pouce. Sur elle les cercles horaires ſont décrits du centre α où émerge l'axe de la roue C. De ces cercles l'intérieur a la diviſion de douze heures, l'autre de ſoixante minutes. Or, à l'axe de la roue C eſt attachée, au-delà de la platine

neceſſario ut affigi poſſit clavula S, quæ ſimul cum eo verſationes faciat. Eſt autem hic motus reciprocus, nunc in hanc nunc in illam partem quum dentes rotæ K alternatim occurrant pinnulis LL, notâ vulgo ratione, quæque proinde diligentiori explicatione non indiget. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Porro clavula S, ima ſui parte reflexa ac foramine oblongo terebrata, penduli virgam ferream, cui plumbum X affixum eſt, amplectitur. Hæc vero virga ſupernè duplici filo ſuſpenſa eſt inter geminas lamellas, quarum una T hic tantum cernitur; itaque alteram figuram [Fig. 17 II] juxta deſcripſimus, quæ utriusque formam flexumque & totam hanc ſuſpendendi penduli rationem exprimeret. Quanquam de vera laminarum iſtarum curvatura pluribus poſtea agendum erit. (p. 6).

Nunc autem ut de motu horologii dicamus, nam reliquas figuræ partes poſtea exequemur, facile equidem apparet & vi rotarum, à pondere tractarum, perpendiculi VX motum ſuſtentari, poſtquam ſemel manu incitatum fuerit; & ſimul perpendiculi ſtatos recurſus rotis univerſis, totique adeo horologio movendi legem normamque præſcribere. Clavula enim, quantumvis levi rotarum impulſu acta, non tantum obſequitur trahenti perpendiculo, ſed & ſingulis recurſibus paulisper ejus motum adjuvat, atque ita perennem reddit, qui alioqui ſua ſponte, vel verius occurſu aëris, deficeret paulatim, vergeretque ad quietem. Rurſus vero, quum ejusmodi ſit natura penduli ut eodem ſemper tenore feratur, neque ab eo ulla ratione præterquam mutata longitudine dimoveri poſſit; utique poſtquam flexu lamellarum, inter quas ſuſpenſum eſt, æqualitatem illam conſequuti ſuimus, nequaquam permittitur rotæ K, ut nunc citius nunc tardius incedat, etſi ſæpe, ut in vulgaribus horologiis, id facere conetur; ſed neceſſario ſinguli dentes ejus coguntur æqualibus tranſire temporibus. Hinc vero manifeſtum eſt, & reliquarum quæ præcedunt rotarum, & denique etiam indicum æquabiles converſiones effici, cum omnia proportionaliter moveantur. Quamobrem ſiquid in fabrica vitii fuerit, vel, ob aëris mutatam temperiem, difficilius rotarum axes volvantur; dummodo non eo usque ut omnis horologii motus interrumpatur; nulla propter hæc inæqualitas aut motus retardatio timenda erit, ſemperque aut rectè tempus metietur aut omnino non metietur.

Indices porro hoc pacto circumaguntur atque ordinantur. Tertia lamina prioribus parallela eſt YY, pollicis quarta parte diſtans ab ea quæ notatur AA. In ea circuli horarii deſcripti ſunt centrum eodem α quo protenditur axis rotæ C. Quorum circulorum interior duodecim horarum diviſionem habet, alter ſcrupulorum 60. Axi vero rotæ C aptatur, ultra laminam AA, rota β, tubulo cohærens qui usque ad ε continuatur

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

AA, la roue β faisant corps avec un petit tuyau qui se continue jusqu'en ε au travers de la platine YY: la roue β est donc ainsi placée sur cet axe qu'elle participe à son mouvement de rotation, mais peut néanmoins être tournée séparément lorsqu'il en est besoin. Vers ε on met sur l'axe une aiguille qui fera son tour en une heure et montrera ainsi les minutes ou soixantièmes parties de l'heure. Mais la roue que nous avons appelée β pousse une autre roue d'un nombre égal de dents et en même temps un pignon de six faisant corps avec elle, le petit axe commun des deux étant soutenu d'un côté par la platine A, de l'autre par le gnomon δ. C'est par ce pignon que la dernière roue ζ est mise en mouvement; elle a 72 dents et un tuyau faisant corps avec elle qui se prolonge lui aussi au-delà de la platine Y jusqu'en θ, qui est un peu plus proche de la platine que le tuyau de la roue β, ce dernier étant entouré par le tuyau de la roue ζ. A l'extrémité θ est attachée l'aiguille horaire, un peu plus courte que celle des minutes dont nous avons parlé, vu que l'aiguille des heures doit décrire une circonférence divisée en soixante parties et, une ouverture ayant été pratiquée en Z dans la platine Y, ces divisions sont indiquées tandis qu'elles passent devant l'ouverture par une pointe attachée au haut du trou. Toute cette disposition des aiguilles et des cercles horaires est aperçue plus nettement dans la figure plus petite [Fig. 17 III] qui représente la forme extérieure de l'horloge.

Il faut en outre que, les roues étant arrangées comme nous l'avons dit, la longueur du pendule soit telle qu'elle mesure les secondes par ses oscillations simples; cette longueur est celle de trois pieds. Puisqu'on ne pouvait commodement dans la figure la faire voir comme elle est, nous en avons représenté [Fig. 17 I] la cinquième partie depuis l'attache d'en haut où commence la courbure de la lame T jusqu'au centre du poids X. Je dis trois pieds, non pas de ceux qui sont en usage chez l'une ou l'autre nation européenne, mais à l'égard d'une mesure du pied déterminée précisément par la longueur de ce pendule. Qu'il nous soit permis d'appeler cette mesure dans la suite le PIED HORAIRE. C'est sûrement à elle que doivent être comparées les longueurs de tous les autres pieds dont nous voudrons laisser la connaissance certaine à la postérité. Pour en donner un exemple: les siècles à venir n'ignoreront jamais la longueur du pied parisien, aussi longtemps qu'on saura que son rapport à celle du pied horaire est de 864 à 881. Mais nous parlerons plus amplement dans les chapitres qui traitent du centre d'oscillation de la détermination exacte de cette longueur [1]). Présentement nous marquerons, puisque le sujet nous amène à considérer ces détails, les temps des conversions des différentes roues et aiguilles, afin qu'on entende que toutes choses cadrent exactement avec le nombre des dents susdites.

Il paraît donc que par une conversion de la roue C la roue F tourne dix fois, la roue H soixante fois et la roue la plus haute K cent vingt fois: comme cette dernière a quinze dents et que les palettes LL sont alternativement frappées par elles, on comptera 30 coups pendant une conversion de la roue K auxquels correspondent autant d'oscillations simples du pendule VX. À 120 conversions correspondront donc 3600 oscillations simples et c'est là le nombre des secondes qui font l'heure. Par con-

trans laminam YY; atque ita | insidet axi illi, ut una cum illo circumferatur; sine illo (p. 7).
tamen, ubi opus fuerit, converti possit. Ad ε index imponitur, horæ spatio circuiturus DESCRIPTIO HOROLOGII.
atque ita scrupula prima, seu sexagesimas horarum, demonstraturus. Rota vero quam diximus β, aliam rotam, totidem quot ipsa habet dentium, impellit, atque una affixum ei tympanum cui dentes sex, axiculo eorum communi hinc laminâ A, inde gnomone δ suffulto. Hoc tandem tympano rota ζ movetur, dentes habens 72, tubulumque affixum qui & ipse ultra laminam Y ad θ porrigitur, paulo citra quam definit tubulus rotæ β, quem intra se complectitur. Parte extrema θ apponitur horarius index, brevior aliquanto illo quem scrupula prima signare diximus, cum interiore gyro ferri debeat. Secunda vero scrupula ut absque errore demonstrentur, imponitur axi rotæ H, usque ad laminam Y producto, orbis λ, cui circulus in sexaginta partes divisus inscribitur, incisoque in laminâ Y foramine ad Z, eæ divisiones, cuspide in summo foramine defixâ, prætereuntes notantur. Hæc vero tota indicum circulorumque horariorum dispositio ex figura minori [Fig. 17 III] clarius perspicitur, exteriorem horologii formam referente.

Cæterum penduli longitudinem, rotis quemadmodum diximus ordinatis, eam esse oportet ut scrupula secunda singulis recursibus metiatur, quæ longitudo tripedalis est & commodè in schemate exhiberi non potuit. Tripedalem dico, non alicujus respectu pedis qui apud Europæ gentem hanc illamve in usu sit, sed certo æternoque pedis modulo ab ipsa hujus penduli longitudine desumpto, quem PEDEM HORARIUM in posterum appellare liceat, ad illam enim omnium aliorum pedum mensuræ referri debent quas incorruptas posteris tradere voluerimus. Neque enim, verbi gratiâ, ignorabitur unquam venturis sæculis Parisini pedis modus, dum constabit eum ad Pedem Horarium esse ut 864 ad 881. Sed de hujus mensuræ exactissima constitutione pluribus agemus in iis quæ de Centro Oscillationis [1]). nunc tempora conversionum in singulis rotis indicibusque obiter designabimus, ut rectè omnia ad dentium supra descriptorum numerum quadrare intelligantur.

Ergo una quidem conversione rotæ C, decies circumire apparet rotam F, sexagies vero rotam H, & centies vicies supremam K: cui quum dentes sint quindecim, iisque alternatim pulsentur pin|nulæ LL, una conversione rotæ K numerabuntur ictus 30, (p. 8).
quibus respondent totidem itus reditusque penduli VX. ideoque conversionibus 120, respondebunt oscillationes simplices 3600, qui numerus est scrupulorum secundorum

[1]) Voir la Prop. XXV de la Pars Quarta qui suit (p. 151 de l'édition originale).

Description de l'horloge.

féquent la roue C fait un tour en une heure et avec elle l'aiguille attachée en E qui indique les minutes. Et comme la roue β, et par elle γ, tourne dans le même efpace de temps avec fon petit pignon de fix duquel nombre celui des dents de la roue ζ eft le dodécuple, il apparaît que cette dernière ne fait un tour complet qu'en douze heures et qu'il en eft de même pour l'aiguille qui y eft attachée en θ. Enfin comme nous avons montré que foixante tours de la roue H correfpondent à chaque converfion de la roue C, il s'enfuit que la première, avec le cercle λ qui y eft attaché, tourne foixante fois par heure, c.à.d. une fois par minute; les foixantièmes parties du cercle λ montreront donc les fecondes par leur paffage [devant l'ouverture]. Il fera donc manifefte que tout eft bien ordonné. Le poids X à l'extrémité inférieure du pendule eft de trois livres, tout de plomb, ou le contenant fous une fuperficie de cuivre. Ce n'eft d'ailleurs pas feulement par le poids du métal mais auffi par fa forme qu'il faut effectuer (car la chofe eft de grande importance) que le pendule éprouve une réfiftance auffi faible que poffible de la part de l'air. Le poids eft par conféquent façonné en forme de cylindre couché, long, fort aigu des deux côtés, tel qu'on le voit en *a* dans la plus petite des deux figures de l'horloge [Fig. 17 III]. Toutefois en celles qu'on conftruit pour la navigation, la forme d'une lentille élevée a femblé plus propre [1]).

Dans la même figure on a repréfenté de plus la manière de fufpendre le deuxième poids *b*, celui qui fert à entretenir le mouvement de l'horloge: nous avons néceffairement dû inventer cette fufpenfion auparavant inconnue [2]), afin que la marche de l'horloge ne foit en aucune façon interrompue ou empêchée pendant qu'on remonte ce poids, à quoi il fallait abfolument prendre garde. On prépare donc une corde continue qui retourne en elle-même par l'exacte jonction de fes extrémités. Cette corde paffe fur la première poulie, appelée D dans la plus grande figure, qui fait corps avec la roue la plus baffe; defcendant de là, pour fuivre cette direction, elle paffe fous la poulie *c* à laquelle le poids *b* eft fufpendu. De là elle remonte jufqu'au-deffus de la poulie *d* extérieurement attachée à l'horloge et pourvue de pointes de fer fur toute fa circonférence; cette poulie eft de plus munie de dents en façon de fcie de forte qu'elle tourne lorfqu'on tire la corde *e*, mais qu'elle ne peut aucunement faire une révolution en fens inverfe. À partir de cette poulie la corde defcend jufqu'à l'autre poulie *f* à laquelle eft fufpendu un petit contrepoids *g* affez confidérable pour empêcher le poids *b* de defcendre autrement qu'en faifant tourner la poulie *d*. En effet, à partir de la poulie *f* la corde retourne de nouveau à cette même poulie *d* d'où elle provenait. Il eft manifefte que par cet arrangement le poids *b* tend toujours par la moitié de fa gravité à faire tourner les roues de l'horloge et qu'il ne ceffe pas même de le faire quand il eft contraint de monter lorfque la main tire la corde *e*; de forte que le mouvement de l'horloge n'eft jamais interrompu et qu'aucun retard ne réfulte du remontage.

On ne peut fixer avec certitude la grandeur du poids *b*: plus le poids qui fuffit à entretenir le mouvement eft petit, plus auffi feront grandes les qualités et l'exactitude de la conftruction de l'automate. Dans les meilleures horloges que nous avons jufqu'aujourd'hui, le poids moteur eft réduit à fix livres, le diamètre de la poulie D ayant été

unam horam efficientium. Itaque horæ tempore ſemel circumit rota C, cumque ea ſimul index ad E impoſitus, qui ſcrupula prima demonſtrat. Et quoniam eodem temporis ſpatio etiam rota β, & per eam γ, convertitur, cum tympanidio ſuo dentium ſex, ad quem numerum duodecuplus eſt numerus dentium rotæ ζ, apparet duodecim demum horis hanc circumduci, totidemque indicem illi conjunctum in θ. Denique cum rotæ H ſexaginta converſiones reſpondere oſtenderimus ſingulis converſionibus rotæ C, hinc illa, una cum affixo orbe λ, ſexagies in ſingulas horas circumferetur, hoc eſt, ſemel unius ſcrupuli primi tempore, ideoque partes ſexageſimæ orbiculi λ ſecunda ſcrupula tranſitu ſuo oſtendent: atque ita omnia rectè ſe habere manifeſtum erit. Pondus X in imo perpendiculo trilibre eſt, plumbeum totum, vel ænea ſuperficie plumbum continente. Nec tantum metalli gravitate ſed & figurâ inſuper proſpiciendum (plurimi enim refert) ut quam minimum occurſu aëris impedimentum ſentiat. Eoque in cylindri jacentis oblongi & utrinque præacuti formam fingitur, qualis cernitur ad *a* ſchemate horologii minore [Fig. 17 III]. Quanquam in his quæ ad navigationem parantur, forma lentis erectæ aptior viſa eſt [1]). Descriptio Horologii.

Porro eodem ſchemate & ponderis alterius *b*, quo motus horologii continuatur, ſuſpendendi ratio expreſſa eſt, quam, incognitam prius [2]), inveſtigare nobis neceſſe fuit, ne interim dum ſurſum retrahitur pondus iſtud, ceſſaret vel impediretur aliquatenus horologii curſus, quod hic omnino cavendum erat. Paratur itaque funis continuus atque in ſe rediens, extremitatibus apte inter ſe connexis. Is primum orbiculum rotæ infimæ conjunctum, qui in ſchemate majori notatus eſt D, amplectitur; inde deſcendens, altera ſui parte trochleam *c*, cui pondus *b* appenſum eſt, ſubit. Hinc ſuper orbiculum *d* aſcendit, extrinſecus horologio affixum, qui ferreos per circumferentiam aculeos habet, atque inſuper ferratis dentibus ita eſt aptatus ut volvatur tracto fune *e*; nequaquam vero in partem contrariam revolvi poſſit. Ab hoc orbiculo deſcendit funis ad alteram trochleam *f*, cui pondus exiguum *g* appenditur, quantum ſufficit continendo majori *b*, ne aliter quam revoluto orbiculo deſcendat. Namque à trochlea *f* rurſus ad ipſum orbiculum D, unde deſcenderat, funis revertitur. Quibus ita | ſe habentibus, (*p. 9*). manifeſtum eſt ſemper pondus *b* dimidia ſui gravitate conari ut rotas horologii circumagat, nec tunc quidem ceſſare cum manu funem *e* trahente aſcendere cogitur; adeoque horologii motum nusquam interrumpi, nec momentum temporis deperdi.

Gravitatis modus in pondere *b* definiri certo non poteſt, ſed quo minor conſervando motui ſuffecerit, eo melius accuratiusque fabrefactum automaton arguet. In noſtris, quæ optima hactenus habemus, ad ſex libras redactum eſt, poſita nimirum orbiculi D

[1]) Voir les Fig. 8, 9 et 11 qui précèdent et 21 qui suit.
[2]) Voir les p. 64 et 65 du T. XVII.

Description de l'horloge.

fixé à la grandeur d'un pouce à peu près comme la figure l'indique, et le poids du pendule à trois livres, sa longueur à autant de pieds. La longue verge du pendule, pour mentionner encore ce détail, passera par la partie inférieure de la cage de l'horloge à travers un trou assez large pour rendre les oscillations possibles. Quant à l'horloge elle-même, laquelle est suspendue à hauteur d'homme, elle marche 30 heures.

Reste à décrire la forme des lames entre lesquelles nous avons dit que le pendule est attaché [Fig. 17 II] et dont la fonction fort importante est de rendre sa période constante. En effet, sans elles les oscillations simples du pendule (quoique d'aucuns aient pensé différemment [1])) ne seront pas isochrones mais les plus étroites auront une période plus courte. C'est ce qu'on découvre aisément par l'expérience suivante: si l'on prend deux fils de même longueur, portant des poids égaux et suspendus séparément, qu'on écarte l'un beaucoup, l'autre peu, de la perpendiculaire et qu'on les lâche simultanément, on ne les verra pas longtemps mouvoir ensemble dans le même sens mais celui dont les oscillations sont plus étroites prendra l'avance. D'autre part on peut aussi trouver les rapports des temps correspondant à des arcs quelconques; on les exprimera en nombres calculés d'après des principes bien établis et aussi proches qu'on voudra. On peut dire par exemple que le temps d'une chute le long de tout un quart de circonférence est à celui qui correspond à un très petit arc à peu près comme 34 est à 29 [2]). De sorte qu'on ne doit aucunement attribuer cette diversité à la résistance de l'air, comme quelques-uns l'ont voulu [3]), mais qu'elle provient de la nature même du mouvement et de celle du cercle. On pourrait encore tirer cette conclusion de la construction du pendule isochrone, vu que celui-ci s'écarte notablement dans son mouvement de la circonférence de cercle, comme cela paraîtra bientôt.

Il pourra peut-être sembler que dans nos horloges du genre ici considéré, où l'amplitude des oscillations est toujours la même, l'inégalité dont nous parlions n'aura aucune importance et que par conséquent aucune correction du pendule ne sera nécessaire. Il en serait vraiment ainsi si l'amplitude de toutes les oscillations était constamment et absolument la même. Mais comme elle est quelquefois un peu plus grande et d'autres fois un peu plus petite, une assez grande différence résulte enfin de ce grand nombre de différences fort minimes; c'est ce que l'effet et les expériences font bien voir. Car quoique la force du poids par rapport à la prochaine roue soit toujours la même, cependant, étant transmise par tant d'autres, avec quelque soin qu'on les ait limées, elle ne parvient pas toujours en même intensité au pendule. D'ailleurs le mouvement des roues est aussi rendu plus difficile par le froid et par la disparition ou la corruption de l'huile qu'on y verse. Mais ce sont surtout les oscillations des horloges marines qui deviennent inégales à cause du ballottement continuel du navire, de sorte qu'il faut sans doute corriger le défaut d'inégalité chez toutes les horloges, mais que c'est surtout dans le cas des horloges marines qu'il faut veiller à ce que les oscillations de grande et de petite amplitude soient isochrones.

---

[1]) Comparez la note 1 de la p. 4 du T. XVII.

diametro pollicari fere, uti exhibita fuit; item perpendiculi pondere trilibri, ac totidem pedum longitudine. Quæ longitudo, ut hoc etiam admoneamus, trans capſam horologii dependet, oblongo foramine perviam, quantum oſcillationibus peragendis neceſſe eſt. Ipſum vero horologium, ad hominis altitudinem ſuſpenſum, horis 30 moveri perſeverat. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Supereſt nunc forma lamellarum deſcribenda inter quas perpendiculum affigi diximus, quarumque ad æquabilem horologio motum præſtandum vel præcipua eſt opera. Absque his enim Penduli ſimplicis oſcillationes (etſi nonnullis aliter viſum eſt [1])) non erunt æque diuturnæ, ſed brevioris temporis eæ quæ per minores arcus incedent; idque primùm experimento hujusmodi facile deprehenditur. Si enim fila accipiantur ejusdem longitudinis duo, paribusque in parte ima ponderibus religatis, utrumque ſeorſim ſuſpendatur, tumque alterum eorum procul à linea perpendiculari, alterum parumper duntaxat extrahatur, ſimulque è manu dimittantur; non diu utrumque ſimul in partes easdem ferri videbitur, ſed prævertet illud cujus exiliores erunt recurſus. Sed & temporum per quoslibet arcus rationes numeris definiri poſſunt, certâ ſcientiâ nixis, & vero quam libuerit propinquis, veluti quod tempus deſcenſus per totum circuli quadrantem eſt ad tempus per arcum minimum fere ut 34 ad 29 [2]). Adeo ut nequaquam reſiſtentiæ aëris ea diverſitas imputanda ſit, ut quidam voluere [3]), ſed ex ipſa motus natura circulique proprietate naſcatur. Quod alio quoque argumento concludi poſſit ex ipſa Penduli iſochroni conſtructione, ubi à circulari linea haud parum receditur, uti mox patebit.

Sed videatur forſan in noſtris horologiis hiſce, ubi eadem ſemper eſt oſcillationum latitudo, nullius momenti futura quam diximus inæqualitas, adeoque nec correctione ulla perpendiculi opus fore. Quod ſane ita eſſet ſi latitudo omnium planè eadem | conſtanter maneret. Sed cum pauxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiolis tandem magna ſatis conflatur, idque ita eſſe reipſa atque experimentis evincitur. Etſi enim eadem ſemper ſit ponderis vis, rotæ ſibi proximæ reſpectu, tamen per tot alias transdita, quantâcunque curâ limatæ fuerint, non ſemper eadam ad perpendiculum usque pervenit. Præterquam quod frigore quoque difficilior motus rotarum efficitur; itemque evaneſcente aut ſordeſcente quod illis additur oleo. Sed præcipue inæquales fiunt oſcillationes horologiis quæ mari vehuntur, ob jactationem navis continuam, adeo ut omnibus quidem in univerſum, ſed his maxime omnium remedio opus ſit, quo reciprocationum Penduli latiorum anguſtiorumque tempora æqualia evadant. (p. 10).

---

[2]) 34 : 29 = 1,172 . . , tandis que la vraie valeur est 1,180 . . , comme Huygens l'a trouvé plus tard. Voir sur ce sujet l'Appendice II à la Pars Prima qui suit.

[3]) À la deuxième page de la „Præfatio generalis" de ses „Cogitata Physico-mathematica" de 1644 Mersenne attribue à la résistance de l'air l'inégalité des périodes d'oscillations d'amplitudes différentes.

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

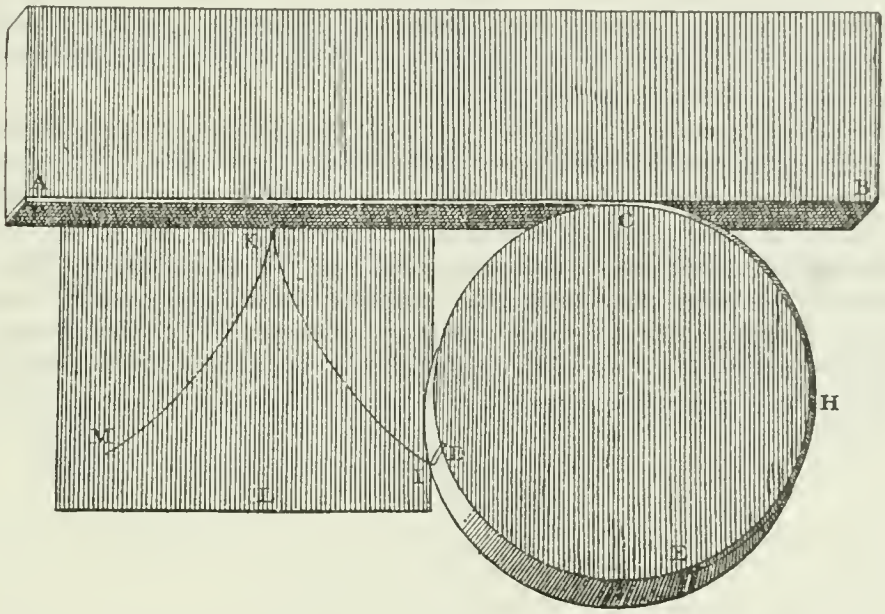
Or, pour pouvoir définir la forme des lames dans lesquelles le remède consiste, il faut d'abord avoir déterminé la longueur du pendule, laquelle est facilement déduite de la règle que les longueurs des pendules sont entre elles comme les carrés des périodes. De sorte que, la longueur du pendule qui mesure les secondes étant d'après notre définition de trois pieds, sa quatrième partie, c.à.d. neuf pouces, conviennent au pendule qui marquera les demi-secondes. De même si l'on demande la longueur du pendule dont les oscillations simples atteignent le chiffre de 10000 en une heure, le calcul sera fait comme suit. Nous savons qu'on compte 3600 oscillations simples par heure dans le cas du pendule de trois pieds; la période de ce pendule surpasse donc celle du pendule cherché dans le rapport 10000 : 3600 ou 25 : 9. Par conséquent comme le carré du nombre 25 est au carré de 9, c.à.d. comme 625 est à 81, ainsi sera la longueur de trois pieds à la longueur cherchée, qui est donc de $4\frac{66}{100}$ pouces.

Après que la longueur du pendule à été fixée de cette manière (p. e. à trois pieds, dans le cas de l'horloge proposée par nous), la ligne cycloïdale qui donnera la courbure des lames T sera décrite de la façon suivante.

Soit attachée sur une table plane la règle AB grosse d'un demi-doigt [Fig. 18]. Ensuite soit fait un cylindre CDE d'une hauteur égale à cette grosseur et ayant le diamètre de la base égal à la moitié de la longueur du pendule; et soit FGHE une petite bande ou plutôt une mince plaque attachée à la règle en F et à la circonférence du cylindre en quelque point E, de sorte qu'elle s'applique en partie au cylindre et qu'en partie elle s'étende le long de la règle AB. Qu'une pointe de fer DI soit attachée

Ad definiendam ergo lamellarum formam in quibus positum est remedium istud, in primis Penduli longitudinem statuisse oportet, quæ facile ex eo habetur, quod sint inter se longitudines perpendiculorum, sicut temporum quæ in singulos recursus impenduntur quadrata. Adeo ut cum tribus pedibus definiverimus longitudinem perpendiculi quod scrupula secunda metitur, ejus quarta pars, sive unciæ novem debeantur ei quod semisecunda notaturum sit. Item si Penduli longitudo quæratur, cujus recursus simplices 10000 horæ spatio peragantur, hoc modo ratio inibitur. Penduli nempe DESCRIPTIO HOROLOGII.

[Fig. 18.]



tripedalis scimus 3600 recursus in horas singulas numerari: ergo hujus recursuum tempora singula, majora sunt temporibus Penduli quæsiti, proportione 10000 ad 3600, sive 25 ad 9. Quare ut quadratum numeri 25 ad quadratum 9, hoc est, ut 625 ad 81, ita erit longitudo pedum 3 ad eam quæ quærebatur, nempe unciarum 4 cum $\frac{66}{100}$.

Posita ergo longitudine perpendiculi, puta pedum trium in horologio à nobis proposito, inde Cyclois linea, quæ curvaturam laminarum T datura est, hoc modo describetur.

Super tabula plana affigatur regula AB, semidigiti crassitudine [Fig. 18]. Deinde fiat cylindrus CDE eadem illa altitudine, diametrum vero basis, dimidiæ perpendiculi longitudini, æqualem habens; sitque FGHE fasciola, seu potius bractea tenuis, affixa regulæ in F, cylindro verò in circumferentiæ puncto aliquo E, ita ut partim huic circumvoluta sit, partim extendatur juxta latus regulæ AB. Cylindro autem infixa

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

au cylindre laquelle ait ſon extrémité un peu au-delà de la baſe inférieure et en façon qu'elle réponde exactement à ſa circonférence.

Les choſes étant ainſi arrangées, la pointe I décrira ſur le plan de la table placée au-deſſous la ligne courbe KI appelée cycloïde, auſſitôt que le cylindre tourne en ſuivant la règle AB, dont il n'eſt ſéparé que par la groſſeur de la petite lame FG. La baſe du cylindre employé ſera le cercle générateur, CDE, de la cycloïde. Or, après que nous avons appliqué à la règle AB la table ou lame KL et que la partie KI de la cycloïde y a été tracée, nous retournerons cette lame et tracerons ſur l'autre côté une ligne ſemblable KM émanant du même point K. Enſuite nous découperons la figure MKI exactement ſuivant ces lignes. C'eſt à cette figure-là qu'il faut adapter l'intervalle des lames entre leſquelles le pendule eſt ſuſpendu [1]). À l'uſage des horloges les petites portions d'arcs KM et KI ſuffiſent; le reſte de la ligne courbe ſerait inutile puiſque le fil du pendule ne peut l'atteindre.

Mais afin qu'on entende plus pleinement la nature et l'effet de cette ligne admirable, il m'a ſemblé bon de repréſenter ici dans une autre figure [Fig. 19] les ſemicycloïdes entières KM et KI entre leſquelles le pendule KNP, d'une longueur égale à deux fois le diamètre du cercle générateur, eſt ſuſpendu, lequel étant mis en mouvement exécutera des oſcillations iſochrones, quelle que ſoit leur amplitude, juſqu'à la plus grande de toutes correſpondant à l'arc MPI: de telle manière que le centre de la ſphère P attachée au fil ſe trouve toujours ſur la ligne MPI qui eſt elle auſſi une cycloïde. J'ignore ſi cette propriété remarquable eſt donnée à aucune autre ligne, ſavoir celle de ſe décrire ſoi-même par ſon évolution [2]). Or, ce que nous avons dit à

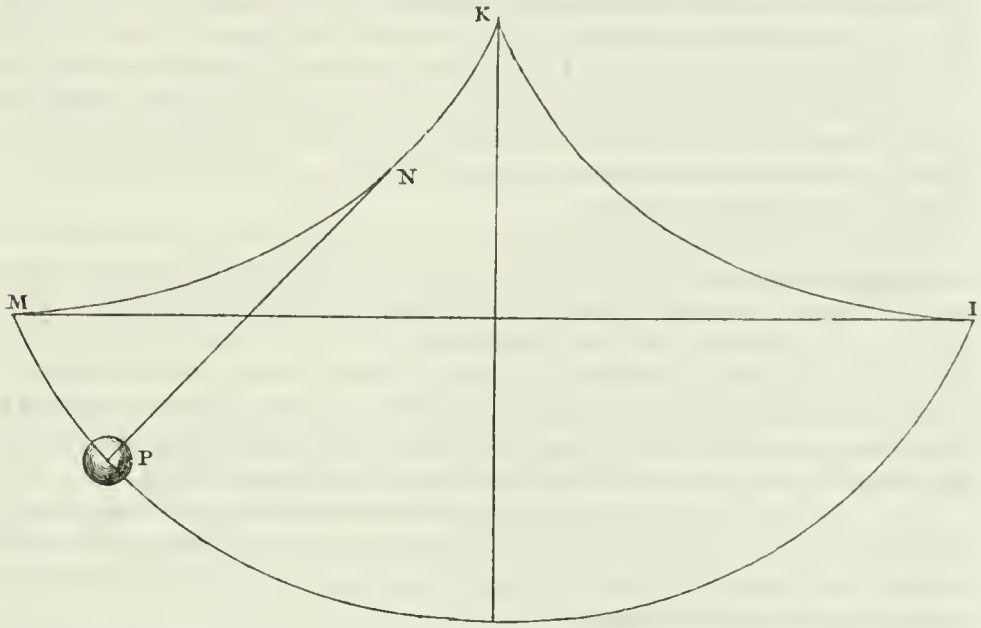
[1]) Voir la fin du premier alinéa de la note 3 de la p. 99 du T. XVII.

[2]) Voir sur ce sujet la p. 40 de l'Avertissement qui précède et l'Appendice III à la Pars Tertia.

ſit ferrea cuſpis DI, pauxillum ultra baſin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exacte reſpondeat. DESCRIPTIO HOROLOGII.

His ita ſe habentibus, ſi cylindrus ſecundum regulam AB volvatur, bracteolæ tantum FG craſſitudine intercedente, eâque ſemper quantum poteſt extenſâ, deſcribet cuſpis I in ſubjecto tabulæ plano lineam curvam KI, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit CDE, cylindri adhibiti baſis. Quod ſi jam laminam KL ad regulam AB applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione KI, invertemus deinde (p. 11).

[Fig. 19.]



ipſam, & in ſuperficie adverſa ſimilem lineam KM, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram MKI, accurate ſecundum lineas iſtas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interſtitium aptari oportet, inter quas perpendiculum ſuſpenditur [1]). Sufficiunt autem ad horologiorum uſum portiones exiguæ arcuum KM, KI; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non poteſt.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras ſemicycloides KM, KI, alio ſchemate [Fig. 19] hic exprimere viſum fuit, inter quas ſuſpenſum agitatumque Pendulum KNP, diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oſcillationes, usque ad maximam omnium per arcum MPI, iisdem temporibus confecturum ſit: atque ita, ut appenſæ ſphæræ P centrum, in linea MPI, quæ & ipſa cyclois integra eſt, ſemper verſetur. Quæ proprietas inſignis, neſcio an alii præter hanc lineæ data ſit, ut nempe ſe ipſam ſui evolutione deſcribat [2]). Hæc autem

Description de l'horloge.

propos d'elle ſera démontré en détail lorſque nous traiterons de la chute des corps graves et de l'évolution des courbes.

Obſervons encore qu'il y a une autre manière de tracer la cycloïde, ſavoir par points trouvés ſéparément. Soit décrite une circonférence de cercle de diamètre AB égal à la moitié de la longueur du pendule [Fig. 20]. Prenons ſur cette circonférence un nombre quelconque de parties égales AC, CD, DE, EF, AG, GH, HI, IK et joignons leurs extrémités par les droites GC, HD, IE, KF parallèles entre elles. Prenons enſuite la ligne droite LM égale à l'arc AF, diviſons-la en autant de parties égales qu'il y en a dans l'arc AF et portons des lignes CN et GO égales à une de ces parties ſur la droite CG. Portons enſuite ſur la droite DH les lignes DP et HQ égales chacune à deux parties de la droite LM; ſur la droite EI les lignes ER et IS égales chacune à trois parties de la droite LM, et ainſi de ſuite ſi l'on a pris un nombre plus grand de parties. Enfin ſoient FT et KV ſur la ligne extrême FK égales chacune à la ligne LM entière. Si l'on décrit maintenant des courbes par les points AOQSV et ANPRT, celles-ci feront de nouveau des portions de la cycloïde cherchée entre lesquelles il faut ſuſpendre le pendule [1]).

Or, la droite LM eſt trouvée égale à l'arc AF lorſqu'on prend d'abord XZ égale à la ſomme des deux cordes qui ſouſtendent les moitiés de cet arc et, à partir du même point, XY égale à la corde de l'arc AF entier, et qu'on ajoute enfin à la ligne XZ le tiers ZΔ de la différence YZ. Car la ligne entière XΔ ſera à ſi peu près égale à l'arc entier AF que, quand même ce dernier ſerait la ſixième partie de la circonférence (et une plus grande partie n'eſt jamais requiſe pour notre but), il n'y manque pas la ſix-millième partie de la véritable longueur, comme cela a été démontré dans ce que nous avons écrit auparavant ſur la grandeur de la circonférence de cercle [2]).

Après avoir fait connaître ce qui ſe rapporte à la conſtruction de l'horloge, nous devons maintenant expliquer auſſi de quelle manière on doit l'ajuſter pour qu'elle donne la vraie meſure des heures. On examinera en premier lieu, de la manière ſuivante, ſi ſon mouvement eſt juſte.

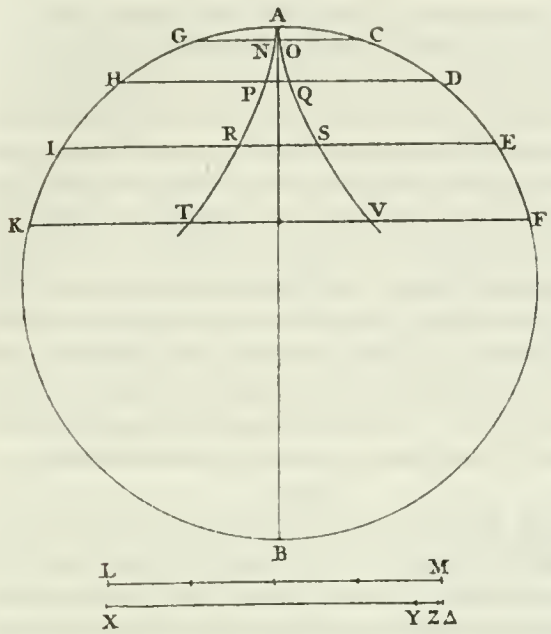
Qu'on choiſiſſe pour l'oeil de l'obſervateur un endroit bien déterminé d'où les aſtres peuvent être aperçus ainſi que des toits ou des murs d'édifices voiſins ainſi placés que lorſque certains d'entre les aſtres, du nombre des étoiles fixes, les atteignent, ces étoiles deviennent inviſibles à l'inſtant même. Il faut placer en cet endroit une ouverture de la grandeur de la pupille afin qu'on puiſſe les jours ſuivants remettre l'oeil au même point ſans aucune erreur. On doit marquer le temps indiqué par l'horloge au moment où une étoile arbitrairement choiſie diſparaît, et la même choſe le

---

[1]) Comparez la Fig. 22 à la p. 99 du T. XVII.

[2]) Voir à ce sujet les p. 146—149 du T. XII (Probl. III. Prop. XII du Traité „De circuli magnitudine inventa" de 1654).

[Fig. 20.]



quæ dicta ſunt, in ſequentibus, ubi de deſcenſu gravium, deque evolutione curvarum agemus, ſingula demonſtrabuntur. Descriptio Horologii.

Licebit autem aliter quoque, per inventa puncta, cycloidem deſignare. Deſcribatur circulus diametro AB, quæ dimidiæ longitudini perpendiculi æqualis ſit [Fig. 20]. In cujus circumferentia ſumptis partibus æqualibus quotlibet, AC, CD, DE, EF, AG, GH, HI, IK, jungantur GC, HD, IE, KF, quæ erunt inter ſe parallelæ. Deinde arcui AF ſumatur æqualis linea recta LM, eaque in partes æquales totidem dividatur quot ſunt in arcu AF, earumque partium uni æquales ponantur ſingulæ CN, GO in recta CG; duabus vero partibus rectæ LM, æquales fiant ſingulæ DP, HQ in recta DH. Tribus vero, ſingulæ ER, IS in recta EI; atque ita porro ſi partes plures fuerint acceptæ; ac tandem toti LM æquales fiant ſingulæ FT, KV in linea extrema FK. Jam ſi curvæ deſcribantur per puncta AOQSV, ANPRT, hæ rurſus quæſitæ cycloidis partes erunt, inter quas perpendiculum affigi oportet [1]. (p. 12).

Recta autem LM æqualis arcui AF invenitur, ſi primum duabus rectis, quæ ſemiſibus arcus AF ſubtenduntur, æqualis ponatur XZ, totius vero arcus ſubtenſæ AF æqualis ab eodem termino accipiatur XY, differentiæque YZ triens ZΔ ad totam XZ adponatur. Nam tota XΔ toti arcui AF tam prope æqualis erit, ut licet ſextans fuerit circumferentiæ, (neque major hic unquam requiritur) non una ſexies milleſima parte ſuæ longitudinis deficiat, uti in his, quæ de Circuli Magnitudine antehac ſcripſimus, demonſtratum eſt [2].

Explicitis quæ ad horologii fabricam attinent, nunc quoque illud declarandum eſt, quo pacto ad veram horarum menſuram componi debeat. Ergo primum, an recte ſe habeat motus ejus, hoc modo examinabitur.

Oculo obſervatoris certus eligatur locus, unde ſidera deſpici poſſint, ſimulque tecta parietesve vicinarum ædium, ſic poſita, ut, cum eò appulerint ſtellæ quædam è fixarum numero, ſimul videri deſinant. Eo loco foramen, ad pupillæ magnitudinem, conſtituatur, ut ſequentibus diebus, absque errore, oculus ad idem punctum reponi poſſit. Jam ad momentum ipſum, cum ſtellarum aliqua è conſpectu abit, notetur tempus horologio indicatum. Atque idem poſtero die, vel potius aliquot diebus intermiſſis, fiat. (p. 13).

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

jour ſuivant ou plutôt quelques jours plus tard. Que s'il n'y a qu'un intervalle d'un ſeul jour entre deux obſervations, il faut que dans la deuxième obſervation l'horloge indique la même heure que dans le cas de la première à 3 minutes et 56 ſecondes près. S'il en eſt ainſi il ſera établi que le pendule a la bonne longueur; car c'eſt là la différence de laquelle la durée d'une révolution quelconque des étoiles fixes ſurpaſſe celle du jour ſolaire moyen. Je dis le jour moyen puiſque les jours ſolaires, de midi à midi, ne ſont pas tous égaux entre eux, comme cela ſera plus amplement expliqué un peu plus loin. Mais ſi l'obſervation n'eſt répétée qu'après pluſieurs jours, il faudra compter la même différence pour chacun d'eux. Admettons par exemple que dans la première obſervation, au moment où l'étoile diſparait, l'heure de l'horloge ſoit 9 h. 30 m. 18 ſ. et qu'enſuite, ſept jours plus tard, elle indique, au moment de la diſparition de la même étoile, 8 h. 50 m. 24 ſ. La différence en moins de cette dernière indication par rapport à la première eſt de 39 m. 54 ſ.; laquelle, étant diviſée par 7, donne une retardation diurne de 5′42″. Mais elle devait être de 3′56″, inférieure à l'autre de 1′46″. C'eſt donc là le retard journalier de l'horloge par rapport à la meſure véritable ou moyenne des jours.

On pourra d'ailleurs comparer encore d'une autre manière le mouvement de l'horloge avec celui du ſoleil. Mais ici il faudra tenir compte de l'inégalité des jours naturels. En effet, comme je l'ai déjà dit, tous les jours naturels n'ont pas la même longueur, et quoique la différence ſoit petite elle monte cependant ſouvent durant un intervalle de pluſieurs jours à un total qui n'eſt aucunement négligeable. Car ſi l'on poſſède un cadran ſolaire de conſtruction parfaite et que d'autre part le mouvement de l'horloge automate eſt rendu abſolument conforme à la plus véritable meſure des jours et ne s'en écarte point, il adviendra cependant néceſſairement qu'à certaines époques de l'année les deux inſtruments montrent une différence d'un quart d'heure ou même d'une demi-heure et que derechef à d'autres époques bien déterminées ils s'accordent d'eux-mêmes. On le comprendra en conſidérant la table de l'équation du temps que nous ajoutons; mais il faut auparavant en expliquer l'uſage qui eſt celui-ci.

Qu'on prenne l'équation de la table correſpondant au jour auquel nous avons au début de nos obſervations mis l'horloge d'accord avec le ſoleil, en d'autres termes avec le cadran ſolaire. Qu'on prenne auſſi l'équation du jour auquel on demande avec quel degré d'exactitude l'horloge a été réglée ſur la durée des jours. Si alors la première équation ſurpaſſe la deuxième, l'heure de l'automate devra ſurpaſſer celle du cadran ſolaire de la même différence. Mais ſi l'équation du jour poſtérieur eſt trouvée plus grande, l'excès ſera du côté de l'heure du cadran, en d'autres termes de l'heure ſolaire. Suppoſons par exemple que le 5 mars le cadran ſolaire et l'automate s'accordent. On trouve dans la table pour ce jour une équation de 3 minutes et 11 ſecondes. Suppoſons enſuite qu'on veuille ſavoir le 20 du même mois ſi l'automate meſure correctement ou non les heures égales. On trouvera indiquée dans la table pour ce jour poſtérieur une équation de 7 minutes et 27 ſecondes. Comme cette dernière ſurpaſſe la précédente de 4 minutes et 16 ſecondes, l'heure du cadran devra ſurpaſſer d'autant

Quod ſi tantum unius diei ſpatium duabus obſervationibus interceſſerit, oportet in poſtrema obſervatione tempus horologii deficere ab illo, quod prima obſervatione annotatum fuerat, ſcrupulis primis 3, ſecundis 56. Ita enim rectè ſe habere perpendiculi longitudinem conſtabit; quum tanto ſuperetur quælibet ſiderum fixorum revolutio à die ſolari mediocri. Mediocri dico, quoniam dies ſolares, de meridie ad meridiem, non omnes inter ſe æquales ſunt, ut mox amplius exponetur. Si vero poſt plures demum dies obſervatio repetatur, in ſingulos tantundem differentiæ cauſa computandum erit. Sit, exempli gratiâ, in prima obſervatione, ad momentum evaneſcentis ſtellæ, adnotata horologii hora 9, cum ſcrupulis primis 30, ſecundis 18; deinde, ſeptimo poſt die, eâdem diſparente ſtellâ, indicet horam 8, cum ſcrupulis pr. 50, ſec. 24. Hæc hora deficit à priore ſcrupulis pr. 39, ſecundis 54. Quæ, in ſeptem diviſa, dant retardationem diurnam ſcrupulorum 5′. 42″. Debebat autem eſſe ſcrupulorum 3′. 56″. quæ illâ minor eſt ſcrupulis 1′. 46″. Itaque tantundem quotidie deficit horologium à vera, ſeu media, dierum menſura. (p. 14).

Cæterum alio quoque modo, ad ſolem, horologii motum examinare licebit. Sed hic jam inæqualitatis dierum naturalium ratio habenda erit. Sunt enim, ut jam dixi, non omnes ejusmodi dies inter ſe æquales; & quanquam exiguum ſit diſcrimen, tamen plurium dierum intervallo ſæpe eo usque excreſcit, ut haudquaquam contemni posſit. Etenim ſi & ſolarium quam perfectiſſime deſcriptum habeatur, & horologii automati motus ad veriſſimam dierum menſuram exactus ſit, neque ab ea recedat; eveniet tamen neceſſario ut, certis anni temporibus, ſæpe horæ quadrante, aut etiam ſemihora, inter ſe diſcrepent, ac rurſus ſtatis temporibus ultro concordent. Hoc enim ita eſſe, ex tabula temporis æquatoria quam ſubjicimus, intelligetur; poſtquam uſum ejus oſtenderimus, qui eſt hujusmodi.

Accipiatur æquatio tabulæ, aſſignata diei qua primum cum ſole, ſive cum ſciotherico, horologium ut conveniret fecimus. Itemque æquatio diei, qua quæritur quam bene ad dierum menſuram temperatum ſit. Quod ſi jam prior æquatio major fuerit ſequente, ſuperare debebit hora automati horam gnomonis eo, quo inter ſe æquationes iſtæ differunt. At ſi poſterioris diei æquatio major inveniatur, erit exceſſus penes horam gnomonis, ſive eam quæ ex ſole obſervatur. Ut ſi, exempli gratiâ, die 5 Martii in eandem horam conveniant ſciothericum horologium atque automaton, cujus diei æquatio invenitur, in tabula, ſcrupulorum primorum 3, ſecundorum 11. lubeatque ſcire ejusdem menſis die 20, an automaton horas æquales rectè metiatur necne: invenietur die poſteriori adſcripta æquatio ſcrupulorum primorum 7, ſecundorum 27. quæ quia ſuperat præcedentem ſcrupulis primis 4, ſecundis 16, debebit tanto ſerior

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

celle de l'automate. Si la différence eſt trouvée autre, on pourra facilement conclure de là combien l'automate avance ou retarde par jour.

Dans la computation de cette table j'ai tenu compte de deux cauſes, connues l'une et l'autre aux aſtronomes, ſavoir l'obliquité de l'écliptique et l'anomalie du mouvement du ſoleil. Tandis que d'une part la raiſon demande [cette inégalité deſjours ſolaires], d'autre part l'expérience auſſi, bâtie ſur ces mêmes horloges et qui ne pouvait aucunement être obtenue ſans elles, la révèle; attendu que les obſervations du ſoleil que nous avons faites ſouvent durant pluſieurs mois, notant chaque jour le moment où le ſoleil ſe trouvait au méridien, ſe ſont trouvées parfaitement d'accord avec l'équation ici propoſée [1]).

TABLE DE L'ÉQUATION DES JOURS.

[1]) Voir sur la question de l'exactitude de la Table de Huygens la p. 51 de l'Avertissement qui précède; et sur les observations de Huygens les p. 101—102 et surtout la note 4 de la p. 112 du T. XVII. Voir aussi les notes 9 et 12 de la p. 123 du même Tome.

esse hora sciotherici, quam quæ automato indicatur. Unde, si diversum reperiatur, facile inde colligetur, quantum in dies singulos exuperet automaton, aut retardet. DESCRIPTIO HOROLOGII.

In computanda tabula hac duplicem causam adhibui, utramque Astronomis notam, Eclipticæ nimirum obliquitatem, & solaris motus anomaliam. Quod cum ratio postulat, tum experientia quoque, his ipsis horologiis superstructa, quæque sine his nequaquam haberi poterat, evincit; quandoquidem, cum æquatione hìc proposita, observationes solis, quas sæpe per complures menses, quotidie ad momentum quo meridianum circulum sol occuparet, instituimus, planissime consentire inventæ sunt [1]).

TABULA ÆQUATIONIS DIERUM.

(*p.* 15).

Dies.	*Januar.* Min.	Sec.	*Febr.* Min.	Sec.	*Mart.* Min.	Sec.	*Apr.* Min.	Sec.	*Maj.* Min.	Sec.	*Jun.* Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	22	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	9
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	*Jul.* Min.	Sec.	*Aug.* Min.	Sec.	*Sept.* Min.	Sec.	*Octob.* Min.	Sec.	*Nov.* Min.	Sec.	*Dec.* Min.	Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	53	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

Or, lorſque l'examen de l'horloge a eu lieu d'après les deux méthodes que nous avons mentionnées, mais de préférence ſuivant la première, dans le cas où l'on conſtate qu'elle s'écarte beaucoup de la longueur moyenne des jours, de ſorte que la différence ſurpaſſe trois ou quatre minutes, on y apportera remède en augmentant ou diminuant la longueur du pendule. Dans cette correction on tiendra compte de la règle que le mouvement de l'horloge ſera accéléré ou retardé d'une minute par jour chaque fois que les $\frac{7}{10}$ d'une ligne ſeront ôtés ou ajoutés à la longueur du pendule. Et lorſque de cette manière le pendule aura déjà acquis à fort peu près la bonne longueur, la correction ultime ſe fera commodement par le déplacement du petit poids Δ qui ſe trouve ſur la verge VV. Ce poids a la forme d'une lentille dont nous avons repréſenté dans la figure I [Fig. 17 I] la ſection ſuivant l'axe. Et comme ce poids n'eſt que la vingtième ou trentième partie du poids X ou même encore moins [1]), il s'enſuit qu'en s'écartant notablement de l'endroit qu'il occupait d'abord, il ne change cependant pas beaucoup le mouvement du pendule: il l'accélère chaque fois qu'on le rapproche du point milieu de la verge et il le retarde lorſqu'à partir de ce point on le fait monter ou deſcendre. Or, afin qu'on ne ſoit pas obligé de chercher longtemps la ſituation dans laquelle il donnera la meilleure meſure des jours, nous avons diviſé d'une certaine manière, calculée d'après les lois du mouvement, la moitié inférieure de la verge dans l'hypothèſe que le poids Δ eſt la cinquantième partie du poids X et égal en gravité à la verge VV. Ces diviſions ſont indiquées dans la figure IV [Fig. 17], où la moitié inférieure du pendule eſt vue coupée en trois parties dont AB repréſente la plus baſſe. Le point A eſt le centre de gravité du poids X et les diviſions, à partir du point C, centre d'oſcillation [2]), correſpondent chacune à une différence de quinze minutes par jour lorſque le diſque Δ eſt déplacé de cet intervalle. Quant à la démonſtration et la méthode de trouver les diviſions, ella ſera donnée dans la partie du livre qui traite du centre d'oſcillation.

Nous décririons en outre ici la forme des horloges que l'on porte ſur mer pour rechercher les longitudes ſi nous avions exploré et déterminé auſſi bien que dans le cas précedent celle qui eſt la plus apte à cet uſage. Il eſt vrai que la choſe a déjà été conduite ſi loin qu'il ſemble s'en failloir peu que cette invention ſi utile ne ſoit parachevée. Or, je ne veux pas laiſſer d'expoſer ici ce qui a été tenté et avec quel ſuccès, et ce qui reſte encore à tenter dans la ſuite.

Les deux premières horloges de ce genre furent portées en 1664 par un vaiſſeau anglais; un gentilhomme d'Écoſſe de mes amis [3]) les avait fait fabriquer à l'exemple des nôtres. Celles-ci avaient au lieu du poids une lame d'acier enroulée en ſpirale deſtinée à faire tourner les roues par ſa force; on connaît les reſſorts ſpiraux de ce genre des petites horloges portatives. Or, pour qu'elles puſſent ſupporter l'agitation du navire, il avait ſuſpendu les horloges à une ſphère d'acier enfermée dans un cylindre

[1]) Les mots „aut etiam minorem" ont été ajoutés par Huygens au texte imprimé.

Jam poſtquam utrovis modo eorum quos diximus, ſed priore potius, examen inſtitutum fuerit, ſi multum aberrare à media dierum longitudine horologium reperiatur, adeo ut differentia ultra tria quatuorve prima ſcrupula aſcendat, remedium adhibebitur aucta aut diminuta ipſius penduli longitudine. Ubi hæc tenenda eſt regula, tot ſcrupulis primis, in ſingulos dies, motum horologii acceleratum aut retardatum iri, quot $\frac{7}{10}$ unius lineæ auferentur pendulo aut addentur. Cumque ad veram menſuram hoc pacto jam prope reductum erit, reliqua correctio tranſpoſitione exigui ponderis Δ, virgæ VV adhærentis, commode peragetur. Id pondus lentis formam habet, cujus ſectionem ſecundum axem in figura 1. [Fig. 17 I] expreſſimus. Et quia tantum viceſimam triceſimamve, aut etiam minorem [1]), partem æquat ponderis X, hinc fit ut ſat magnis ſpatiis è priore loco diſcedens, haud multum tamen perpendiculi motum afficiat, accelerando nempe quoties verſus mediam virgæ longitudinem attrahitur, retardando cum inde ſurſum aut deorſum movetur. Ne vero diu punctum illud quærendum ſit quo veriſſimam daturum ſit dierum menſuram, diviſimus certa ratione, ex motus legibus petita, inferiorem virgæ medietatem, poſito nimirum pondere Δ parte quinquageſima ponderis X, parique gravitate ipſius virgæ VV. Quæ quidem diviſiones figura 4 [Fig. 17 IV] exhibentur, ubi penduli portio inferior in tres partes ſecta cernitur, quarum, quæ infimo loco ponenda, eſt AB. Punctum A eſt centrum gravitatis ponderis X, à puncto autem C, centro oſcillationis [2]), partes ſingulæ, quindecim ſcrupulorum ſecundorum differentiam diurnam efficiunt, ubi tali intervallo mota fuerit lens Δ. Demonſtratio autem diviſionumque inventio, dabitur in iis quæ de Centro Oſcillationis.

(p. 16). Descriptio Horologii.

Cæterum illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum inveſtigandarum gratiâ, formam hic deſcriberemus, ſi quænam maxime ad hunc uſum accommodata ſit, æque ac in præcedentibus, exploratum determinatumque haberemus; etſi quidem jam nunc eo res deducta ſit, ut parum deeſſe videatur ad perficiendum tantæ utilitatis inventum. Quid autem & qua fortuna hic tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum reſtet, exponere non pigebit.

Prima duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno 1664, quæ vir nobilis è Scotia nobisque amicus [3]) ad noſtrorum exemplum fabricari curaverat. Hæc ponderis loco laminam chalybeam habebant in ſpiram convolutam, cujus vi rotæ cir|cumagerentur, quemadmodum in exiguis illis quæ circumferri ſolent automatis adhiberi ſolent. Ut autem jactationem navis perferre poſſent, è chalybea pila, cylindro

(p. 17).

[2]) Les mots „centro oscillationis" ont de même été ajoutés par Huygens au texte de l'édition originale.

[3]) Alexandre Bruce, comte de Kincardine. Voir la p. 193 du T. XVII.

Description de l'horloge.

de cuivre, et il avait prolongé par en bas et doublé la manivelle qui entretient le mouvement du pendule, lequel était long d'un demi pied, de ſorte que cette manivelle avait l'aſpect d'une lettre F renverſée [1]); cette conſtruction avait évidemment pour but d'empêcher le mouvement de dégénérer en une rotation ce qui pourrait même cauſer l'arrêt de l'horloge. Après que ce vaiſſeau, avec trois autres qui l'accompagnaient dans ſon voyage, fut de retour en Angleterre, le Commandant de cette flotte rapporta ce qui ſuit [2]). Après avoir quitté la côte de la Guinée et être parvenu à l'île appelée St. Thomas ſituée ſous la ligne, il dit qu'ayant réglé là ſes horloges ſur le ſoleil, il tira vers l'oueſt et parcourut ſans arrêt environ ſoixante-dix milles, après quoi, à la faveur d'un vent ſud-oueſt, il ſe dirigea de nouveau vers les côtes de l'Afrique. Or, lorſqu'il eut parcouru, en ſuivant cette direction, quelque deux cents ou trois cents lieues, les capitaines des autres navires, craignant qu'ils ne manquaſſent d'eau potable, lui donnèrent le conſeil de ſe détourner pour faire équade vers les îles de l'Amérique appelées Barbades. Ayant tenu conſeil avec les capitaines et leur ayant ordonné de produire leurs éphémérides et leurs ſupputations, il trouva que les calculs des autres étaient bien différents des ſiens, l'un s'en écartant de quatre-vingt lieues, l'autre de cent, le troiſième encore davantage. Il ajoute que lui-même, puiſqu'il avait conclu de l'indication des horloges qu l'île *del Fuego* n'était qu'à une diſtance d'environ trente lieues (laquelle île eſt une de celles, proches de l'Afrique, qui tirent leur nom du Cap Vert) et qu'il pouvait l'atteindre le jour ſuivant, ordonna, ſe fiant à ſes pendules, de faire voile dans cette direction, et que le jour ſuivant vers midi l'île nommée apparut à l'horizon et ſervit après quelques heures de ſtation aux navires. Voilà ce que ce Commandant rapporta.

Depuis ce temps les expériences ont été répétées, quelquefois par les Hollandais [3]), d'autres fois par les Français et cela par ordre du Roi, avec un ſuccès variable, mais de telle ſorte que là où le ſuccès manquait, ceci doive plutôt être imputé à la négligence de ceux à qui les horloges avaient été confiées qu'aux automates eux-mêmes [4]). Le ſuccès fut très grand dans la Mer Méditerranée, dans l'expédition de l'île de Crète, où Monſieur le Duc de Beaufort avait été envoyé avec des troupes françaiſes pour porter ſecours à la ville de Candie aſſiégée par les Turcs, et où il tomba dans le combat. Le duc avait dans ſon navire des horloges pour faire cette expérience et les avait confiées à un habile aſtronome [5]). Nous avons appris par les obſervations journalières de ce dernier que les longueurs des endroits où les navires abordèrent dans ce voyage ou que les voyageurs purent reconnaître en paſſant furent exactement meſurées à l'aide des horloges, de telle manière que l'on trouve dans les deſcriptions géographiques qui ſont réputées les meilleures les mêmes différences des longitudes. On trouva

[1]) Fig. 67 de la p. 166 du T. XVII.

[2]) T. XVII, p. 230. Voir aussi la p. 7 qui précède.

[3]) Nous ne savons pas à quelles expériences Huygens fait allusion. Voir cependant le premier

æneo inclusa, horologia suspenderat, clavulamque quæ penduli motum continuat (erat autem semipedale longitudine pendulum) deorsum productum gemina verat, ut literæ F inversæ formam referret [1]); ne videlicet in gyrum evagari posset penduli motus, unde cessationis periculum. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa est, Præfectus classis hæc retulit [2]). Se nempe, cum à Guineæ littore solvisset, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, pervenisset, quæ æquinoctiali circulo subjacet, compositis hìc ad solem horologiis, occidentem versus cursum instituisse, atque ad septingenta circiter milliaria continuo tramite progressum, tum rursus vento favente Libonoto ad Africæ littora declinavisse. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eò cursum tenuisset, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigissent aquâ ad potum deficerentur, suasisse ut ad insulas Americanas, Barbatorum dictas, aquandi gratiâ deflecteret. Tum sese concilio nauclerorum habito, jussisque ut Ephemeridas ac supputationes singuli suas proferrent, reperisse cæterorum calculos à suis diversos abire, unius quidem 80 milliaribus, alterius centenis, tertii amplius etiam. Ipsum vero, cum ex horologiorum indicio collegisset non amplius quam triginta circiter milliaribus abesse insulam *del Fuego* dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die teneri posse; consisum pendulis suis eò cursum dirigi imperasse, ac die insequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum venisse insulam, paucisque post horis navibus stationem præbuisse. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Ab eo vero tempore aliquoties tum Batavorum [3]) tum Gallorum opera, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sæpius negligentia eorum quibus horologia commissa erant quam ipsamet automata culpari possent [4]). Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam insulam, quò illustrissimus Dux Belfortius, Candiæ à Turcis obsessæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis missus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in ea qua vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratiâ habebat, virumque Astronomiæ peritum [5]) iis præfecerat, è cujus observationibus, in singulos dies habitis, longitudines locorum ad quæ in ea profectione aut appulerunt na|ves, aut quæ prætervecti dignoscere oculis potuerant, horologiorum operâ exacte dimensas fuisse comperimus, atque ita ut Geographicis descriptionibus quæ melioris notæ habentur eædemmet longitudinum (*p.* 18).

---

alinéa de la p. 17 qui précéde. En mai 1669 F. W. de Nulandt dit qu'il a l'intention de faire cet été un voyage aux îles de l'Amérique et de prendre avec lui une horloge de la façon de Huygens et une de la sienne (T. VI, dernier alinéa de la p. 437).

4) Voir les p. 54—55 du T. VII d'après lesquelles Huygens en 1671 se dit convaincu que „le mauvais succes de cette fois [il s'agit du premier voyage de Richer] procede plus de la nonchalance des observateurs que du deffaut des Horologes".

5) Voir sur les remarques de Huygens au sujet du rapport de de la Voye (qui est sans doute l'„habile astronome" du texte) les p. 501—503 du T. VI et l'Appendice I à la Pars Prima qui suit.

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

par exemple entre le port de Toulon et la ville de Candie une différence d'une heure et de 22 minutes, en d'autres termes de 20°30′ de longitude, et la même différence à fort peu près en retournant de Candie à Toulon: cet accord eſt un indice très certain de la vérité [5]).

Entre le même port de Toulon et une certaine île appelée *Maretimo*, ſituée près du promontoire occidental de Sicile qui portait autreſois le nom de Lilybée, on a trouvé une différence de temps de 25 min. 20 ſec. auxquelles correſpondent 6°20′ de longitude. De même depuis Toulon juſqu'à l'île appelée Sapienza, ſituée près du Péloponnèſe vers l'occident, on trouva 1 h. 5′45″, auxquelles correſpondent 16°26′ de longitude [1]).

Les horloges avaient été examinées le matin par rapport au ſoleil oriental, le ſoir par rapport au ſoleil occidental, l'un et l'autre moment ayant été calculé d'après la hauteur donnée du pôle. Et cette manière ſemble être la meilleure de toutes lorſque les navires ſont à l'ancre parce que ces obſervations ſont faites des yeux ſeuls ſans le ſecours d'inſtruments [2]).

Quant au pendule qui ſe trouvait dans ces horloges, ſa longueur était de 9 pouces [3]) et ſon poids d'une demi-livre. Les roues étaient miſes en mouvement par la force de poids et renfermées avec ceux-ci dans une même boîte de la longueur de quatre pieds. Au fonds de la boîte un plomb de cent livres et davantage avait été ajouté, afin que la machine ſuſpendue dans le navire gardât d'autant mieux ſa ſituation perpendiculaire.

Or, bien que durant ces expériences le mouvement de l'automate fût trouvé fort égal et uniforme [4]), nous avons cependant encore entrepris de le perfectionner par une autre conſtruction qui était telle. Nous attachâmes avec une petite chaîne artiſtement conſtruite un petit poids à la roue qui a ſes dents en façon de ſcie et qui eſt la plus proche du pendule, afin que cette roue ſeule fût miſe en mouvement par ce poids, tout le reſte de la machine ne ſervant qu'à remettre ce petit plomb à ſa hauteur primitive toutes les demi-minutes [5]); preſqu'en la même façon que l'on peut voir dans la conſtruction de l'horloge expoſée plus haut, où le poids eſt élevé en tirant l'une des deux cordes, tandis que par l'autre il communique ſa gravité au mouvement de l'horloge. Les choſes étant arrangées de cette manière, c.à.d. l'action étant pour ainſi dire concentrée dans une ſeule roue, il en réſulta une uniformité encore plus grande qu'auparavant et il arriva ceci de remarquable que lorſque nous avions ſuſpendu à une même poutre ſoutenue par deux appuis deux horloges conſtruites de cette façon, les mouvements de l'une et de l'autre ſe mirent tellement d'accord par coups oppoſés que jamais elles ne s'en écartèrent tant ſoit peu mais que les ſons de l'une et de l'autre furent toujours entendus ſimultanément; et lors même que cet accord était troublé

---

[5]) Voir la note 5 de la p. 117 et le dernier alinéa de la p. 50 qui précède.
[1]) Voir la note 1 de la p. 10 qui précède.
[2]) Voir la note 2 de la p. 218 du T. XVII.

differentiæ designatæ reperiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum differentia hor. 1. scrup. 22′ reperta fuit, hoc est graduum longitudinis 20. scrup. 30′. ac rursus à Candia Tolonum revertentibus differentia proxime eadem. qui consensus certissimum veritatis est indicium [5]). DESCRIPTIO HOROLOGII.

Inter eundem Toloni portum & insulam quandam cui *Maretimo* nomen est, prope promontorium Siciliæ quod Occidentem spectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria observata est scrup. prim. 25, sec. 20, quibus respondent gradus longitudinis 6, scrup. 20′. Item à Tolono ad insulam *Sapienza* dictam, quæ juxta Peloponnesum est Occidentem versus, hora 1, scrup. prima 5′, sec. 45″, quibus respondent longitudinis gradus 16, scrup. 26 [1]).

Horologia ad solem examinata fuerant, mane ad Orientem, vespere ad Occidentem, supputato ex data poli altitudine utroque temporis momento. Atque hæc ratio cum naves in anchoris stant omnium optima videtur, quod, absque instrumentorum ope, solis oculis eæ observationes peragantur [2]).

Pendulum vero unciarum novem [3]) longitudine inerat horologiis hisce, pondere semissis. Rotæ ponderum attractu circumagebantur, eademque cum illis theca inclusæ erant quaternum pedum longitudine. In ima theca plumbum insuper centrum atque amplius librarum additum erat, quo melius perpendicularum situm suspensa in navi machina servaret.

Quanquam autem æquabilis admodum sibique constans automati motus per hæc experimenta comperiebatur [4]), tamen alia quoque ratione ulterius illud perficere aggressi sumus, quæ erat hujusmodi. Rotæ illi quæ serratos dentes habet, penduloque proxima est, pondus exiguum ex catenula affabre constructa appendimus, quo sola ipsa moveretur, reliqua omni machina nihil aliud agente quam ut singulis semiscrupulis horariis plumbum illud exiguum ad priorem altitudinem restitueret [5]); eadem fere ratione atque in constructione horologii superius exposita videre est, ubi pondus altero fune attollitur, dum altero gravitatem suam horologii motui impertit. Quibus ita constructis, cum veluti ad unicam rotam omnia essent redacta, major adhuc quam antea apparuit horologiorum æqualitas, illudque accidit memoratu dignum, quod cum duo ad hanc formam constructa ex eodem tigno suspendissemus, tignum vero fulcris duobus impositum esset; motus penduli | utriusque ita ictibus adversis inter se consensere, (*p.* 19). ut nunquam inde vel minimum recederent, sed utriusque sonus una semper exaudiretur:

---

3) La longueur du pendule dépassait donc de deux pouces celle des pendules des remontoirs fabriquées par S. Oosterwijck en 1664 et 1665 (voir les p. 183—184 du T. XVII) qui étaient également enfermés dans de lourdes boîtes. L'horloge du duc de Beaufort n'était pas un remontoir; comparez la p. 9 qui précède. D'ailleurs dans le texte Huygens ne mentionne les remontoirs à poids qu'après avoir parlé de l'expédition de Candie quoiqu'ils soient plus anciens.

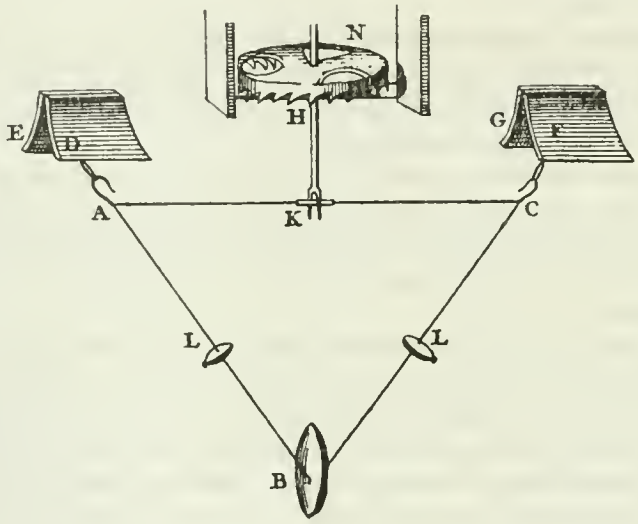
4) Voir cependant l'alinéa suivant et l'Appendice II à la p. 21 qui précède.

5) Voir sur le remontoir à poids moteurs les p. 171—182 du T. XVII.

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

par l'intervention de l'obſervateur, il ſe rétabliſſait en peu de temps. Je demeurai quelque temps émerveillé d'une choſe ſi extraordinaire; mais après un diligent examen je trouvai enfin que la cauſe devait être cherchée dans le mouvement, inſenſible il eſt vrai, de la poutre. L'explication conſiſtait donc en ce que les oſcillations des pendules communiquaient quelque mouvement aux horloges chargées de quelque poids que ce fût, et que ce mouvement imprimé enſuite à la poutre avait néceſſairement pour effet que ſi les deux pendules oſcillaient autrement que par des coups parfaitement

[Fig. 21.]



contraires, ils devaient cependant néceſſairement en venir là, et qu'alors ſeulement le mouvement de la poutre pouvait ceſſer entièrement [1]). Toutefois cette cauſe n'aurait pas une efficacité ſuffiſante ſi les mouvements des horloges n'étaient pas par ailleurs très égaux et uniformes.

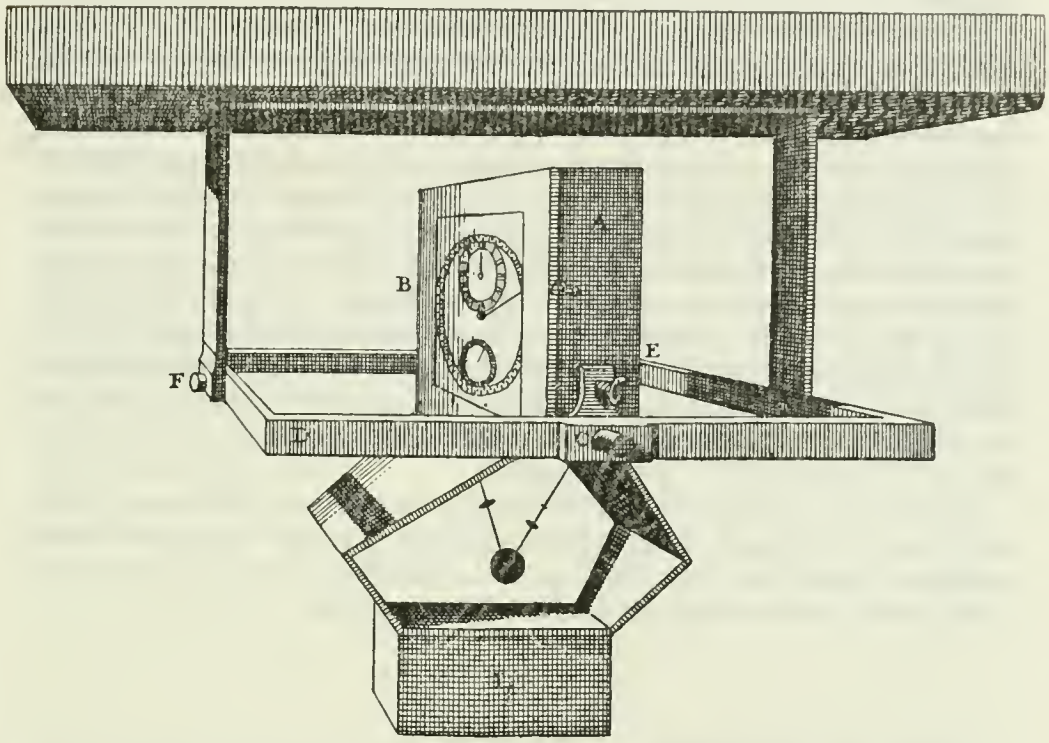
Du reſte par les expériences faites dans la traverſée de l'Océan, ſurtout dans les cas où une tempête aſſez forte agitait les flots, il fut établi qu'il faut en premier lieu avoir ſoin de conſerver le mouvement ſans interruption des horloges: on remarqua qu'elles ſupportaient difficilement une ſi grande agitation du navire. C'eſt pourquoi nous avons enfin changé d'après un nouveau deſſein la forme du pendule et en même temps la ſuſpenſion des horloges. Le nouveau pendule a la forme d'un triangle, au ſommet duquel, qui eſt tourné vers le bas, eſt attaché une lentille de plomb. Les deux autres angles ſont ſuſpendus entre des lames cycloïdales. La baſe eſt embraſſée en ſon

[1]) Voir la note 1 de la p. 185 du T. XVII.

imo ſi data opera perturbaretur concordia illa, ſemetipſam brevi tempore reduceret. Miratus aliquandiu rem adeo inſolitam, inveni denique, inſtituto diligenti examine, à motu tigni ipſius, licet haudquaquam ſenſibili, cauſam petendam eſſe. Nempe pendulorum reciprocationes horologiis, quantolibet pondere gravatis, motum aliquem communicare; hunc vero motum, tigno ipſi impreſſum, neceſſario efficere ut ſi aliter

Descriptio Horologii.

[Fig. 22.]



quam contrariis ad unguem ictibus pendulum utrumque moveatur, eo tamen neceſſario tandem deveniant, ac tum demum tigni motum penitus interquieſcere [1]). Quæ tamen cauſa non ſatis efficaciæ haberet, niſi & horologiorum motus aliunde æquabiliſſimus foret atque inter ſe conſentiens.

Cæterum experimentis in Oceani navigatione habitis, ac præſertim procella vehementiore aquas agitante, compertum fuit primam ac præcipuam curam de motu horologiorum abſque interruptione conſervando habendam eſſe, quod jactationem navis tantam ægrè tunc perferre illa animadverſum ſit. Quamobrem nova denique ratione & penduli formam immutavimus, & aliter horologia ipſa ſuſpendimus. Pendulum trianguli formam habet, in cujus vertice deorſum ſpectante plumbea lens affixa eſt. Anguli utrique reliqui filis inter laminas cycloidales ſuſpenſi ſunt. Baſis clavulam biſur-

DESCRIPTION DE L'HORLOGE.

point milieu par une baguette fourchée en deux et eſt mue par elle; quant à la baguette elle tient ſon mouvement de la roue faite en façon de ſcie qui eſt horizontale. Le mouvement de toutes les roues tire ſon origine non pas d'un poids mais d'une lame d'acier renfermée dans un barillet [1]). Dans la figure ci-jointe [Fig. 21] [2]) le pendule triangulaire eſt ABC; B eſt la lentille de plomb; ED et FG ſont les lames cycloïdales. La baguette bifurquée eſt HK et N la roue dentée en façon de ſcie, qui eſt la plus baſſe des roues de l'horloge. LL ſont de petites lentilles ſervant à régler la marche du pendule.

La deuxième figure [Fig. 22] [3]) fait voir le mode de ſuſpenſion: d'abord la boîte AB eſt fixée par deux axes, dont l'un C ſeulement apparaît, au rectangle de fer DE, lequel eſt ſoutenu à ſon tour au moyen de ſes axes FG par le gnomon de fer FHKG fermement attaché à l'entablement du navire. Au fond de la boîte on a ſuſpendu à l'horloge un poids de 50 livres. Par cet arrangement l'horloge garde la poſition verticale quelle que ſoit la pente du vaiſſeau. Or, l'axe C ainſi que l'axe oppoſé ſont placés de telle manière que les points de ſuſpenſion du pendule décrit ſont ſitués ſur la ligne droite déterminée par ces axes, d'où réſulte que le mouvement oſcillatoire du pendule ne peut aucunement mettre l'horloge en branle: rien n'eſt plus funeſte en général au mouvement d'un pendule que cet entraînement de l'horloge. D'ailleurs l'épaiſſeur des axes CC et FG, qui eſt d'un pouce, et la lourdeur du plomb ſuſpendu en bas ôtent à l'horloge la trop grande liberté du mouvement et ſont en ſorte que ſi par haſard elle a été ébranlée par quelque rude ſecouſſe du navire elle retourne cependant auſſitôt au repos et à la perpendicularité.

Reſte à porter la machine ainſi perfectionnée en mer et à en faire l'épreuve [4]). Elle nous donne une eſpérance preſque certaine de ſuccès, parce qu'on a trouvé dans les expériences qu'on a pu faire juſqu'à préſent qu'elle ſupporte beaucoup mieux que celles décrites plus haut toutes les diverſités du mouvement.

---

[1]) Comparez la p. 16 qui précède.

[2]) Auprès de cette figure Huygens a annoté en marge: „l'une jambe de la fourchette K devoit passer en deça de la verge AC". Ce défaut de la figure a été corrigé dans l'édition de 1724 de 's Gravesande. On trouve en marge de l'exemplaire de l'édition originale mentionné dans la note 3 de la p. 92 qui précède plusieurs autres remarques manuscrites de Huygens sur de petites corrections à apporter aux figures. Nous les omettons puisque nous reproduisons ici les figures de 's Gravesande qui a tenu compte de ces remarques.

[3]) Dans cette figure la vis à gauche et au-dessous du point E est de l'invention de 's Gravesande: dans la figure originale on ne voit en cet endroit qu'une petite circonférence de cercle qui ne peut guère représenter une vis.

[4]) L'horloge marine à pendule triangulaire n'a peut-être pas été mise à l'épreuve avant 1686 (voir le troisième alinéa de la p. 57 du T. IX) mais alors sa construction ne fut plus exactement la même qu'en 1672; comparez la note 2 de la p. 17 qui précède. Consultez aussi la suite du présent Tome sur les voyages de 1686 et des années suivantes.

catam puncto sui medio recipit ab eaque movetur, illa vero ab rota ferrata horizonti parallela motum accipit. Motus rotarum omnium non à pondere sed à chalybea lamina, tympano inclusa, principium habet [1]). In figura adjecta [Fig. 21] [2]) pendulum triangulare est ABC; lens plumbea B; laminæ cycloidales ED, FG. Clavula | bifurcata HK; rota ferratis dentibus N, quæ cæteris horologii rotis inferior est. Lenticulæ ad temperandum penduli motum LL. Descriptio Horologii. (p. 20).

Suspensionis modum altera hæc figura [Fig. 22] [3]) exhibet; ubi theca AB axibus primum duobus, quorum alter C tantum apparet, rectangulo ferreo DE inserta est; quod deinde rectangulum rursus axibus suis FG ferreo gnomone FHKG sustinetur, qui contignationi navis immobiliter affixus est. in ima theca pondus 50 librarum appensum est. Quibus ita se habentibus, quacunque navis inclinatione perpendicularem positum servat horologium. Axis autem C, cum sibi opposito, ita collocati sunt, ut ad rectam lineam respondeant punctis suspensionum penduli ejus quod diximus: quo fit ut motus ipsius oscillatorius machinam nequaquam commovere possit, quo nihil est alioqui quod magis penduli motum destruat. Porro axium CC, & FG crassitudo, quæ pollicem æquat, gravitasque plumbi inferius appensi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut si forte succussu navis graviore commotum fuerit, continua ad quietem perpendiculumque suum revertatur.

Et hæc quidem ita adaptata machina ut in mare deducatur experientiæque committatur superest [4]), quæ & certam pene successus spem præbet, quod iis quæ hactenus instituere licuit experimentis, multo melius quam priores illæ omnem motus diversitatem perferre reperta sit.

DEUXIÈME PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE.

De la Chute des Corps pesants et de leur Mouvement cycloïdal.

HYPOTHÈSES.

I.

Si la gravité n'existait pas et qu'aucune résistance d'air ne s'opposait au mouvement des corps, chacun d'eux continuerait son mouvement avec une vitesse uniforme en suivant une ligne droite.

II.

Mais maintenant il arrive par l'action de la gravité, de quelque cause qu'elle provienne, que les corps se meuvent d'un mouvement composé de leur mouvement uniforme dans une direction quelconque et de celui de haut en bas qui est dû à la gravité.

III.

On peut considérer ces deux mouvements séparément et l'un n'est pas empêché par l'autre [1]).

Supposons qu'un corps pesant C, partant du repos, parcoure en un certain temps F, grâce à la force de la gravité, un espace CB [Fig. 23]. Supposons de plus que le même corps pesant ait reçu d'ailleurs un mouvement par lequel, s'il n'y avait aucune gravité, il parcourrait dans le même temps F d'un mouvement uniforme la ligne droite CD. La force de la gravité s'y ajoutant le corps pesant ne parviendra donc pas de C en D dans le dit temps F mais en un certain point E situé verticalement au-dessous de D de telle sorte que l'espace DE est toujours égal à l'espace CB; en effet, de cette façon le mouvement uniforme et celui qui provient de la gravité auront chacun leur part, l'un n'empêchant pas l'autre. Quant à la ligne que le corps parcourt de ce mouvement composé lorsque la direction du mouvement uniforme n'est pas verticale mais oblique, sa nature apparaîtra par nos considérations ultérieures. Mais lorsque le mouvement uniforme CD a lieu de haut en bas suivant une verticale, il est clair que la

---

[1]) Voir la note 1 de la p. 126 du T. XVII, où nous avons remarqué que dans les trois Hypothèses de la Pars Secunda le „principe de la relativité" (pour employer cette expression moderne) n'est pas mentionné aussi expressément que dans les considérations analogues de 1659.

HOROLOGII OSCILLATORII (*p.* 21).

Pars Secunda.

De descensu Gravium & motu eorum in Cycloide.

HYPOTHESES.

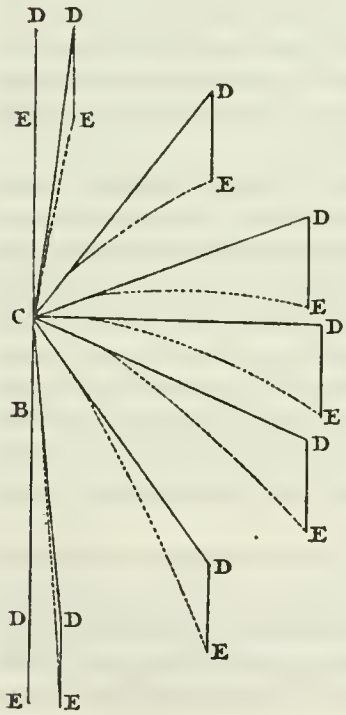
I.

Si gravitas non esset, neque aër motui corporum officeret, unumquodque eorum, acceptum semel motum continuaturum velocitate æquabili, secundum lineam rectam.

II.

Nunc vero fieri gravitatis actione, undecunque illa oriatur, ut moveantur motu composito, ex æquabili quem habent in hanc vel illam partem, & ex motu deorsum à gravitate profecto.

[Fig. 23.]



III.

Et horum utrumque seorsim considerari posse, neque alterum ab altero impediri [1]).

Ponatur grave C è quiete dimissum, certo tempore, quod dicatur F, vi gravitatis transire spatium CB [Fig. 23]. Ac rursus intelligatur idem grave accepisse alicunde motum quo, si nulla esset gravitas, transiret pari tempore F motu æquabili lineam rectam CD. Accedente ergo vi gravitatis non perveniet grave ex C in D, dicto tempore F, sed ad punctum aliquod E, recta sub D situm, ita ut spatium DE semper æquetur spario CB, ita enim, & motus æquabilis, & is qui à gravitate oritur suas partes peragent, altero alterum non impediente. Quamnam vero lineam, composito illo motu, grave percurrat, cum motus æquabilis non recta sursum aut deorsum sed in obliquum tendit, è sequentibus definiri poterit. Cum vero deorsum in perpendiculari contingit motus æquabilis CD, | apparet lineam CD, accedente motu ex gravitate, augeri (*p.* 22).

De la chute des corps graves.

ligne CD eſt augmentée d'une droite DE par l'effet de la gravité. De même, lorſque le mouvement uniforme CD eſt dirigé de bas en haut, il eſt évident que la même longueur CD eſt diminuée de la longueur DE de ſorte qu'après le temps F le corps ſe trouve toujours au point E. Que ſi, dans l'un et l'autre cas, nous conſidérons ſéparément les deux mouvements en admettant, comme nous l'avons dit, que l'un n'eſt nullement empêché par l'autre, il nous ſera poſſible d'en déduire la cauſe et les lois de l'accélération des corps peſants. Premièrement nous ferons voir les deux choſes ſuivantes.

PROPOSITION I[1].

Dans des temps égaux les accroiſſements de la viteſſe d'un corps tombant ſont toujours égaux et les eſpaces parcourus durant des temps égaux depuis le commencement de la chute forment une ſérie dont les différences ſucceſſives ſont conſtantes.

[Fig. 24.] Suppoſons que quelque corps, partant du repos en A, ſoit tombé dans le premier temps par l'eſpace AB [Fig. 24] et ait acquis lorſqu'il eſt parvenu en B, une viteſſe avec laquelle il pourrait enſuite pendant le deuxième temps parcourir d'un mouvement uniforme un certain eſpace BD. Nous ſavons donc que l'eſpace qui ſera parcouru pendant le ſecond temps ſera plus grand que l'eſpace BD puiſque, même ſi toute action de la peſanteur ceſſait en B, l'eſpace BD ſerait parcouru. Actuellement le corps ſera animé d'un mouvement compoſé du mouvement uniforme par lequel il pourrait parcourir l'eſpace BD et du mouvement des corps tombants par lequel il doit néceſſairement deſcendre d'une longueur égale à l'eſpace AB mentionné plus haut. Nous ſavons donc que le corps parviendra dans le deuxième temps juſqu'au point E, obtenu en ajoutant à BD une longueur DE égale à AB.

A B D E F G H K

Or, ſi nous demandons quelle viteſſe le corps poſſède en E au bout du deuxième temps, nous trouverons qu'elle devra être double de la viteſſe qu'il avait en B au bout du premier temps. En effet, nous avons dit que le corps ſe meut d'un mouvement compoſé d'un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe en B et du mouvement produit par la peſanteur; et ce dernier, étant évidemment le même dans le deuxième temps que dans le premier, doit avoir donné dans le cours du deuxième temps au corps peſant une viteſſe égale à celle qu'il avait reçue à la fin du premier. Or, comme il a conſervé intégralement la viteſſe qu'il poſſédait à la fin du premier temps, il apparaît qu'à la fin du deuxième il poſſédera deux fois la viteſſe acquiſe au bout du premier, en d'autres termes il aura une viteſſe double.

Que ſi, étant parvenu en E, le corps ne faiſait autre choſe que continuer ſon mouvement avec une viteſſe uniforme, telle qu'il l'avait acquiſe en ce point, il apparaît que dans le troiſième temps égal aux précédents, il parcourrait l'eſpace EF double de BD, puiſque nous avons dit que ce dernier eſt parcouru avec une viteſſe deux fois plus petite d'un mouvement uniforme et dans un temps égal. Mais lorſque

recta DE. Item, cum ſurſum tendit motus æquabilis CD, ipſam CD diminui recta DE, ut nempe, peracto tempore F, grave inveniatur ſemper in puncto E. Quod ſi, utroque hoc caſu, ſeorſim, uti diximus, duos motus conſideremus, alterumque ab altero nullo modo impediri cogitemus, hinc jam accelerationis gravium cadentium cauſam legesque reperire licebit. Et primum quidem duo iſta ſimul oſtendemus. De descensu gravium.

PROPOSITIO I[1]).

Æqualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi cadenti accreſcere, & ſpatia æqualibus temporibus ab initio deſcenſus emenſa, augeri continue æquali exceſſu.

Ponatur grave aliquod, ex quiete in A, primo tempore lapſum eſſe per ſpatium AB [Fig. 24], atque ubi pervenit in B, acquiſiviſſe celeritatem qua deinceps, tempore ſecundo, motu æquabili, percurrere poſſet ſpatium quoddam BD. Scimus ergo ſpatium ſecundo tempore peragendum majus fore ſpatio BD, quia vel ceſſante in B omni gravitatis actione ſpatium BD percurreretur. Feretur vero motu compoſito ex æquabili quo percurſurum eſſet ſpatium BD, & ex motu gravium cadentium, quo deprimi neceſſe eſt per ſpa|tium ipſi AB æquale. Quare ad BD addita DE, æquali AB, ſcimus (*p.* 23). tempore ſecundo grave perventurum ad E.

Quod ſi vero inquiramus quam velocitatem habeat in E, in fine ſecundi temporis, eam inveniemus duplam eſſe debere velocitatis quam habebat in B fine temporis primi. Diximus enim moveri compoſito motu ex æquabili cum celeritate acquiſita in B, & ex motu à gravitate producto, qui cum tempore ſecundo idem plane ſit ac primo, ideo decurſu temporis ſecundi æqualem celeritatem gravi contuliſſe debet atque in fine primi. Quare cum acquiſitam in fine primi temporis celeritatem conſervaverit integram, apparet in fine ſecundi temporis bis eam celeritatem ineſſe quam acquiſiverat in fine temporis primi, ſive duplam.

Quod ſi jam, poſtquam pervenit in E, pergeret deinceps tantum moveri celeritate æquabili, quantam illic acquiſivit, apparet tempore tertio, prioribus æquali, percurſurum ſpatium EF, quod duplum futurum ſit ſpatii BD; quia hoc percurri diximus dimidia hujus celeritatis, motu æquabili, & temporis parte æquali. Accedente autem

---

[1]) Comparez le § 1 à la p. 125 du T. XVII. La Fig. 24 correspond à la Fig. 31 de la p. 127 (voir aussi la note 3) du T. XVII.

De la chute des corps graves.

l'action de la gravité s'y ajoute, il parcourra dans le troisième temps outre l'espace EF encore un espace FG égal à AB ou DE. Au bout du troisième temps le corps se trouvera donc en G. En ce point il aura une vitesse triple de celle qu'il avait en B au bout du premier temps, puisque outre la vitesse acquise en E dont nous avons dit qu'elle était le double de la vitesse acquise en B, la force de la gravité y a ajouté de nouveau dans la cours du troisième temps une vitesse égale à celle qu'elle lui avait donnée à le fin du premier temps. C'est pourquoi l'une et l'autre vitesse, au bout du troisième temps, constitueront ensemble une vitesse triple de celle qui existait à la fin du premier temps.

On démontrera de la même manière que pendant le quatrième temps un espace GH triple de l'espace BD doit être parcouru, et simultanément un espace HK égal à AB; et que la vitesse en K au bout du quatrième temps sera quadruple de celle qui existait en B à la fin du premier. Ainsi il est manifeste que les espaces quelconques que nous pourrions considérer ensuite, nous voulons dire les espaces parcourus chacun dans un temps égal, croîtront d'une même différence égale à BD; et qu'en même temps les vitesses augmenteront uniformément chaque fois que le temps augmentera d'une même quantité.

PROPOSITION II[1]).

L'espace parcouru pendant un certain temps par un corps qui commence sa chute en partant du repos est la moitié de l'espace que ce corps pourrait parcourir d'un mouvement uniforme avec la vitesse acquise par la chute au bout du temps considéré.

Faisons les mêmes hypothèses que dans le cas de la proposition précédente, où AB [Fig. 24] était l'espace parcouru pendant un certain temps par un corps tombant du point A, et BD l'espace qu'il était censé parcourir dans un temps égal avec une vitesse uniforme, savoir la vitesse acquise à la fin du premier temps, en d'autres termes au bout de l'espace AB. Je dis que l'espace BD est le double de AB.

En effet, comme les espaces parcourus par le corps tombant pendant les quatre premiers temps égaux sont AB, BE, EG et GH, lesquels ont etre eux une certaine proportion, si nous prenons le double de chacun de ces temps, de sorte que nous considérons comme le premier temps les deux pendant lesquels les espaces AB, BE ont été parcourus, et comme le second les deux autres pendant lesquels furent parcourus les espaces EG, GK, il faut que les espaces AE et EK parcourus dans des temps égaux par un corps parti du repos, soient entre eux comme les espaces AB et BE également parcourus dans des temps égaux par un corps parti du repos.

Comme on a donc AB : BE = AE : EK et, par conversion, KE : EA = EB (ou DA) : AB, on aura aussi par division: DB est à BA comme la différence de KE et de EA est à EA. Or comme, d'après ce qui a été démontré dans la proposition précédente, KE est égal au double de AB augmenté du quintuple de BD, et que EA est égal tant au double de AB qu'à BD, il apparaît que la dite différence KE — EA est

rurſus gravitatis actione, percurret tempore tertio, præter ſpatium EF, etiam ſpatium FG, ipſi AB vel DE æquale. Itaque in fine tertii temporis grave invenietur in G. Velocitatem vero hic habebit triplam jam ejus quam habebat in B, in fine primi temporis: quia præter celeritatem acquiſitam in E, quam diximus duplam eſſe acquiſitæ in B, vis gravitatis, temporis tertii decurſu, æqualem rurſus atque in fine primi celeritatem contulit. Quamobrem utraque celeritas, in fine temporis tertii, triplam celeritatem conſtituet ejus quæ fuerat in fine temporis primi. De descensu gravium.

Eodem modo oſtendetur tempore quarto peragi debere & ſpatium GH triplum ſpatii BD, & ſpatium HK ipſi AB æquale: velocitatemque in K, in fine quarti temporis, fore quadruplam ejus quæ fuerat in B, in fine temporis primi. Atque ita ſpatia quotlibet deinceps conſiderata, quæ æqualibus temporibus peracta fuerint, æquali exceſſu, qui ipſi BD æqualis ſit, creſcere manifeſtum eſt, ſimulque etiam velocitates per æqualia tempora æqualiter augeri.

PROPOSITIO II[1]. (*p.* 24).

Spatium peractum certo tempore à gravi, è quiete caſum inchoante, dimidium eſt ejus ſpatii quod pari tempore tranſiret motu æquabili, cum velocitate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

Ponantur quæ in propoſitione præcedenti, ubi quidem AB [Fig. 24] erat ſpatium certo tempore, à gravi cadente ex A, peractum. BD vero ſpatium quod pari tempore tranſiri intelligebatur celeritate æquabili, quanta acquiſita erat in fine primi temporis, ſeu in fine ſpatii AB. Dico itaque ſpatium BD duplum eſſe ad AB.

Quum enim ſpatia primis quatuor æqualibus temporibus à cadente transmiſſa ſint AB, BE, EG, GH, quorum inter ſe certa quædam eſt proportio: ſi eorum temporum dupla tempora ſumamus, ut nempe pro primo tempore jam accipiantur duo illa quibus ſpatia AB, BE, peracta fuere; pro ſecundo vero tempore duo reliqua quibus peracta fuere ſpatia EG, GK, oportet jam ſpatia AE, EK, quæ ſunt æqualibus temporibus à quiete peracta, inter ſe eſſe ſicut ſpatia AB, BE, quæ æqualibus item temporibus à quiete percurrebantur.

Quum igitur ſit ut AB ad BE, ita AE ad EK; & convertendo, ut EB ſive DA ad AB ita KE ad EA: erit quoque, dividendo, DB ad BA ut exceſſus KE ſupra EA ad EA. Quum ſit autem, ex oſtenſis propoſitione præcedenti, KE æqualis tum duplæ AB, tum quintuplæ BD: EA vero æqualis tum duplæ AB, tum ſimplici BD; apparet dictum exceſſum KE ſupra EA æquari quadruplæ BD. Sicut igitur DB ad BA ita erit

[1]) Comparez la fin du § 1 (p. 128, avec la note 1) et le § 2 (p. 128—130) du T. XVII.

De la chute des corps graves.

égale à quatre fois BD. Donc DB : BA = 4DB : EA. Par conséquent on aura EA = 4BA. Mais le même espace EA est égal, comme nous l'avons dit, au double de AB augmenté de BD. BD est donc égal au double de AB. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

Deux espaces parcourus par un corps tombant dans des temps quelconques, dont chacun est pris depuis le commencement de la chute, sont entre eux comme les carrés de ces temps, ou bien comme les carrés des vitesses acquises.

[Fig. 24.] En effet, comme il a été démontré dans la proposition précédente que les espaces AB, BE, EG et GK [Fig. 24] en nombre quelconque, parcourus dans des temps égaux par un corps tombant, croissent par un excès égal, lequel a la valeur BD; il apparaît maintenant, puisque BD = 2AB, qu'on aura BE = 3AB, EG = 5AB, GK = 7AB, et qu'en général les espaces parcourus augmenteront suivant la série des nombres impairs à partir de l'unité 1, 3, 5, 7, 9, etc.; et comme un nombre quelconque de ces valeurs prises consécutivement font un carré dont le côté est égal à ce nombre quelconque lui-même (p.e. la somme des trois premières est neuf, celle des quatre premières seize, etc.), il s'ensuit que les espaces parcourus par un corps tombant et pris chacun à partir du commencement de la chute, sont entre eux en raison double des temps de chute, bien entendu si l'on prend des temps commensurables.

Or, la démonstration peut aisément être étendue aux temps incommensurables eux aussi. En effet, considérons des temps de ce genre ayant entre eux un rapport égal à celui des longueurs AB et CD [Fig. 25] et soient E et F les espaces parcourus dans ces temps pris l'un et l'autre depuis le commencement de la chute. Je dis que l'espace E sera à l'espace F comme le carré de AB est à celui de CD.

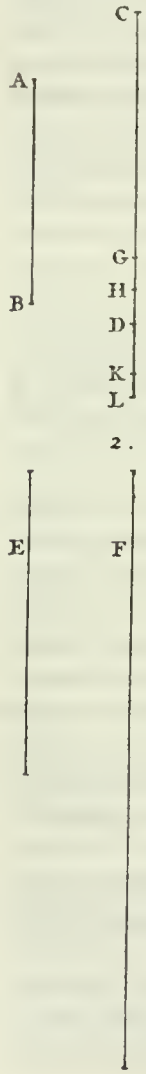
Car si cela est nié: que l'espace E ait d'abord à l'espace F un rapport supérieur à celui de AB^2 à CD^2, savoir celui de AB^2 à CG^2, CG étant pris inférieur à CD. Qu'on ôte de CD la partie DH moindre que DG — CG et telle que le reste HC soit commensurable avec AB; car il est certain que ceci est possible. On aura donc CH > CG. Mais comme le carré du temps AB est à celui du temps CH, ainsi est l'espace E parcouru pendant le temps AB à l'espace parcouru pendant le temps CH, d'après ce qui a été démontré plus haut. Mais l'espace F, parcouru pendant le temps CD, est plus grand que celui parcouru pendant le temps CH. Or, $E : F = AB^2 : CG^2$ par hypothèse; par conséquent le rapport $AB^2 : CG^2$ sera aussi inférieur au rapport $AB^2 : CH^2$; il en résulte que le carré de CG

quadrupla DB ad EA: unde EA quadrupla erit ipſius BA: eadem vero EA æquatur, uti diximus, & duplæ AB & ſimplici BD. ergo BD duplæ AB æqualis erit; quod erat demonſtrandum. De descensu gravium.

PROPOSITIO III. (*p.* 25).

Spatia duo, à gravi cadente quibuſlibet temporibus transmiſſa, quorum utrumque ab initio deſcenſus accipiatur, ſunt inter ſe in ratione duplicata eorundem temporum, ſive ut temporum quadrata, ſive etiam ut quadrata celeritatum in fine cujusque temporis acquiſitarum.

[Fig. 25.]



Quum enim oſtenſum ſit propoſitione antecedenti ſpatia AB, BE, EG, GK [Fig. 24], quotcunque fuerint, æqualibus temporibus à cadente, peracta, creſcere æquali exceſſu, qui exceſſus ſit ipſi BD æqualis: Patet nunc, quoniam BD eſt dupla AB, ſpatium BE fore triplum AB; EG quintuplum ejuſdem AB; GK ſeptuplum; aliaque deinceps auctum iri ſecundum progreſſionem numerorum imparium ab unitate, 1, 3, 5, 7, 9, &c. cumque quotlibet horum numerorum, ſeſe conſequentium, ſumma faciat quadratum, cujus latus eſt ipſa adſumptorum numerorum multitudo (velut ſi tres primi addantur, facient novem, ſi quatuor ſexdecim) ſequitur hinc ſpatia, à gravi cadente tranſmiſſa, quorum utrumque à principio caſus inchoetur, eſſe inter ſe in ratione duplicata temporum quibus caſus duravit, ſi nempe tempora commenſurabilia ſumantur.

Facile autem & ad tempora incommenſurabilia demonſtratio extendetur. Sint enim tempora hujuſmodi, quorum inter ſe ratio ea quæ linearum AB, CD [Fig. 25]. ſpatiaque temporibus his transmiſſa ſint E, & F, utraque nimirum ab initio deſcenſus adſumpta. Dico eſſe, ut quadratum AB ad quadratum CD, ita ſpatium E ad F.

Si enim negetur; habeat primo, ſi poteſt, ſpatium E ad F majorem rationem quam quadratum AB ad quadratum CD, nempe eam quam quadratum AB ad quadratum CG, ſumta CG minore quam CD, & à CD auferatur pars DH, minor quam DG exceſſus CD ſupra CG, atque ita ut reliqua HC commenſurabilis ſit ipſi AB; hoc enim fieri poſſe conſtat. Erit ergo CH major quam CG. Atqui ut quadratum temporis AB ad quadratum temporis CH, ita ſpatium E, quod tempore AB peractum eſt, ad ſpatium peractum tempore CH, per ſuperius oſtenſa. Hoc vero ſpatio majus eſt illud quod tempore CD percurritur, nempe ſpatium F. ergo ſpatii E ad ſpatium F minor eſt ratio quam quadratri AB ad quadratum CH. Sicut autem ſpatium E ad F, ita ponebatur eſſe quadratum AB ad quadratum CG, ergo minor quoque erit ra|tio qua- (*p.* 26).
drati AB ad quadratum CG, quam quadrati AB ad quadratum CH,

De la chute des corps graves.

eſt plus grand qu le carré de CH, ce qui eſt abſurde puiſque nous avons poſé CH > CG. Ainſi le rapport E : F n'eſt pas ſupérieur à $AB^2 : CD^2$.

Qu'il lui ſoit donc inférieur, ſi cela ſe peut; et ſoit le rapport de l'eſpace E à l'eſpace F le même que celui du carré AB au carré CL, CL étant pris plus grand que CD. Ôtons de CL LK, plus petit que LD, c.à.d. que CL — CD, de telle manière que le reſte KC ſoit commenſurable avec AB. Comme l'eſpace E, parcouru dans le temps AB, eſt à l'eſpace parcouru dans le temps CK comme le carré du temps AB eſt au carré du temps CK, mais que l'eſpace F parcouru dans le temps CD eſt inférieur à l'eſpace parcouru dans le temps CK, le rapport de l'eſpace E à l'eſpace F ſera ſupérieur à $AB^2 : CK^2$. Mais $E : F = AB^2 : CL^2$ par hypothèſe. Donc $AB^2 : CL^2 > AB^2 : CK^2$, et par conſéquent $CL^2 < CK^2$. Ce qui eſt abſurde, puiſque CL > CK. Par conſéquent il eſt également faux de dire que $E : F < AB^2 : CD^2$. Il eſt donc néceſſaire que ces deux rapports ſoient égaux. Enfin, attendu que les viteſſes acquiſes au bout des temps AB et CD ſont entre elles comme ces temps, il apparaît que le rapport des eſpaces E et F eſt auſſi le même que celui des carrés des temps AB et CD pendant leſquels ils ont été parcourus. La propoſition eſt donc démontrée.

[Fig. 24.]

PROPOSITION IV[1]).

A B D E F G H K

Lorſqu'un corps peſant aura commencé à tendre vers le haut avec la viteſſe acquiſe à la fin de ſa chute, il arrivera qu'il parcourra dans des temps égaux en remontant les eſpaces parcourus d'abord en deſcendant et qu'il s'élèvera de cette façon juſqu'à la hauteur dont il était tombé. De plus il arrivera qu'en des parties égales de temps il perdra des quantités égales de viteſſe.

En effet, que l'on conſidère, comme dans le cas de la Prop. II, des eſpaces en nombre quelconque parcourus en tombant depuis le repos dans d'égales durées de temps, dont l'eſpace AB [Fig. 24] ſoit le premier, et dont le deuxième ſoit la ſomme de BD, qui pourrait être parcouru uniformément avec la viteſſe acquiſe par la chute AB, et de DE égal à AB, tandis que le troiſième eſt la ſomme de EF, double de BD, et de FG, égal à AB; le quatrième la ſomme de GH = 3BD et de HK de nouveau égal à AB, et ainſi de ſuite s'il y en a encore davantage. Je dis que lorſque le corps remonte, il devra parcourir de nouveau les eſpaces KG, GE, EB, BA dans des temps égaux aux temps reſpectifs de la deſcente, en commençant ſon aſcenſion avec la viteſſe qu'il avait acquiſe à la fin de la chute au point K.

Pour être plus court, je déſignerai de nouveau chaque viteſſe par la longueur de l'eſpace que le corps pourrait parcourir avec cette viteſſe dans un élément de temps pareil à ceux conſidérés dans le cas de la deſcente.

D'aprés ce qui a été démontré dans la propoſition précédente, le corps, lorſqu'il eſt parvenu en K, poſſède une viteſſe GH + BD ou KF, puiſque KF = HG + BD; en effet, les parties HK et FG ſont l'une et l'autre égales à AB et

ac proinde quadratum CG majus quadrato CH; quod eſt abſurdum, quum CH major dicta ſit quam CG. Non habet igitur ſpatium E ad F majorem rationem quam quadratum AB ad quadratum CD. DE DESCENSU GRAVIUM.

Habeat jam, ſi poteſt, minorem; ſitque ratio ſpatii E ad F eadem quæ quadrati AB ad quadratum CL, ſumptâ CL majore quam CD, & à CL auferatur LK minor exceſſu LD, quo CD ſuperatur à CL, atque ita ut reliqua KC ſit commenſurabilis AB. Quia ergo ut quadratum temporis AB ad quadratum temporis CK, ita eſt ſpatium E, peractum tempore AB, ad ſpatium peractum tempore CK. Hoc vero ſpatio minus eſt ſpatium peractum tempore CD, nempe ſpatium F. erit proinde ſpatii E ad F major ratio quam quadrati AB ad quadratum CK. Sicut autem ſpatium E ad F, ita ponebatur eſſe quadratum AB ad quadratum CL. Ergo major erit ratio quadrati AB ad quadratum CL quam ejuſdem quadratri AB ad quadratum CK, ideoque quadratum CL minus erit quam qu. CK. quod eſt abſurdum, quum CL major ſit quam CK. Ergo neque minorem rationem habet ſpatium E ad F quam quadratum AB ad quadratum CD. quare neceſſe eſt ut eandem habeat. Porro cum celeritates in fine temporum AB, CD acquiſitæ ſint inter ſe ſicut ipſamet tempora; apparet rationem ſpatiorum E ad F eandem quoque eſſe quæ quadratorum temporum AB, CD, quibus transmiſſa ſunt. Itaque conſtat propoſitum.

PROPOSITIO IV[1]).

Si grave celeritate ea quam in fine deſcenſus acquiſivit ſurſum tendere cæperit, fiet ut paribus temporis partibus, ſpatia quæ prius ſurſum, eadem deorſum tranſeat, adeoque ad eandem unde deſcenderat altitudinem aſcendat. Item ut æqualibus temporis partibus æqualia amittat celeritatis momenta.

Sunto enim ut in propoſitione 2, ſpatia quotlibet, æqualibus | temporis partibus (*p.* 27). cadendo è quiete peracta, quorum primum AB [Fig. 24]; ſecundum compoſitum ex BD, quod celeritate æquabili acquiſita per AB tranſeundum erat, & ex DE ipſi AB æquali; tertium compoſitum, ex EF, duplo ipſius BD, & ex FG, eidem AB æquali; quartum compoſitum ex GH, triplo ipſius BD, & ex HK ipſi itidem AB æquali, atque eadem ratione porro creſcentia, ſi plura fuerint. Dico totidem æqualibus temporibus eadem ſpatia KG, GE, EB, BA, ſingula ſingulis peragenda eſſe à gravi ſurſum tendente, atque incipiente cum celeritate in fine deſcenſus K acquiſita.

Brevitatis autem gratia celeritas quæque deſignetur deinceps longitudine ſpatii quod grave motu æquabili, cum celeritate illa, atque temporis parte una, quales in deſcenſu conſideravimus, tranſmiſſurum eſſet.

Itaque ex oſtenſis dicta propoſitione, cum in K grave pervenerit, habet celeritatem GH auctam celeritate BD, hoc eſt celeritatem KF, quia KF æquatur ipſis HG, BD, ſunt enim partes ſingulæ HK, FG, æquales ipſi AB, ac proinde utraque ſimul ipſi BD,

[1]) Comparez le § 4 à la p. 130 du T. XVII.

De la chute des corps graves.

par conſéquent leur ſomme eſt égale à BD, que nous avons démontré dans la Prop. II être le double de AB. Par conſéquent ſi au bout de la chute le corps, invertiſſant la viteſſe verticale acquiſe en K, s'élevait d'un mouvement uniforme, il parcourrait l'eſpace KF en un élément de temps. Mais, puiſque l'action de la gravité s'en mêle, ſon aſcenſion KF ſera diminuée d'un eſpace FG égal à AB, comme cela reſſort de l'énoncé d'une de nos hypothèſes initiales. Pendant le premier élément de temps le corps ne montera donc qu'à la hauteur KG dont il était deſcendu dans l'élément de temps précédent. Mais il eſt néceſſaire qu'en même temps la viteſſe ait diminué de BD, qui eſt la viteſſe acquiſe par une chute d'un élément de temps. Lorſque le corps ſera remonté juſqu'en G, il lui reſte donc une viteſſe HG, puiſqu'au début de l'aſcenſion il poſſédait une viteſſe HG + BD. Or GD = HG, puiſque HG = FE + DB = FE + 2AB = FE + FG + ED. Par conſéquent, ſi le corps montait de G d'un mouvement uniforme avec la viteſſe qu'il poſſède en ce point. il parcourrait l'eſpace GD en un élément de temps. Mais grâce à l'action de la peſanteur cette hauteur ſera diminuée de l'eſpace DE égal à AB. Pendant le deuxième élément de temps le corps s'élèvera donc d'un eſpace GE, le même qu'il avait parcouru en tombant dans un élément égal de temps. En même temps il faut qu'il ait perdu de nouveau une partie de ſa viteſſe égale à celle qui correſpond à une chute d'un élément de temps, ſavoir la viteſſe BD. Lorſqu'il ſe ſera élevé juſqu'en E, il a donc la viteſſe FE qui eſt égale à la différence GD — BD. Car BD, comme nous l'avons déjà dit, eſt égale a la ſomme DE + FG.

Or, on a FE = EA, puiſque FE = 2BD, en d'autres termes FE = BD + 2AB = BD + AB + DE. Par conſéquent ſi le corps continuait à monter à partir de E d'un mouvement uniforme avec la viteſſe qu'il a en ce point, il parcourrait l'eſpace EA en un élément de temps. Mais puiſque la gravité exerce ſon action, cette hauteur ſera diminuée de l'eſpace AB. Par conſéquent pendant cet élément de temps il ne montera que d'une hauteur EB, eſpace qu'il avait auſſi parcouru en deſcendant dans un élément égal de temps. En ce moment il doit néceſſairement avoir perdu de nouveau une viteſſe telle qu'il pourrait l'acquérir en tombant durant un élément de temps, c.à.d. la viteſſe BD. Par conſéquent le corps arrivé en B a pour reſte de viteſſe la viteſſe BD, tandis qu'en E il avait la viteſſe FE double de BD. S'il continuait donc à monter à partir de B avec une viteſſe conſtante telle qu'il la poſſède en ce point, il parcourrait en un élément de temps un eſpace égal à DB ou 2AB. Mais par l'effet de la gravité cette hauteur eſt diminuée d'un eſpace égal à AB. Pendant cet élément de temps le corps ne montera donc que de BA qu'il avait auſſi parcouru en deſcendant pendant le premier élément de temps. Et à la fin du dernier élément de temps conſidéré ici le corps ſe trouvera néceſſairement au point A. Mais quelqu'un dira peut-être qu'il s'eſt élevé plus haut que le point A et eſt retombé à partir de là. Ceci toutefois ſerait abſurde puiſqu'il ne peut, par un mouvement dû à la gravité, monter à une plus grande hauteur que celle dont il était deſcendu. D'ailleurs comme de la viteſſe qu'il avait en B la portion BD a été anéantie, il eſt évident que lorſque le corps atteignait

quam esse duplam AB ostendimus propositione 2. Itaque celeritatem in fine descensus K acquisitam sursum convertendo, si grave æquabili motu ferretur, conficeret una temporis parte spatium KF. Atqui, gravitatis actione accedente, diminuetur ascensus KF spatio FG ipsi AB æquali, ut patet ex dictis ad hypothesin initio sumptam. Ergo parte prima temporis ascendet grave tantum per KG, quo eodem spatio parte temporis novissima descenderat. Simul vero & celeritati tantum decessisse necesse est, quantum acquiritur temporis parte una deorsum cadendo, hoc est celeritatem BD. Itaque grave, ubi ad G ascenderit, habet celeritatem reliquam HG, cum initio ascensus habuerit celeritatem HG una cum celeritate BD. Est autem ipsi HG æqualis GD; quum æquetur ipsi FE una cum DB, hoc est una cum dupla AB, hoc est una cum duabus FG & ED; Ergo si ex G, cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, conficeret una parte temporis spatium GD. Accedente autem gravitatis actione, diminuetur ascensus iste spatio DE, ipsi AB æquali. Ergo, hac secunda parte temporis, ascendet per spatium GE, quod simili temporis parte etiam cadendo transierat. Simul autem celeritate tantum decessisse denuo debet quantum temporis parte una ex casu acquiritur; nempe celeritas BD. Itaque ubi usque ad | E ascenderit, habet (*p.* 28). duntaxat celeritatem FE, quæ nimirum relinquitur quum à celeritate GD aufertur celeritas BD. Nam BD, ut jam diximus, æqualis est duabus DE, FG.

De descensu gravium.

Est autem ipsi FE æqualis EA, quum FE æquetur ipsi BD bis sumptæ, hoc est ipsi BD una cum dupla AB, hoc est una cum duabus AB, DE. Ergo si ex E cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset una temporis parte spatium EA. Sed accedente actione gravitatis, diminuetur ascensus iste ipso spatio AB. Proinde hac parte temporis per spatium EB tantum ascendet, quod simili parte temporis descendendo quoque transierat. Hic vero rursus celeritati tantum decessisse necesse est quantum una temporis parte cadendo deorsum acquiritur, hoc est celeritatem BD. Itaque grave, ubi usque ad B ascenderit, habet celeritatem ipsam BD reliquam, cum in E habuerit celeritatem FE ipsius BD duplam. Si ergo ex B cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset parte una temporis spatium æquale ipsi DB, hoc est duplum AB. Sed accedente gravitatis actione, diminuitur ascensus iste spatio quod ipsi AB æquale sit. Igitur hac parte temporis ascendet tantummodo per spatium BA, quod etiam primo descensus tempore transierat. Atque in fine quidem extremi temporis hujus necessario grave in A puncto reperietur. Sed dicetur forsan altius ascendisse quam ad A, atque inde eo relapsum esse. At hoc absurdum esset, cum non possit, motu à gravitate profecto, altius quam unde decidit ascendere. Porro quum celeritati quam in B habebat rursus decesserit celeritas BD,

De la chute des corps graves.

A il ne lui reſtait aucune viteſſe et que par conſéquent il n'a pu s'élever plus haut. Il eſt donc démontré qu'il eſt parvenu à la hauteur même dont il était tombé et qu'il a de nouveau parcouru chacun des divers eſpaces (qu'il avait traverſés en deſcendant en des éléments de temps égaux entre eux) dans des temps d'aſcenſion de même durée; et il s'eſt montré de plus que dans des éléments égaux de temps il a perdu des quantités égales de viteſſe. La propoſition eſt donc prouvée.

Or, comme il a été admis dans la démonſtration de la Prop. II, dont la propoſition précédente dépend, qu'il exiſte un rapport déterminé entre les eſpaces parcourus par un corps tombant dans des temps conſécutifs égaux, et que ce rapport eſt le même quels que ſoient les temps égaux conſidérés — ce qui doit être ainſi d'après la nature du phénomène et, ſi on voulait le nier, il faudrait avouer que la recherche du rapport de ces eſpaces eſt vaine [1]) — cependant, comme la propoſition peut auſſi être démontrée ſans ce prémice, en ſuivant la méthode de Galilée, il ſera utile de formuler ici plus correctement la démonſtration qu'il a donnée dans une forme moins parfaite [2]). Nous démontrerons donc de nouveau la

PROPOSITION V.

L'eſpace parcouru pendant un certain temps par un corps qui commence ſa chute en partant du repos eſt la moitié de l'eſpace que ce corps pourrait parcourir d'un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe par la chute au bout du temps conſidéré.

Soit AH [Fig. 26] le temps de la chute entière; puiſſe le mobile avoir parcouru en ce temps une diſtance dont le plan P indique la grandeur. De plus, en tirant HL, de longueur quelconque, perpendiculairement à AH [3]), nous admettons que cette lon-

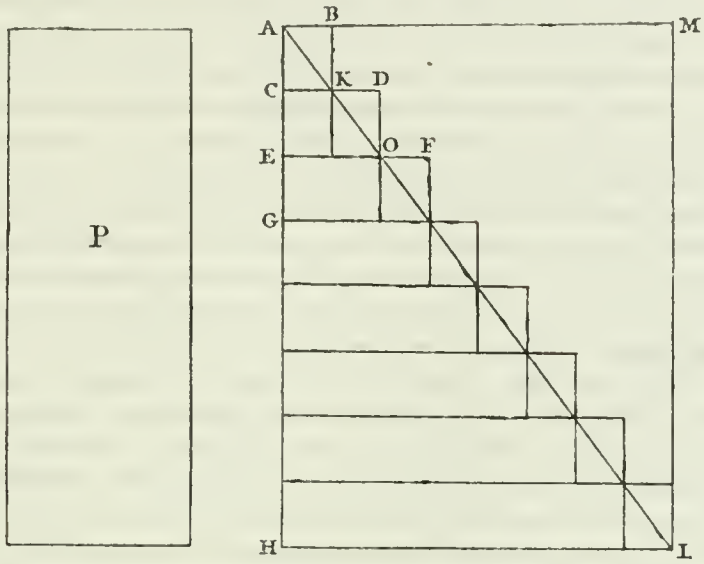
[1]) Comparez la p. 128 (avec la note 1) du T. XVII, déjà citée dans la note 1 de la p. 129 qui précède.

[2]) „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Giornata Terza", Th. II, Prop. II avec le Cor. I (Ed. Naz. VIII, p. 209—210); cette proposition de Galilée a aussi été citée à la p. 127 (note 5) du T. XVII. Comparez avec la Fig. 26 la Fig. 34, probablement intercalée plus tard, de la p. 130 du T. XVII.

[3]) Huygens annote en marge au crayon (les mots sont à peine lisibles): „spatium designatum plano P potius post spatium rectanguli post designatum [il s'agit évidemment du rectangle AHL] poni debuerat, quum HL longitudinis cujuslibet ducatur".

patet jam gravi in A conſtituto nullam celeritatem ſupereſſe, ac proinde non altius excurſurum. Itaque oſtenſum eſt ad eandem unde decidit altitudinem perveniſſe, & ſingula ſpatia, quæ æqualibus deſcenſus temporibus tranſmiſerat, eadem totidem aſcenſus temporibus remenſum eſſe: ſed & æqualibus temporibus æqualia ipſi deceſſiſſe celeritatis momenta apparuit. Ergo conſtat propoſitum. De descensu gravium.

[Fig. 26.]



Quia vero in demonſtratione propoſitionis ſecundæ, ex qua pendet præcedens, adſumptum fuit certam quandam eſſe proportionem ſpatiorum quæ continuis æqualibus temporibus à gravi cadente transeuntur, quæque eadem ſit, quæcunque æqualia tempora accipiantur; quod quidem & ex rei natura ita ſe habere neceſſe eſt, & ſi negetur, ſatendum fruſtra proportionem iſtorum ſpatiorum inveſtigari [1]). Tamen, quia propoſitum etiam absque hoc demonſtrari poteſt, Galilei methodum ſequendo, | operæ pretium erit demonſtrationem, ab illo minus perfecte traditam [2]), hic accuratius conſcribere. itaque rurſum hic demonſtrabimus. (p. 29).

PROPOSITIO V.

Spatium peractum certo tempore, à gravi è quiete caſum inchoante, dimidium eſſe ejus ſpatii quod pari tempore tranſiret motu æquabili, cum celeritate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

Sit tempus deſcenſus totius AH [Fig. 26], quo tempore mobile peregerit ſpatium quoddam cujus quantitas deſignetur plano P. ductaque HL perpendiculari ad AH [3]),

De la chute des corps graves.

gueur-là repréſente la viteſſe acquiſe au bout de la chute. Complétant enſuite le rectangle AHLM, nous entendons repréſenter par lui la grandeur de l'eſpace qui ſerait parcouru dans le temps AH avec la viteſſe HL. Il faut donc démontrer que le plan P eſt la moitié du rectangle MH, en d'autres termes, lorſqu'on tire la diagonale AL, qu'il eſt égal au triangle AHL.

Si le plan P n'eſt pas égal au triangle AHL, il ſera donc ou plus petit ou plus grand. Suppoſons d'abord, ſi la choſe eſt poſſible, le plan P inférieur au triangle AHL. Diviſons AH en autant de parties égales AC, CE, EG etc. que — lorſque nous circonſcrivons au triangle AHL une figure compoſée de rectangles dont la hauteur ſoit égale à la longueur de chacune de ces parties de AH, tels que les rectangles BC, DE et FG, et que nous inſcrivons dans le même triangle une deuxième figure compoſée de rectangles de la même hauteur tels que KE, OG, etc. — l'excès de la première figure ſur la deuxième ſoit moindre que celui du triangle AHL ſur le plan P. En effet, il eſt évident que ceci eſt poſſible, puiſque l'excès total de la figure circonſcrite ſur la figure inſcrite eſt égal à un très petit rectangle ayant HL pour baſe. Conſéquemment l'excès du triangle AHL ſur la figure inſcrite ſera certainement moindre que ſon excès ſur le plan P; la figure inſcrite au triangle ſera donc plus grande que le plan P. D'autre part, comme la droite AH repréſente le temps de la chute totale, ſes parties égales AC, CE, EG repréſenteront des parties égales de ce temps. Or, puiſque les viteſſes du mobile tombant croiſſent dans le même rapport que les temps de chute,* et que la viteſſe acquiſe à la fin du temps entier eſt HL, la viteſſe acquiſe au bout de la première partie AC du temps ſera CK, parce que AH : AC = HL : CK. Pareillement la viteſſe acquiſe au bout de la deuxième partie CE du temps, ſera ED et ainſi de ſuite. Il eſt évident que pendant le premier temps AC un certain eſpace ſupérieur à zéro a été traverſé par le mobile, et que pendant le deuxième temps CE un eſpace ſupérieur à KE a été parcouru, puiſque l'eſpace KE eût été parcouru dans le temps CE d'un mouvement uniforme avec la viteſſe CK. En effet, les eſpaces parcourus uniformément ont entre eux un rapport compoſé du rapport des temps et de celui des viteſſes; par conſéquent, puiſque nous avons admis que l'eſpace MH eſt parcouru dans le temps AH avec la viteſſe conſtante HL, il s'enſuit que l'eſpace KE eſt parcouru dans le temps CE avec la viteſſe CK, attendu que le rapport du rectangle MH au rectangle KE eſt compoſé des rapports AH : CE et HL : EO [1]).

* Prop. I. de cette Partie.

Comme l'eſpace KE, ainſi que je l'ai dit, eſt donc celui qui ſerait parcouru dans le temps CE avec la viteſſe uniforme CK, et que le mobile eſt tranſporté durant le temps CE d'un mouvement accéléré qui avait déjà au début de ce temps la viteſſe CK, il eſt manifeſte que par ce mouvement accéléré le mobile parcourra dans le temps CE un eſpace ſupérieur à KE. Pour la même raiſon il traverſera pendant le troiſième temps EG une diſtance ſupérieure à OG: car c'eſt OG qu'il parcourrait dans ce même temps EG avec la viteſſe uniforme EO. Et ainſi de ſuite, dans chacune des parties du temps AH, le mobile parcourra un eſpace ſupérieur au rectangle correſpondant de la figure inſcrite. C'eſt pourquoi l'eſpace entier parcouru d'un mouvement accéléré ſera plus

longitudinis cujuſlibet, referat illa celeritatem in fine caſus acquiſitam. Deinde completo rectangulo AHLM, intelligatur eo notari quantitas ſpatii quod percurreretur tempore AH, cum celeritate HL. Oſtendendum eſt igitur planum P dimidium eſſe rectanguli MH, hoc eſt, ducta diagonali AL, æquale triangulo AHL. De descensu gravium.

Si planum P non eſt æquale triangulo AHL, ergo aut minus eo erit, aut majus. Sit primo, ſi fieri poteſt, planum P minus triangulo AHL. dividatur autem AH in tot partes æquales AC, CE, EG &c. ut, circumſcriptâ triangulo AHL figurâ è rectangulis quorum altitudo ſingulis diviſionum ipſius AH partibus æquetur, ut ſunt rectangula BC, DE, FG, alterâque eidem triangulo inſcriptâ, ex rectangulis ejuſdem altitudinis, ut ſunt KE, OG &c. ut, inquam, exceſſus illius figuræ ſupra hanc, minor ſit exceſſu | trianguli AHL ſupra planum P. hoc enim fieri poſſe perſpicuum eſt, cum totus (*p.* 30). exceſſus figuræ circumſcriptæ ſuper inſcriptam æquetur rectangulo infimo, baſin habenti HL. Erit itaque omnino exceſſus ipſius trianguli AHL ſupra figuram inſcriptam minor quam ſupra planum P, ac proinde figura triangulo inſcripta major plano P.

Porro autem, quum recta AH tempus totius deſcenſus referat, ejus partes æquales AC, CE, EG, æquales temporis illius partes referent. Cumque celeritates mobilis cadentis creſcant eadem proportione qua tempora deſcenſus *; ſitque celeritas in fine totius temporis acquiſita HL; erit ea, quæ in fine primæ partis temporis AC acquiretur, CK; quia ut AH ad AC, ita HL ad CK. Similiter quæ in fine partis temporis ſecundæ CE acquiritur, erit EO, atque ita deinceps. Patet autem, tempore primo AC, ſpatium aliquod à mobili transmiſſum eſſe, quod majus ſit nihilo; tempore vero ſecundo CE transmiſſum eſſe ſpatium quod majus ſit quam KE, quia ſpatium KE transmiſſum fuiſſet tempore CE, motu æquabili, cum celeritate CK. habent enim ſpatia, motu æquabili transacta, rationem compoſitam ex ratione temporum, & ratione velocitatum, ideoque cum tempore AH, celeritate æquabili HL percurri poſuerimus ſpatium MH, ſequitur tempore CE, cum celeritate CK, percurri ſpatium KE, quum ratio rectanguli MH ad rectangulum KE componatur ex rationibus AH ad CE, & HL ad EO [1]). * Prop. 1. huj.

Quum ergo, ut dixi, ſpatium KE ſit illud quod transmitteretur tempore CE, cum celeritate æquabili CK, mobile autem feratur tempore CE motu accelerato, qui jam principio hujus temporis habet celeritatem CK; manifeſtum eſt iſto accelerato motu, tempore CE, majus ſpatium quam KE confecturum. Eadem ratione, tempore tertio EG, majus ſpatium conficiet quam OG, quia nempe hoc confecturum eſſet tempore eodem EG, cum celeritate æquabili EO. Atque ita deinceps, ſingulis temporis AH partibus, à mobili majora ſpatia quam ſunt rectangula figuræ inſcriptæ, ipſis partibus

[1]) Lisez: CK (correction de 's Gravesande).

DE LA CHUTE DES CORPS GRAVES.

grand que la figure inſcrite. Or, cet eſpace fut poſé égal au plan P. Par conſéquent la figure inſcrite ſera plus petite que l'eſpace P, ce qui eſt abſurde, car il a été démontré qu'elle lui eſt ſupérieure. Le plan P n'eſt donc pas inférieur au triangle AHL. Nous ferons voir qu'il ne lui eſt pas non plus ſupérieur.

En effet, qu'il le ſoit, ſi cela eſt poſſible. Diviſons AH en parties égales et ſuppoſons de nouveau, comme précédemment, qu'au triangle AHL ſoit inſcrit et circonſcrit une figure compoſée de rectangles, de telle manière que l'une ſurpaſſe l'autre d'un excès inférieur à celui du plan P ſur le triangle AHL. La figure circonſcrite ſera donc néceſſairement inférieur au plan P. Il eſt évident d'abord que pendant la première partie AC du temps un eſpace inférieur à BC eſt traverſé par le mobile, puiſque ce dernier ſerait parcouru dans le même temps AC avec une viteſſe uniforme CK, viteſſe que le mobile ne poſſède qu'à la fin du temps AC. De la même manière dans la deuxième partie CE du temps un eſpace inférieur à DE ſera parcouru du mouvement accéléré, puiſque DE ſerait parcouru dans le même temps CE avec la viteſſe conſtante EO que le mobile n'atteint qu'à la fin du temps CE. Et ainſi de ſuite dans chacune des parties du temps AH il ſera parcouru par le mobile un eſpace inférieur au rectangle correſpondant de la figure circonſcrite. C'eſt pourquoi l'eſpace total parcouru d'un mouvement accéléré ſera moindre que la figure circonſcrite entière. Or, cet eſpace fut poſé égal au plan P; par conſéquent le plan P ſera auſſi inférieur à la figure circonſcrite. Ce qui eſt abſurde, attendu qu'il a été démontré que cette figure eſt plus petite que le plan P. Par conſéquent le plan P n'eſt pas plus grand que le triangle AHL. Mais il a auſſi été démontré qu'il n'eſt pas plus petit. Il lui eſt donc néceſſairement égal. C. Q. F. D.

Il faut ſavoir en outre que tout ce qui a été démontré juſqu'à préſent, s'applique aux corps graves deſcendant ou montant le long de plans inclinés tout auſſi bien qu'à ceux qui ſe meuvent ſuivant la verticale, puiſque ce que nous avons poſé touchant l'effet de la peſanteur doit être admis par même raiſon dans les deux cas [1]).

Or de là il ne ſera pas difficile de prouver la propoſition ſuivante laquelle Galilée demandait qu'on lui accordât comme en quelque ſorte évidente par elle-même. Car la démonſtration qu'il a tâché d'en donner plus tard et qui ſe trouve dans l'édition poſtérieure [2]) de ſes ouvrages eſt peu ſolide, du moins à mon avis. Cette propoſition eſt la ſuivante.

PROPOSITION VI.

Les viteſſes des corps peſants, acquiſes en deſcendant par des plans diverſement inclinés, ſont égales lorſque les élévations des plans le ſont.

Nous appelons élévation d'un plan ſa hauteur verticale.

---

[1]) Comparez la note 3 de la p. 131, ainsi que la note 7 de la p. 284 du T. XVII.

adjacentia, peragentur. Quare totum ſpatium motu accelerato peractum majus erit ipſa figura inſcripta. Spatium vero illud æquale poſitum fuit plano P. Itaque figura inſcripta minor erit ſpatio P. quod eſt abſurdum; eodem enim ſpatio major oſtenſa fuit. Non eſt igitur planum P minus triangulo AHL. At neque majus eſſe oſtendetur. De descensu gravium.

Sit enim, ſi poteſt; & dividatur AH in partes æquales, atque ad earum altitudinem, inſcripta circumſcriptaque rurſus, | ut ante, ſit triangulo AHL figura ex rectangulis, (*p.* 31). ita ut altera alteram excedat minori exceſſu quam quo planum P ſuperat triangulum AHL, erit igitur neceſſario figura circumſcripta minor plano P. Conſtat jam, prima temporis parte AC, minus ſpatium à mobili tranſmitti quam ſit BC, quia hoc percurreretur eodem tempore AC cum celeritate æquabili CK, quam demum in fine temporis AC mobile adeptum eſt. Similiter ſecunda parte temporis CE, minus ſpatium motu accelerato transmittetur quam ſit DE, quia hoc percurreretur eodem tempore CE, cum celeritate æquabili EO, quam demum in fine temporis CE mobile aſſequitur. Atque ita deinceps, ſingulis partibus temporis AH, minora ſpatia à mobili trajicientur quam ſunt rectangula figuræ circumſcriptæ, ipſis partibus adjacentia. Quare totum ſpatium motu accelerato peractum, minus erit ipſa figura circumſcripta. Spatium vero illud æquale poſitum fuit plano P; ergo planum P minus quoque erit figura circumſcripta. quod eſt abſurdum, cum figura hæc plano P minor oſtenſa fuerit. Ergo planum P non majus eſt triangulo AHL, ſed nec minus eſſe jam oſtenſum fuit. Ergo æquale ſit neceſſe eſt; quod erat demonſtrandum.

Et hæc quidem omnia quæ hactenus demonſtrata ſunt, gravibus per plana inclinata deſcendentibus atque aſcendentibus æque ac perpendiculariter motis convenire ſciendum eſt: cum, quæ de effectu gravitatis poſita fuerunt, eadem ratione utrobique ſint admittenda [1]).

Hinc vero non difficile jam erit demonſtrare propoſitionem ſequentem quam concedi ſibi, ut quodammodo per ſe manifeſtam, Galileus poſtulavit. nam demonſtratio illa quam poſtea adferre conatus eſt, quæque in poſteriori operum ejus editione [2]) extat, parum firma meo quidem judicio videtur. Eſt autem propoſitio hujusmodi.

PROPOSITIO VI.

Celeritates gravium, ſuper diverſis planorum inclinationibus deſcendendo acquiſitæ, æquales ſunt, ſi planorum elevationes fuerint æquales.

Elevationem plani vocamus altitudinem ejus ſecundum perpendiculum.

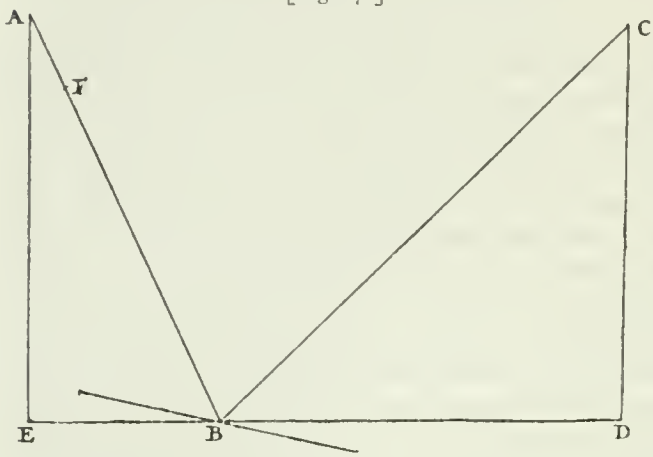
---

[2]) On peut considérer comme une première édition des „Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" les „Mechaniques de Galilee" de 1634 par Mersenne (T. XVII, p. 336, note 5). L'édition italienne de 1638 de Leiden des „Discorsi" ne contient pas non plus de démonstration en règle (voir les p. 205 et suiv. du T. VIII de 1898 de l'Ed. Naz.). Comparez les p. 346 du T. XVI et 131—132 (§ 5) du T. XVII.

De la chute des corps graves.

Considérons donc des plans inclinés dont AB et CB [Fig. 27] soient les sections faites par un plan vertical et dont les élévations AE et CD soient égales. Supposons que le corps descende en tombant de A le long du plan AB et une autre fois de C le long du plan CB. Je dis que dans l'un et l'autre cas ce corps acquerra le même degré de vitesse au point B.

[Fig. 27.]



En effet si l'on dit que le corps tombant le long de CB acquiert une vitesse moindre qu'en tombant le long de AB, qu'il ait donc, après être tombé suivant CB, la vitesse qu'il pourrait acquérir aussi par une chute suivant FB, par hypothèse inférieure à AB. Mais en tombant suivant CB il acquerra une vitesse par laquelle il pourrait de nouveau remonter tout le long de BC *. Par conséquent il acquerra aussi en tombant selon FB la vitesse qui lui permettrait de remonter tout le long de BC. Si après être tombé de F en B il continue son mouvement par BC, ce qui peut être obtenu par réflexion sur une surface oblique, il s'élèvera donc jusqu'en C, c.à.d. à une hauteur supérieure à celle dont il était descendu, ce qui est absurde.

* Prop. 4 de cette Partie.

On démontrera de la même manière qu'en tombant le long du plan AB il ne peut pas non plus acquérir une vitesse moindre que celle provenant de la chute le long de CB. Par conséquent la vitesse acquise par la chute suivant l'un ou l'autre plan est la même. C. Q. F. D.

Que si, au lieu de l'un ou de l'autre plan, on prend la verticale elle-même qui correspond à l'élévation des plans et qu'on fait tomber le mobile suivant cette verticale, il est certain que de cette façon aussi la même vitesse est obtenue que par la chute suivant les plans inclinés; en effet, la démonstration est la même.

En nous basant là-dessus, nous pourrons maintenant donner aussi une bonne démonstration d'un deuxième théorème de Galilée sur lequel est bâtie toute la théorie qu'il a enseignée sur les plans inclinés. Savoir la

PROPOSITION VII.

Les temps de chute le long de plans diversement inclinés, mais dont l'élévation est la même, sont entre eux comme les longueurs de ces plans [1]).

Sunto itaque plana inclinata, quorum ſectiones factæ plano ad horizontem erecto, AB, CB [Fig. 27], quorumque elevationes AE, CD | ſint æquales; & cadat grave ex (*p.* 32). A per planum AB, & rurſus ex C per planum CB. dico utroque caſu eundem gradum velocitatis in puncto B acquiſiturum. De descensu gravium.

Si enim per CB cadens minorem velocitatem acquirere dicatur quam cadens per AB, habeat ergo, per CB cadens, eam duntaxat quam per FB acquireret, poſita nimirum FB minore quam AB. Acquiret autem per CB cadens eam velocitatem qua rurſus per totam BC poſſit aſcendere *. Ergo & per FB acquiret eam velocitatem qua poſſit aſcendere per totam BC. Ideoque cadens ex F in B, ſi continuet porro motum per BC; quod repercuſſu ad ſuperficiem obliquam fieri poteſt; aſcendet uſque in C, hoc eſt, altius quam unde decidit, quod eſt abſurdum. * Prop. 4 huj.

Eodem modo oſtendetur neque per planum AB decidenti minorem velocitatem acquiri quam per CB. Ergo per utraque plana eadem velocitas acquiritur, quod erat demonſtrandum.

Quod ſi vero, pro plano alterutro, ſumatur perpendiculum ipſum planorum elevationi æquale, per quod decidere mobile ponatur, ſic quoque eandem quam per plana inclinata velocitatem ei acquiri conſtat; eadem namque eſt demonſtratio.

Porro hinc jam recte quoque procedet demonſtratio alterius theorematis Galileani, cui reliqua omnia, quæ de deſcenſu ſuper planis inclinatis tradidit, ſuperſtruuntur. Nempe

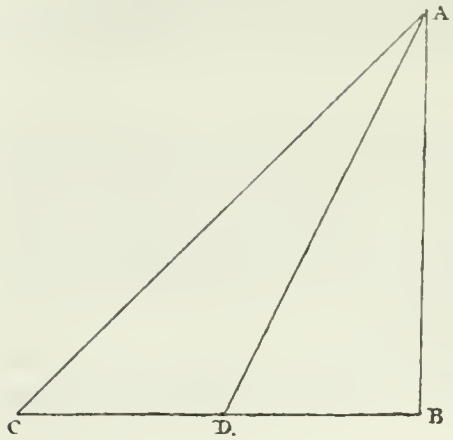
PROPOSITIO VII.

Tempora deſcenſuum ſuper planis diverſimode inclinatis, ſed quorum eadem eſt elevatio, eſſe inter ſe ut planorum longitudines [1]).

[1]) Comparez la § 6 à la p. 132 du T. XVII.

De la chute des corps graves.

[Fig. 28.]



Soient AC et AD les plans inclinés de même élévation AB [Fig. 28]. Je dis que le temps de la descente le long du plan AC est à celui correspondant à AD comme la longueur AC est à AD. En effet, le temps d'une chute par AC est égal au temps d'un mouvement uniforme le long de AC avec la moitié de la vitesse acquise par la chute suivant AC*. De la même manière le temps correspondant à AD est égal à celui d'un mouvement uniforme suivant AD avec la moitié de la vitesse acquise par la chute suivant AD. Or, cette demi-vitesse est égale à l'autre*: par conséquent le temps rapporté du mouvement uniforme suivant AC sera au temps du mouvement uniforme suivant AD comme AC est à AD. Par conséquent les temps respectivement égaux à ceux-là, savoir le temps de chute le long de AC et celui le long de AD, auront entre eux le même rapport AC : AD. C. Q. F. D.

* Prop. 2 de cette Partie.

* Prop. précéd.

On démontrera de la même manière que le temps de la descente suivant AC est au temps de la chute verticale le long de AB, comme sont entre elles les longueurs AC et AB.

PROPOSITION VIII.

Lorsqu'un mobile descend d'un mouvement continu d'une hauteur déterminée par un nombre quelconque de plans contigus d'inclinaison quelconque, il finira toujours par acquérir la même vitesse, laquelle sera égale à celle qu'il acquerrait par une chute verticale de même hauteur [1]).

Soient AB, BC, et CD [Fig. 29] les plans contigus, dont l'extrémité A ait au-dessus de la ligne horizontale DF, tracée par l'extrémité inférieure D, une hauteur égale à la perpendiculaire EF. Puisse le mobile descendre le long de ces plans de A jusqu'en D. Je dis qu'il aura en D la vitesse qu'il aurait en F s'il était tombé de E.

En effet, supposons que le prolongement de CB coupe la droite AE en G, et celui de DC la même AE en E. Puisque le mobile en descendant suivant AB acquiert la même vitesse à l'extrémité B que lorsqu'il descend suivant GB*, il est manifeste, vu que par hypothèse le changement de direction au point B ne modifie nullement le mouvement, qu'il aura en parvenant au point C la même vitesse que s'il était descendu le long du plan GC, en d'autres termes que s'il était descendu suivant EC. Il parcourra donc aussi le dernier plan CD de la même manière que s'il était venu suivant EC, et il aura par conséquent au point extrême D une même vitesse que s'il était

* Prop. 6 de cette Partie.

[1]) Comparez le § 7 à la p. 133 du T. XVII.

Sint plana inclinata AC, AD quorum eadem elevatio AB [Fig. 28]. dico | tempus (*p.* 33). descensus per planum AC ad tempus descensus per AD esse ut longitudo AC ad AD. Est enim tempus per AC æquale tempori motus æquabilis per eandem AC, cum celeritate dimidia ejus quæ acquiritur casu per AC *. Similiter tempus per AD est æquale tempori motus æquabilis per ipsam AD, cum dimidia celeritate ejus quæ acquiritur casu per AD. Est autem hæc dimidia celeritas illi dimidiæ celeritati æqualis *, ideoque dictum tempus motus æquabilis per AC, ad tempus motus æquabilis per AD, erit ut AC ad AD. Ergo & tempora singulis istis æqualia, nimirum tempus descensus per AC, ad tempus descensus per AD, eandem rationem habebunt, nempe quam AC ad AD. quod erat demonstrandum.

De descensu gravium.

* Prop. 2. huj.

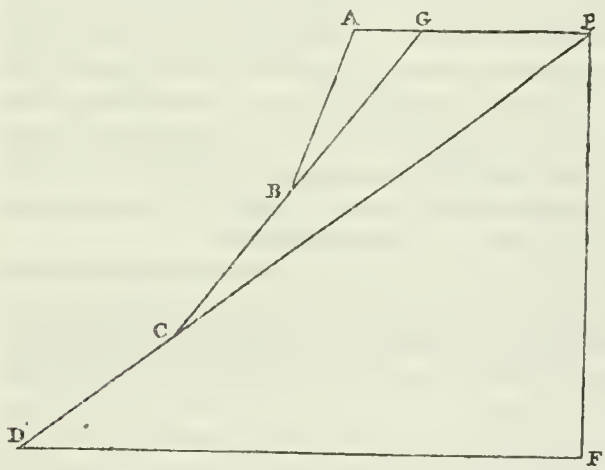
* Prop. præced.

Eodem modo ostendetur & tempus descensus per AC, ad tempus casus per AB perpendicularem, esse ut AC ad AB longitudine.

PROPOSITIO VIII.

Si ex altitudine eadem descendat mobile continuato motu per quotlibet ac quælibet plana contigua, utcunque inclinata; semper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine [1]).

[Fig. 29.]



Sint plana contigua AB, BC, CD [Fig. 29], quorum terminus A, supra horizontalem lineam DF per infimum terminum D ductam, altitudinem habeat quanta est perpendicularis EF. descendatque mobile per plana illa ab A usque in D. Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex E cadens, haberet in F.

Producta enim CB occurrat rectæ AE in G. Itemque DC producta | occurrat eidem AE (*p.* 34). in E. Quoniam itaque per AB descendens eandem acquirit velocitatem in termino B, atque descendens per GB *; manifestum est, cum flexus ad B nihil obstare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in C pervenerit, quantam si per GC planum descendisset; hoc est, quantam haberet ex descensu per EC. Quare & reliquum planum CD eodem modo transibit ac si per EC advenisset, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac si descendisset per planum ED,

* Prop. 6. huj.

De la chute des corps graves.

descendu suivant le plan ED, c.à.d. celle qui proviendrait aussi de la chute verticale selon EF. C. Q. F. D.

Par là il appert aussi que si le mobile descend le long d'une circonférence de cercle ou bien d'une ligne courbe quelconque (car il est ici permis de considérer les courbes comme composées d'une infinité de lignes droites) il acquiert toujours la même vitesse en descendant d'une même hauteur, savoir la vitesse qui résulterait d'une chute verticale.

PROPOSITION IX.

Lorsqu'un corps grave, après être tombé, tourne son mouvement vers le haut, il atteindra la hauteur même dont il est venu, quel que soit le nombre des surfaces planes contigues et quelles que soient leurs inclinaisons [1]).

Puisse le corps tomber de la hauteur AB [Fig. 30]. Soient DC, CD et DE les plans inclinés. B représente le point le plus bas, l'autre extrémité E est située à la même hauteur que le point A. Je dis que si le mobile, après la chute le long de AB, change la direction de son mouvement de sorte qu'il le continue suivant les dits plans inclinés, il parviendra jusqu'en E.

Qu'on dise en effet, si la chose est possible, qu'il n'arrive qu'en G. Prolongeons BC et CD jusqu'à leur rencontre en F et en H avec l'horizontale GF. Comme le mobile, après avoir parcouru les plans BC et CD, possède seulement la vitesse nécessaire pour escalader DG ou DH (car il est établi par la Prop. VI qu'il lui faut la même vitesse dans les deux cas), il avait donc, après avoir parcouru le plan BC, la vitesse nécessaire pour monter suivant CH ou CF. Il avait par conséquent en B la vitesse nécessaire pour monter le long de BF, c.à.d. celle qu'il pourrait acquérir en descendant le long de FB. Mais il possède en B une vitesse suffisante pour remonter jusqu'en A. Le corps pourrait donc avec la vitesse qu'il acquiert en descendant le long de FB remonter par BA, c.à.d. plus haut que son point de départ, ce qui est impossible.

La démonstration est absolument la même quel que soit le nombre des plans suivant lesquels le mobile doive monter. Partant, lors même que le nombre des plans est infini, c.à.d. lorsqu'on a affaire à une courbe, le mobile s'élèvera par celle-ci aussi jusqu'à la hauteur dont il était descendu.

---

[1]) Comparez le § 8 à la p. 134 du T. XVII.

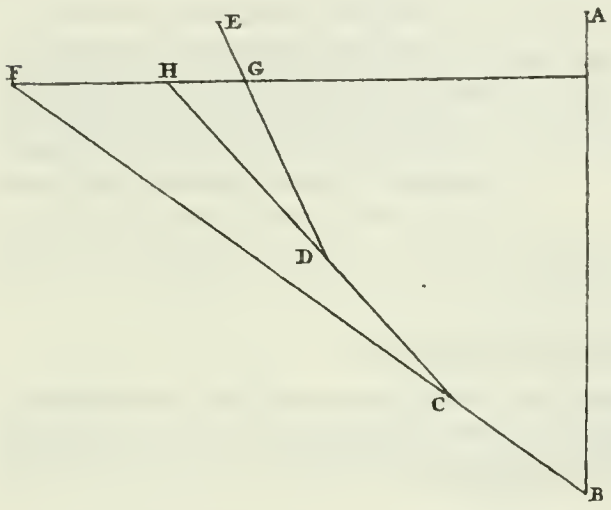
hoc eſt, eandem quam ex caſu perpendiculari per EF. quod erat demonſtrandum. De descensu gravium.

Hinc liquet etiam per circuli circumferentiam, vel per curvam quamlibet lineam deſcendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compoſitæ eſſent hic conſiderare licet) ſemper eandem illi velocitatem acquiri ſi ab æquali altitudine deſcenderit: tantamque eam eſſe velocitatem, quantam caſu perpendiculari ex eadem altitudine adipiſceretur.

PROPOSITIO IX.

Si grave, à deſcenſu, ſurſum convertat motum ſuum, aſcendet ad eandem unde venit altitudinem, per quascunque planas ſuperficies contiguas, & quomodocunque inclinatas, inceſſerit[1]).

[Fig. 30.]



Cadat grave ex altitudine AB [Fig. 30], & ex puncto B inclinata ſint ſurſum plana BC, CD, DE, quorum extremitas E ſit eadem altitudine cum puncto A. Dico ſi mobile, poſt caſum per AB, convertat motum ut pergat moveri per dicta plana inclinata, perventurum uſque in E.

Dicatur enim, ſi fieri poteſt, (p. 35). tantum ad G perventurum. Producantur BC & CD, donec occurrant horizontali GF in F & H. Cum igitur mobile, ſuperatis planis BC, CD, habeat tantum eam velocitatem quâ poſſit aſcendere per DG, vel per DH; nam ad hæc utraque eadem velocitate opus eſſe conſtat ex propoſitione 6; Ergo, ſuperato plano BC, eam duntaxat habebat qua potuiſſet aſcendere per CH, vel per CF. Ergo in B duntaxat eam qua potuiſſet aſcendere per BF, hoc eſt, eandem quam acquireret deſcendendo per FB. Atqui in B habet velocitatem qua poteſt aſcendere uſque in A. Ergo illa velocitate quam acquirit grave deſcendendo per FB, poſſet aſcendere per BA, hoc eſt, altius quam unde diſceſſerat, quod fieri non poteſt.

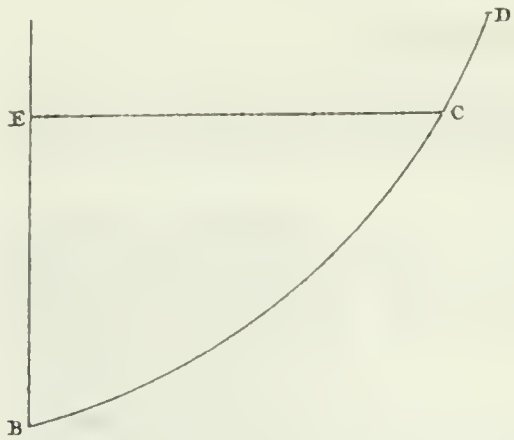
Eſt autem eadem prorſus demonſtratio quotcunque plana fuerint per quæ mobile aſcendat. Unde & ſi infinita fuerit planorum multitudo, hoc eſt, ſi ſuperficies aliqua curva ponatur, per hanc quoque ad eam ex qua venit altitudinem mobile aſſurget.

De la chute des corps graves.

PROPOSITION X.

Lorſqu'un mobile tombe perpendiculairement ou ſuivant une ſurface quelconque et qu'il eſt de nouveau porté en haut par la viteſſe acquiſe ſuivant une autre ſurface quelconque, il aura toujours en montant et en deſcendant la même viteſſe en des points ſitués à la même hauteur [1]).

[Fig. 31.]



Conſidérons par exemple le cas où un mobile qui tombe de la hauteur AB [Fig. 31] continue enſuite ſon mouvement par la ſurface BCD dont le point C ſoit à la même hauteur que le point E ſitué ſur la droite AB. Je dis que le mobile a en C la même viteſſe qu'auparavant en E.

En effet, comme il lui reſte en C la viteſſe néceſſaire pour s'élever juſqu'au point D ſitué à la même hauteur que A *, et comme il acquiert en tombant le long de AE la viteſſe qui lui permettrait de s'élever, après invertiſſement du mouvement, ſuivant CD *, il apparaît que lorſqu'en montant il a atteint C il poſſède la même viteſſe qu'il avait en E en deſcendant. C. Q. F. D.

* Prop. précéd.

* Prop. précéd.

PROPOSITION XI.

Lorſqu'un mobile tend à deſcendre par quelque ſurface et qu'après l'invertiſſement du mouvement il eſt porté en haut par la même ſurface ou par une autre ſemblable et ſemblablement poſée, il montera et deſcendra par le même eſpace en des temps égaux [2]).

Conſidérons par exemple le cas où le mobile deſcend par la ſurface AB [Fig. 32] et remonte, après être parvenu en B (le mouvement étant interverti) le long de la même ſurface AB ou bien le long de la ſurface BC ſemblable et ſemblablement placée par rapport au plan de l'horizon; il apparaît par les démonſtrations antérieures qu'il atteindra de nouveau la hauteur dont il eſt deſcendu. Or, comme il a partout aux points de même hauteur la même viteſſe tant en montant qu'en deſcendant *, il eſt clair que la même ligne eſt parcourue deux fois avec des viteſſes partout égales dans les deux cas, d'où réſulte auſſi que les temps des deux mouvements doivent être égaux. C. Q. F. D.

* Prop. précéd.

[1]) Comparez le § 9 à la p. 135 du T. XVII.

PROPOSITIO X.

De descensu gravium.

Si mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet ſuperficiem deſcendat, ac rurſus impetu concepto per quamlibet aliam feratur ſurſum, habebit aſcendendo ac deſcendendo in punctis æque altis eandem ſemper velocitatem [1]).

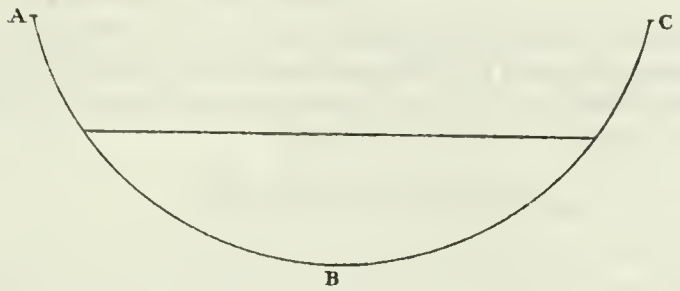
Ut ſi mobile ex altitudine AB [Fig. 31] decidens, motum deinde continuet per ſuperficiem BCD, in qua punctum C ſit pari altitudine atque in AB eſt punctum E. Dico in C eandem velocitatem ineſſe mobili atque in E fuerat.

Quum enim in C ea velocitas ſuperſit mobili qua porro aſcendat usque ad D punctum, æque altum ac A *: cumque & ex deſcenſu per AE velocitatem eam acquirat qua, converſo motu, aſcenſurum ſit per CD *; Patet cum pervenit ad C aſcendendo, eandem ipſum habere velocitatem, quam habebat in E deſcendendo; quod erat demonſtrandum. (*p.* 36). * Prop.præced. * Prop.præced.

PROPOSITIO XI.

Si mobile per ſuperficiem aliquam deorſum tendat, ac deinde converſo motu ſurſum per eandem ſuperficiem vel aliam ſimilem ſimiliterque poſitam feratur, æqualibus temporibus per idem ſpatium deſcendet atque aſcendet [2]).

[Fig. 32.]



Velut ſi per ſuperficiem AB deſcendat mobile [Fig. 32], atque ubi ad B pervenerit, converſo motu ſurſum per eandem AB, vel ei ſimilem & reſpectu plani horizontalis ſimiliter poſitam BC, aſcendat, conſtat ex ante demonſtratis, perventurum ad eandem ex qua venit altitudinem. Cum autem perpetuo, in punctis quorum eadem altitudo, eandem velocitatem habeat aſcendendo ac deſcendendo *; apparet eandem lineam bis eadem velocitate ſingulis ſui partibus percurri: unde & tempora utriusque motus æqualia eſſe neceſſe eſt; quod erat demonſtrandum. * Prop.præced.

---

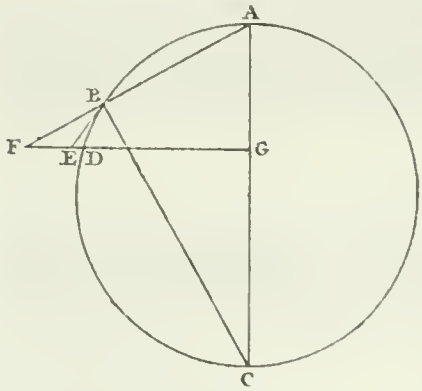
[2]) Comparez le § 10 à la p. 135 du T. XVII.

De la chute des corps graves.

PROPOSITION XII[1]).

Considérons un cercle ABC [Fig. 33] *de diamètre* AC, *auquel la droite* FG *est perpendiculaire. Supposons que cette dernière soit coupée en dehors du cercle par* AF *émanant de l'extrémité* A *du diamètre et coupant nécessairement la circonférence, par exemple en* B. *Je dis que l'arc* BD, *intercepté par les lignes* GF *et* AF, *est inférieur à la droite* DF.

[Fig. 33.]



Joignons en effet les points B et C par une droite et tirons du point B une tangente BE à la circonférence, laquelle rencontrera nécessairement la droite FG entre F et D. L'angle BAC intérieur au cercle est donc égal à l'angle EBC[2]). Par conséquent aussi l'angle FBE qui forme avec EBC l'angle droit FBC sera égal à BCA. Or, comme les triangles ABC et AGF sont semblables, l'angle F lui aussi sera égal à l'angle ACB. Le même angle F est donc égal à l'angle FBE. Par conséquent le triangle FEB est isoscèle, ayant les côtés égaux FE et EB. En ajoutant à chacun d'eux la droite ED, on aura donc l'égalité FD = BE + ED. Or, il est certain que l'ensemble de ces deux dernières droites est plus grand que l'arc BD ayant les mêmes extrémités et concave dans le même sens. Par conséquent FD sera aussi plus grand que le même arc BD. La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XIII[1]).

Si, dans les mêmes hypothèses, la droite AB *coupe* DG *à l'intérieur du cercle* [Fig. 34], *je dis que l'arc* BD, *intercepté entre les droites* GD *et* AB, *est plus grand que la droite* DF.

En effet, joignons par une droite les points D et C et traçons la corde correspondant à l'arc DB. Comme l'angle ABD est alors égal à ACD, c.à.d. à l'angle ADG, et que l'angle DFB est plus grand que l'angle ADF ou ADG, le même angle DFB sera plus grand que DBF. Par conséquent dans le triangle DFB le côté DB est plus grand que le côté DF. A-fortiori l'arc DB sera plus grand que la même droite DF. La proposition est donc démontrée.

[1]) Comparez sur les Prop. XII, XIII et XV la note 13 de la p. 121 du T. XVII.

PROPOSITIO XII[1]).

(*p.* 37).

De descensu gravium.

Esto circulus ABC [Fig. 33], *diametro* AC, *cui ad angulos rectos sit* FG; *huic vero occurrat à termino diametri* A *educta* AF *extra circulum, quæ quidem necessario secabit circumferentiam, puta in* B. *Dico arcum* BD, *lineis* GF, AF *interceptum, minorem esse recta* DF.

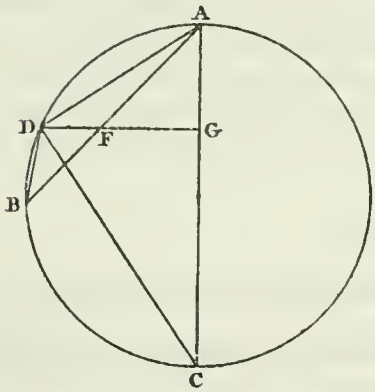
Jungatur enim BC, & ducatur ex B puncto tangens circumferentiam recta BE, quæ necessario occurret rectæ FG inter F & D. Est igitur angulus BAC in circulo æqualis angulo EBC *. quare & angulus FBE, qui una cum EBC constituit angulum rectum FBC, erit æqualis BCA. Quia autem similia sunt triangula ABC, AGF, erit & angulus F æqualis angulo ACB. Ergo idem angulus F æqualis angulo FBE. Itaque isosceles est triangulus FEB, habens crura æqualia FE, EB. Addita ergo utrique eorum recta ED, fiet FD, æqualis duabus BE, ED. Hasce vero duas majores esse constat arcu BD, iisdem terminis intercepto, & in eandem partem cavo. Ergo & FD eodem arcu BD major erit: quare constat propositum.

[* Prop. 32. Lib. 3. Eucl.]

PROPOSITIO XIII[1]).

Iisdem positis, si recta AB *occurrat ipsi* DG *intra circulum* [Fig. 34]; *Dico arcum* BD, *rectis* GD, AB *interceptum, majorem esse recta* DF.

[Fig. 34.]



Jungatur enim DC & ducatur arcui DB subtensa DB. Quoniam ergo angulus ABD æqualis ACD, hoc est, angulo ADG; angulus autem DFB major angulo ADF, sive ADG; erit | idem DFB etiam (*p.* 38). major DBF. Ergo in triangulo DFB latus DB majus latere DF; unde multo magis arcus DB superabit eandem DF. Quare constat propositum.

---

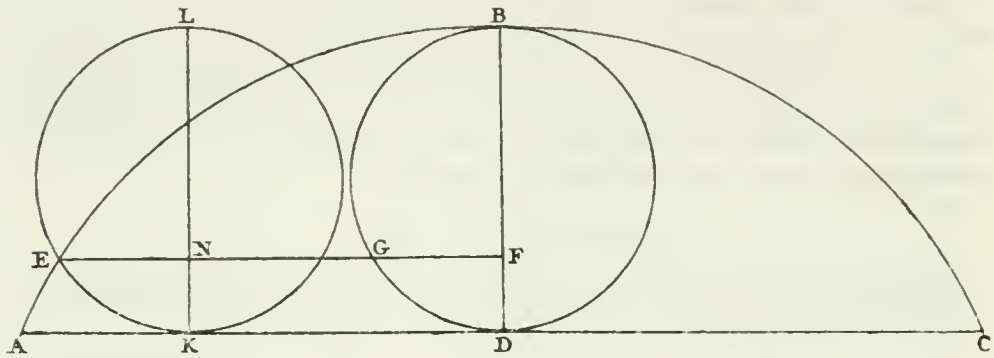
[2]) 's Gravesande annote en marge que c'est là la „Prop. 32 du livre 3 d'Euclide", ce qui était sans doute l'intention de Huygens, puisque l'astérisque de renvoi se trouve dans le texte de l'édition originale.

De la chute des corps graves.

PROPOSITION XIV.

Soit ABC *une cycloïde* [Fig. 35], AC *sa base*, BD *son axe. Je pense qu'on voit avec évidence comment cette ligne est engendrée suivant ce qui a été exposé plus haut sur sa définition et sa description mécanique*[1]. *Soit de plus* BGD *un cercle symétrique par rapport à l'axe* BD. *Traçons* EF *parallèlement à la base* AC *par un point* E *arbitrairement choisi sur la cycloïde, laquelle parallèle coupe l'axe* BD *en* F *et la circonférence* BGD *en* G. *Je dis que la droite* GE *est égale à l'arc* GB[2].

[Fig. 35.]



En effet, soit décrite par le point E une circonférence de cercle LEK égale à BGD et touchant la base de la cycloïde en K. Menons aussi le diamètre KL. La droite AK est donc égale à l'arc EK. Mais la longueur entière AD est égale à la demi-circonférence KEL; par conséquent KD est égale à l'arc EL ou GB. Or, KD ou NF est égale à EG, puisque EN = GF et que la partie NG leur est commune. Il est donc prouvé qu'on a aussi : GE = arc GB.

PROPOSITION XV.

Un point sur une cycloïde étant donné, mener par lui une tangente à la cycloïde[3].

Soit ABC [Fig. 36] la cycloïde et B le point donné sur lui par lequel il faut mener la tangente.

Construisons autour de l'axe AD de la cycloïde le cercle générateur AED et menons BE parallèlement à la base de la cycloïde, laquelle parallèle coupe la circonférence du cercle nommé en E. Joignons les points A et E par une droite et tirons enfin par B une parallèle HBN à cette dernière. Je dis que cette parallèle touche la cycloïde en B.

En effet, prenons sur la parallèle un point H quelconque différent de B, d'abord

[1]) Voir les p. 102—105 qui précèdent.

PROPOSITIO XIV.

De descensu gravium.

Sit cyclois ABC [Fig. 35] *cujus basis* AC *axis* BD. *Quomodo autem generetur ex definitione & descriptione mechanica superius traditis satis manifestum arbitror* [1]. *Et circa axem* BD, *circulus descriptus sit* BGD, *& à quolibet puncto* E *in cycloide sumpto agatur* EF *basi* AC *parallela, quæ occurrat axi* BD *in* F, *secetque circumferentiam* BGD *in* G, *Dico rectam* GE *arcui* GB *æqualem esse* [2].

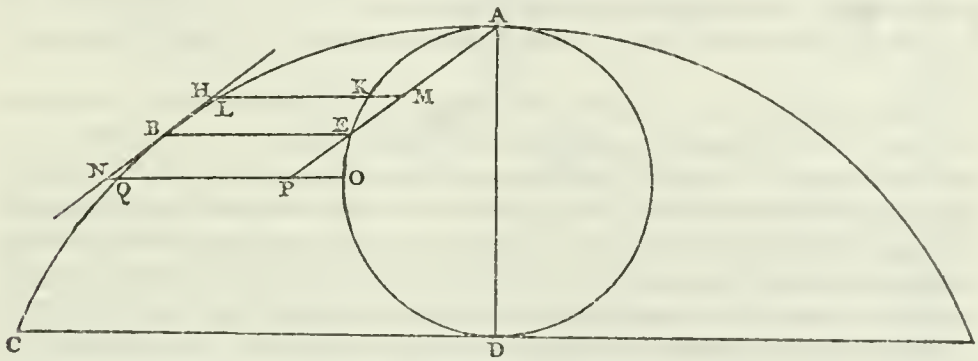
Describatur enim per E punctum circulus LEK ipsi BGD æqualis, quique tangat basin cycloidis in K, & ducatur diameter KL. Est igitur recta AK arcui EK æqualis; sed tota AD æqualis semicircumferentiæ KEL; ergo KD æqualis arcui EL sive GB. Est autem KD sive NF æqualis EG, quoniam EN æqualis GF, & communis utrique NG. Ergo constat & GE æqualem esse arcui GB.

PROPOSITIO XV.

(*p.* 39).

Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat [3].

[Fig. 36.]



Sit cyclois ABC [Fig. 36], & punctum in ea datum B, per quod tangentem ducere oporteat.

Circa axem cycloidis AD describatur circulus genitor AED, & ducatur BE parallela basi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E, & jungatur AE, cui denique parallela per B agatur HBN. Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diversum, ac primo versus superiora

[2]) Huygens avait trouvé cette Proposition en 1658; voir la p. 347 du T. XIV.

[3]) Comparez le Théorème de la p. 375 du T. XIV. Voir aussi la note 1 de la p. 150 qui précède.

De la chute des corps graves.

vers le haut, et menons par H une droite parallèle à la base de la cycloïde, coupant celle-ci en L, la circonférence AED en K et la droite AE en M. Comme KL est alors égale à l'arc KA et que la droite KM est plus petite que l'arc KE, la droite ML sera inférieure à l'arc AE, c.à.d. à la droite EB ou MH; d'où il apparaît que le point H est situé en dehors de la cycloïde.

Prenons en second lieu sur la droite HN un point N situé au-dessous de B et menons, comme plus haut, par N une droite parallèle à la base, coupant la cycloïde en Q, la circonférence AED en O, et le prolongement de la droite AE en P. Comme OQ est alors égale à l'arc OA et que OP est plus grande que l'arc OE, PQ sera inférieure à l'arc EA, c.à.d. à la droite EB ou PN. D'où il apparaît de nouveau que le point N se trouve en dehors de la cycloïde. Puisque tous les points pris sur la droite HBN, excepté B, sont donc situés en dehors de la cycloïde, il est établi que cette droite touche la cycloïde en B. C. Q. F. D.

J'ai douté si je laisserais cette place à cette démonstration, puisque je trouve qu'une preuve presque semblable de Mons. Wren a été publiée dans le livre de Wallis sur la Cycloïde [1]). Mais on peut également appliquer à cette proposition une méthode générale qui ne convient pas seulement cycloïde mais aussi aux autre lignes courbes engendrées par la rotation d'une figure quelconque, pourvu que ce soit une figure ayant sa concavité d'un même côté et qui appartienne au genre des courbes dites géométriques.

En effet, considérons une courbe NAB [Fig. 37] [2]) provenant de la rotation de la figure OL sur la règle LD, c.à.d. une courbe décrite par le point N pris sur le contour de la figure OL, et qu'il s'agisse de mener une tangente en A qui est un point de la courbe. Menons une droite CA du point C où la figure touchait la règle lorsque le point qui décrit la figure était en A. Ce point de contact peut toujours être trouvé, puisque le problème se réduit à tirer deux lignes parallèles entre elles dont l'une passe par le point donné du contour qui décrit la figure tandis que l'autre touche la figure, la distance des deux parallèles étant égale à celle du point donné A à la règle LD. Je dis que CA rencontre la courbe à angles droits, en d'autres termes que la circonférence de cercle MAF décrite du centre C avec le rayon CA touche la courbe au point A, de sorte qu'une droite perpendiculaire à AC et passant par le point A touchera la courbe en ce point.

---

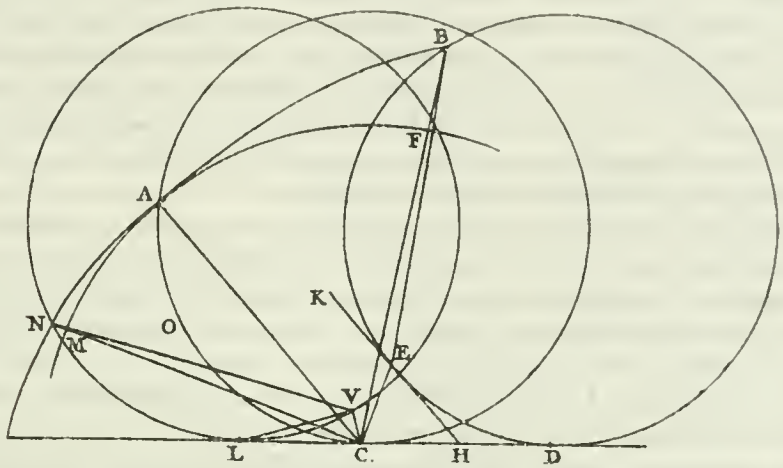
[1]) P. 71 („De rectâ Tangente Cycloidem primariam") de Joh. Wallisii „Tractatus Duo, Prior de Cycloïde et corporibus inde genitis. Posterior, Epistolaris, In qua agitur de Cissoide et Corporibus inde genitis, et de Curvarum tum Linearum Εὐθύνσει, tum Superficierum Πλατυσμῷ", Oxoniæ, Typ. Ac. Lichfieldianis, MDCLIX.

[2]) Comparez la note 2 de la p. 389 qui suit (Appendice à la Pars Secunda). Nous avons déjà dit dans l'Avertissement (p. 52) que Huygens développe ici une idée qu'il emprunte à Descartes et van Schooten.

velut H, & per H ducatur recta basi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi in L, circulo AED in K, rectæ AE in M. Quia ergo KL est æqualis arcui KA, recta autem KM minor arcu KE, erit recta ML minor arcu AE, hoc est, rectâ EB, sive MH; unde apparet punctum H esse extra cycloidem. De descensu gravium.

Deinde in recta HN sumatur punctum N inferius B, & per N agatur, ut ante, basi parallela, quæ occurrat cycloidi in Q, circulo AED in O, rectæ AE productæ in P. Quia ergo OQ, æqualis est arcui OA; OP autem major arcu OE; erit PQ minor arcu

[Fig. 37.]



EA, hoc est, rectâ EB, sive PN. Unde apparet rursus punctum N esse extra cycloidem. Cum igitur quodlibet punctum præter B, in recta HBN sumptum, sit extra cycloidem, constat illam in puncto B cycloidem contingere; quod erat demonstrandum.

Huic demonstrationi an locum suum hic relinquerem dubitavi, quod non multum ei absimilem à clarissimo Wrennio editam inveniam in libro Wallisii de Cycloide. Potest autem & universali constructione propositum absolvi [1]), quæ non cycloide tantum sed & aliis curvis, ex cujuslibet figuræ circumvolutione genitis, conveniat; dummodo sit figura in eandem partem cava, & ex iis quæ geometricæ vocantur.

Sit enim curva NAB [Fig. 37] [2]), orta ex circumvolutione figuræ OL super regula LD; describente nempe puncto N, in circumferentia figuræ OL sumpto. Et oporteat ad punctum curvæ A tangentem ducere. Ducatur recta CA à puncto C, ubi figura regulam tangebat cum punctum describens esset in A: quod punctum contactus semper inveniri potest, siquidem eo reducitur problema ut duæ rectæ inter se parallelæ ducendæ sint, quarum altera transeat per punctum describens in figuræ ambitu datum, altera figuram tangat, quæque inter se distent quantum distat punctum datum A ab regula LD: dico ipsam CA occurrere curvæ ad angulos rectos, sive circumferentiam MAF descriptam centro C radio CA, tangere curvam in puncto A, unde perpendicularis ad AC, per punctum A, ducta curvam ibidem continget. (p. 40).

De la chute des corps graves.

En effet, tirons d'abord CB à un point B de la courbe plus diſtant de la règle LD que le point A, et conſidérons la poſition BED de la figure au moment où le point décrivant eſt en B, D étant alors le point de contact de la figure avec la règle. Suppoſons maintenant élevé juſqu'en E le point de la courbe qui était en C au moment où le point décrivant était en A. Menons les droites EC et EB et ſoit KH, coupant la règle en H, une tangente à la figure donnée en E.

Comme la droite CD eſt alors égale à la courbe ED et que la ſomme des longueurs EH et HD eſt plus grande que cette courbe, EH ſera plus grande que CH. D'où $\angle ECH > \angle CEH$ et par conſéquent $\angle ECL > \angle CEK$. Mais en ajoutant $\angle KEB$ égal à $\angle LCA$ à $\angle KEC$, on obtient $\angle CEB$; et en ſouſtrayant de $\angle ECL$ l'angle LCB, on obtient $\angle ECB$. L'angle CEB eſt donc certainement ſupérieur à l'angle ECB. Par conſéquent dans le triangle CEB le côté CB ſera plus grand que KB. Mais il eſt clair que EB = CA, puiſque c'eſt la même longueur tranſportée avec la figure. Donc CB ſera auſſi plus grande que CA, c.à.d. que CF. D'où il appert que le point B eſt en dehors de la circonférence de cercle MAF.

Conſidérons d'autre part un point N pris ſur la courbe entre la règle LD et le point A, et ſuppoſons que lorſque le point décrivant la courbe était en N, la ſituation de la figure était en VL et le point de contact en L. Suppoſons en outre élevé juſqu'en V le point qui touchait d'abord la règle en C, et tirons les droites CN, NV, VC et VL. On aura donc VN = CA, car CA a été tranſportée en VN. Or, comme la droite LC eſt égale à la courbe LV et par conſéquent plus grande que la droite LV, dans le triangle CLV l'angle LVC ſera plus grand que l'angle LCV. C'eſt pourquoi, ſi l'on ajoute encore $\angle LVN$ à $\angle LVC$, l'angle total NVC ſera certainement plus grand que $\angle LCV$ et a-fortiori que $\angle NCV$, qui eſt une partie de $\angle LCV$. Par conſéquent dans le triangle CVN le côté CN ſera plus grand que le côté VN égal à CA; partant CN ſera auſſi plus grand que CA, c.à.d. que CM. D'où il reſſort que le point N tombe en dehors du cercle MAF, lequel touchera donc la courbe au point A. C. Q. F. D.

Or, la conſtruction comme la démonſtration ſont les mêmes ſi la courbe eſt engendrée par un point décrivant ſe trouvant ſoit à l'intérieur ſoit à l'extérieur du contour de la figure roulante. Excepté que dans ce dernier cas une partie de la courbe deſcend ſous la règle, d'où réſulte une modification de la démonſtration.

En effet, ſoit donné le point A, par lequel la tangente doit être menée, ſur une partie NAB de la courbe ſituée au-deſſous de la règle CL [Fig. 38] [1]) laquelle courbe eſt décrite par le point N pris en dehors de la figure roulante mais occupant une poſition bien déterminée dans ſon plan. Après avoir trouvé le point C où la figure roulante touche la règle CD lorſque le point décrivant eſt en A, menons la droite CA. Je dis que celle-ci rencontre la courbe NAB à angles droits, en d'autres termes que la circonférence décrite du centre C avec le rayon CA touche la courbe NAB au point A. Or, nous démontrerons qu'elle la touche extérieurement tandis que dans la partie de la courbe ſituée au-deſſus de la règle CD elle la touche intérieurement.

En effet, toutes choſes étant poſées et décrites comme plus haut, nous démontrons

Ducatur enim CB primum ad punctum curvæ B, quod diſtet ultra punctum A ab regula LD, intelligaturque figuræ poſitus in BED, cum punctum deſcribens eſſet in B, contactus regulæ in D. & punctum curvæ quod erat in C, cum punctum deſcribens eſſet in A, hic jam ſublatum ſit in E; & jungantur EC, EB, tangatque figuram in E recta KH, occurrens regulæ in H. DE DESCENSU GRAVIUM.

Quia ergo recta CD æqualis eſt curvæ ED; eâdem vero curva major eſt utraque ſimul EH, HD; erit EH major quam CH. Unde angulus ECH major quam CEH, & proinde ECL minor quam CEK. Atqui addendo angulum KEB, qui æqualis eſt LCA, ad KEC, ſit angulus CEB: & auferendo ab ECL angulum LCB, ſit ECB. Ergo angulus CEB major omnino angulo ECB. Itaque in triangulo CEB, latus CB majus erit quam EB. ſed EB æquale patet eſſe CA, cum ſit idemmet ipſum unà cum figura tranſpoſi|tum. Ergo CB etiam major quam CA, hoc eſt, quam CF. unde con- (*p.* 41).
ſtat punctum B eſſe extra circumferentiam MAF.

Sit rurſus punctum N in curva ſumptum inter regulam LD & punctum A. Cumque punctum deſcribens eſſet in N, ponatur ſitus figuræ fuiſſe in VL, punctumque contactus L, punctum verò quod tangebat prius regulam in C, ſit jam ſublatum in V: & jungantur CN, NV, VC, VL. Erit ergo VN æqualis CA; imo erit ipſa CA tranſlata in VN. Jam quia recta LC æquatur curvæ LV, ac proinde major eſt recta LV, erit in triangulo CLV angulus LVC major quam LCV. Quare addito inſuper angulo LVN ad LVC, fiet totus NVC major utique quam LCV, ac proinde omnino major angulo NCV, qui pars eſt LCV. Ergo in triangulo CVN latus CN majus erit latere VN, cui æquatur CA, ideoque CN major quoque quam CA, hoc eſt quam CM. Unde apparet punctum N cadere extra circulum MAF, qui proinde tanget curvam in puncto A. quod erat demonſtrandum.

Eſt autem eadem quoque tum conſtructio tum demonſtratio, ſi curva genita ſit à puncto deſcribente, vel intra vel extra ambitum figuræ circumvolutæ ſumpto. Niſi quod, hoc poſteriori caſu, pars quædam curvæ infra regulam deſcendit, unde nonnulla in demonſtratione oritur diverſitas.

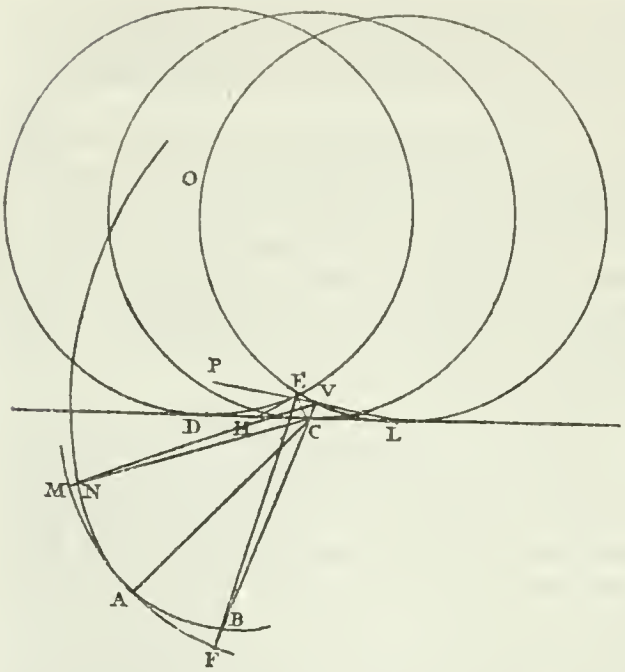
Sit enim punctum A, per quod tangens ducenda eſt, datum in parte curvæ NAB, quæ infra regulam CL deſcendit [Fig. 38][1]), deſcripta nimirum à puncto N extra figuram revolutam ſumpto, ſed certam | poſitionem in eodem ipſius plano habente. Invento (*p.* 42).
igitur puncto C, ubi figura revoluta tangit regulam CD quum punctum deſcribens eſſet in A, ducatur recta CA. Dico hanc curvæ NAB occurrere ad rectos angulos, ſive circumferentiam radio CA centro C deſcriptam tangere curvam NAB in puncto A. Oſtendetur autem exterius ipſam contingere, cum in curvæ parte ſupra regulam CD poſita interius contingat.

Poſitis enim & deſcriptis iisdem omnibus quæ prius, oſtenditur rurſus angulus ECH

[1]) Voir la note 2 de la p. 154.

De la chute des corps graves.

[Fig. 38.]



de nouveau que ∠ ECH > ∠ CEH. Mais si à ∠ ECH on ajoute ∠ HCB on obtient ∠ ECB, et en retranchant ∠ HEB égal à ∠ DCA de ∠ CEH, on obtient ∠ CEB. Par conséquent ∠ ECB est certainement supérieur à ∠ CEB. Par conséquent dans le triangle ECB le côté EB est plus grand que CB. Mais CA ou CF est égale à EB. Par conséquent on a aussi CF, CB; le point F de la circonférence de cercle est donc à l'extérieur de la courbe NAB par rapport au centre.

On montre de nouveau comme précédemment que ∠ LVC > ∠ LCV. Par conséquent ∠ CVP, supplément de ∠ LVC, sera inférieur à ∠ VCD. Mais si l'on ajoute à ∠ VCD ∠ DCN, on obtient ∠ VCN; et si l'on retranche de ∠ CVP ∠ PVN, on obtient ∠ CVN. Par conséquent l'angle VCN est certainement plus grand que l'angle CVN. Dans le triangle CVN le côté VN sera donc plus grand que CN. Or, CA ou CM est égale à VN. Partant, CM aussi sera plus grande que CN; le point M de la circonférence de cercle sera donc à une telle distance du centre C qu'il se trouvera à l'extérieur de la courbe NAB. Il est donc établi que la circonférence MAF touche la courbe au point A. C. Q. F. D.

Qui si le point de la courbe par lequel il faut mener la tangente est précisément celui où la règle coupe la courbe, la tangente cherchée sera toujours perpendiculaire à la règle, comme il serait facile de le démontrer.

PROPOSITION XVI.

Du mouvement cycloïdal.

Si deux droites parallèles AF *et* BG, *dont l'une et l'autre est située du même côté du centre ou dont l'une* AF *passe par le centre lui-même, coupent une circonférence de cercle* [Fig. 39], *et qu'on mène en* A, *où la parallèle la plus proche du centre la coupe, une droite qui touche la circonférence, je dis que la partie* AB *de cette tangente qui est interceptée par les deux parallèles est inférieure à l'arc* AC *compris entre ces mêmes parallèles.*

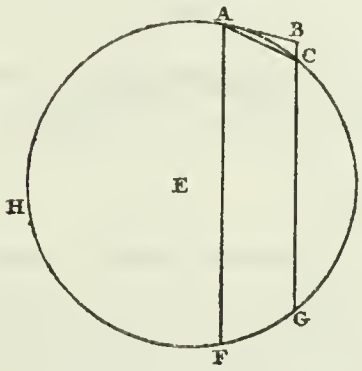
major quam CEH. atqui ad ECH addito HCB fit angulus ECB; & à CEH auferendo HEB, qui æqualis eſt DCA, fit angulus CEB. Ergo ECB major omnino quam CEB. unde in triangulo ECB latus EB majus quam CB. ſed ipſi EB æqualis eſt CA, ſive CF. Ergo & CF major quam CB: ideoque punctum circumferentiæ F eſt ultra curvam NAB à centro remotum. De descensu gravium.

Item rurſus oſtenditur angulus LVC major LCV. Quare CVP, qui cum LVC duos rectos æquat, minor erit quam VCD. Atqui addendo ad VCD angulum DCN, fit VCN; & auferendo ab CVP angulum PVN, fit CVN. Ergo angulus VCN omnino major quam CVN. In triangulo itaque CVN, latus VN majus erit quam CN. Eſt autem ipſi VN æqualis CA ſive CM. Ergo & CM major quam CN, ideoque punctum circumferentiæ M erit ultra curvam NAB à centro C remotum. Itaque conſtat circumferentiam MAF tangere curvam in puncto A. quod erat demonſtrandum.

Quod ſi punctum curvæ per quod tangens ducenda eſt, fit illud ipſum ubi regula curvam ſecat, erit tangens quæſita ſemper regulæ perpendicularis; ut facile eſſet oſtendere.

PROPOSITIO XVI.

[Fig. 39.]



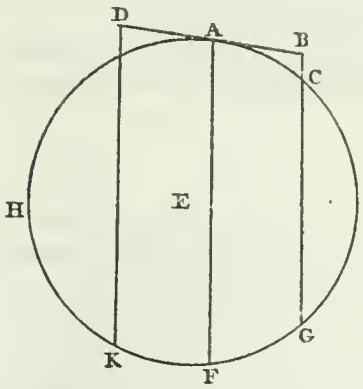
Si circuli circumferentiam, cujus centrum E, *ſecent rectæ duæ parallelæ* AF, BG, *quarum utraque ad eandem partem centri tranſeat, vel altera* AF *per centrum ipſum* [Fig. 39]: *& à puncto* A, *quo centro propior circumferentiam ſecat, ducatur recta ipſam contingens: dico partem hujus* AB, *à parallela utraque interceptam, minorem eſſe arcu* AC, *ab utraque eadem parallela intercepto.* De motu in Cycloide.

Du mouvement Cycloïdal.

En effet, tirons la corde correſpondant à l'arc AC. Comme l'angle BAF eſt alors égal à celui que comprend la portion du cercle AHF, laquelle eſt plus grande que le demi-cercle, à moins que ce ne ſoit le demi-cercle lui-même, l'angle BAF ſera inférieur ou égal à un angle droit; par conſéquent l'angle ABC eſt ſupérieur ou égal à un angle droit. Par conſéquent dans le triangle ABC le côté AC oppoſé à l'angle B ſera plus grand que le côté AB. Mais le même côté AC eſt inférieur à l'arc AC. Le côté AB lui auſſi ſera donc, a-fortiori, plus petit que l'arc AC.

PROPOSITION XVII.

[Fig. 40.]



Les mêmes choſes étant ſuppoſées, ſi une troiſième droite DK [Fig. 40] *parallèle aux précédentes coupe le cercle, parallèle dont la diſtance à* AF *qui eſt la plus proche du centre eſt égale à celle de* AF *à l'autre parallèle* BG, *je dis que la partie de la tangente en* A *interceptée par la troiſième parallèle et la moyenne, ſavoir* AD, *eſt plus petite que l'arc* AC *compris entre les deux premières parallèles.*

Ceci eſt évident puiſque AD = AB, et que nous venons de démontrer que AB eſt plus petite que l'arc AC.

PROPOSITION XVIII.

Lorſque deux droites parallèles AF *et* BG [Fig. 41] *coupent un cercle à centre* E *et que l'on mène du point* B *où celle qui eſt la plus éloignée du centre (ou bien également éloignée du centre que l'autre) coupe la circonférence, une droite qui touche cette dernière, la partie* BA *de cette tangente, interceptée par les parallèles, ſera plus grande que l'arc* BC *compris entre ces mêmes parallèles.*

En effet, menons au point C la tangente MCL à la circonférence, et puiſſe-t-elle couper la tangente BA en L. Dans le triangle ACL, l'angle C eſt égal à l'angle MCF, c.à.d. à l'angle compris dans la portion de cercle CBF. D'autre part l'angle A eſt égal à celui qui comprend la portion BCG du cercle, et comme cette dernière eſt plus grande que la portion CBF ou bien ſon égale, attendu que BG eſt ſitué à plus grande, ou bien à égale, diſtance du centre que CF, l'angle A du triangle ACL ſera plus petit que l'angle C ou bien égal à lui, et par conſéquent le côté CL plus petit que l'angle AL ou bien ſon égal. Mais la ſomme de CL et de LB eſt plus grande que l'arc CB. Par conſéquent la ſomme de AL et de LB, c.à.d. la tangente AB, ſera auſſi plus grande que le même arc CB. C. Q. F. D.

Ducatur enim arcui AC ſubtenſa recta AC. Quia ergo angulus BAF eſt æqualis ei quem capit portio circuli AHF, quæ vel major eſt ſemicirculo vel ſemicirculus, erit proinde angulus BAF, | vel minor recto vel rectus; ideoque angulus ABC vel major recto vel rectus. Quare in triangulo ABC latus AC, angulo B ſubtenſum, majus erit latere AB. ſed idem latus AC minus eſt arcu AC. Ergo omnino & AB arcu AC minor erit. De motu in Cycloide. (p. 43).

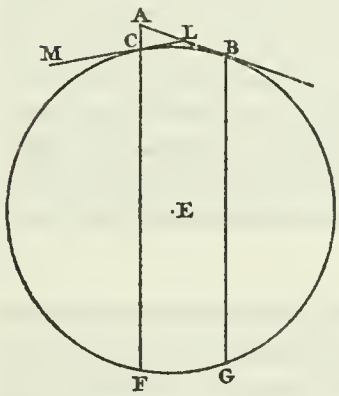
PROPOSITIO XVII.

Iisdem poſitis, ſi tertia recta prioribus parallela DK [Fig. 40], *circulum ſecuerit, quæ ab ea quæ centro propior eſt* AF, *tantundem diſtet quantum hæc à reliqua* BG: *dico partem tangentis in* A, *à parallela ultimo adjecta, & media interceptam, nempe* AD, *arcu* AC *à primis duabus parallelis intercepto minorem eſſe.*

Hoc enim patet quum AD ipſi AB æqualis ſit, quam antea oſtendimus arcu AC minorem eſſe.

PROPOSITIO XVIII.

[Fig. 41.]



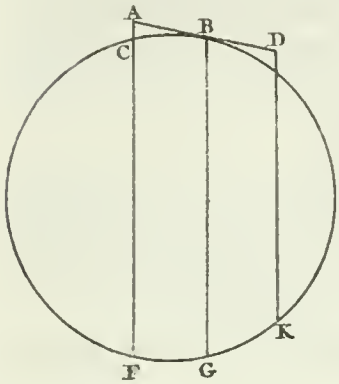
Si circulum, cujus centrum E, *duæ rectæ parallelæ ſecuerint* AF, BG [Fig. 41]; *& à puncto* B, *ubi quæ à centro remotior eſt, vel tantundem atque altera diſtat, circumferentiæ oc|currit, ducatur recta circumferentiam tangens: erit pars hujus* BA, *à parallelis intercepta, major arcu ab iisdem parallelis intercepto* BC. (p. 44).

Ducatur enim in puncto C, recta MCL circumferentiam tangens, quæ occurrat tangenti BA in L. In triangulo igitur ACL, angulus C æqualis eſt angulo MCF, hoc eſt, ei quem capit portio circuli CBF. angulus autem A æquatur angulo quem capit portio circuli BCG, quæ portio quum ſit major vel æqualis portioni CBF, quippe quum BG vel ulterius diſtet à centro quam CF, vel tantundem: erit proinde trianguli ACL angulus A minor vel æqualis angulo C: & conſequenter latus CL vel minus vel æquale lateri AL. Atqui CL una cum LB majores ſunt arcu CB. Ergo & AL una cum LB, hoc eſt, tangens AB, eodem arcu CB major erit. quod erat demonſtrandum.

Du mouvement Cycloïdal.

PROPOSITION XIX.

[Fig. 42.]



Les mêmes choſes étant poſées, ſi une troiſième droite DK [Fig. 42] *parallèle aux précédentes coupe la circonférence, parallèle dont la diſtance à celle qui eſt la plus éloignée du centre eſt égale à celle de cette dernière à celle qui reſte, ſavoir* AF, *la partie de la tangente en* B *interceptée entre la parallèle moyenne et la troiſième* DK, *c.à.d.* BD, *ſera plus grande que l'arc* BC.

Ceci eſt évident puiſque BD eſt égale à BA, dont nous avons démontré qu'elle eſt plus grande que l'arc BC.

PROPOSITION XX.

Lorſqu'un arc de cercle AB [Fig. 43] *inférieur à une demi-circonférence eſt coupé en un nombre quelconque de parties par des lignes droites parallèles, équidiſtantes tant entre elles qu'aux parallèles tirées par les extrémités de l'arc, telles que* CD, EF, GH, KL *etc. et qu'on mène à la première extrémité* A *de l'arc, ainſi qu'aux autres points de diviſion, des tangentes à la circonférence, toutes vers le même côté, chacune juſqu'au point de rencontre avec la parallèle ſuivante, comme les tangentes* AC, DE, FG, HK, *etc., je dis que la ſomme de ces tangentes, diminuée de la première* AC, *eſt moindre que l'arc donné* AB. *Mais que ces tangentes, ſi l'on conſerve* AC, *ſont enſemble plus grandes que l'arc* AB *diminué de la partie extrême* NB, *en d'autres termes que l'arc* AN.

En effet, ſuppoſons d'abord qu'il y ait des parallèles de part et d'autre du centre Z, et ſoit GH, parmi celles qui ſe trouvent du côté B, la plus proche du centre par lequel elle peut même paſſer. Par conſéquent chacune des tangentes compriſes entre GH et BO, telles que HK, LM et NO, eſt moindre que l'arc correſpondant*. Mais de plus la tangente GF eſt inférieure à l'arc ſuivant FD* et pareillement la tangente ED à l'atc DA. La ſomme des tangentes compriſes entre BO et CD eſt donc plus petite que celle des arcs BH et FA et a-fortiori que celle des arcs BH et HA, c. à. d. que l'arc BA. C. Q. F. D.

* Prop. 16 de cette Partie.

* Prop. 17 de cette Partie.

Nous démontrerons maintenant que la ſomme des tangentes compriſes entre BO et A eſt plus grande que l'arc AN. Car la parallèle GH paſſera plus près du centre Z que la parallèle EF que je ſuppoſe être la plus proche de celles qui ſe trouvent du côté A, ou bien elle en ſera éloignée à plus grande diſtance, ou bien à la même diſtance.

Que ſi EF eſt à plus grande, ou à égale, diſtance du centre que GH, la tangente

PROPOSITIO XIX.

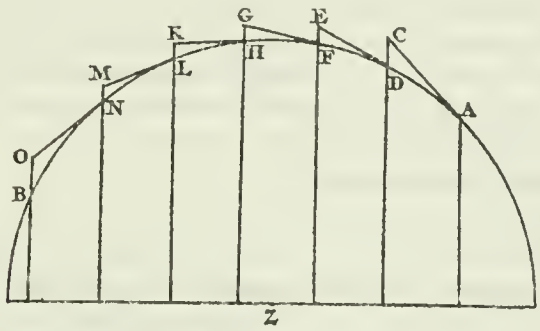
DE MOTU IN CYCLOIDE.

Iisdem positis, si tertia recta prioribus parallela DK [Fig. 42] *circulum secet, quæ tantundem distet ab ea quæ remotior est à centro quantum hæc à reliqua* AF: *Erit pars tangentis in* B, | *à parallela media, & ultimo addita* DK, *intercepta*, (*p.* 45). *nimirum* BD, *major arcu* BC.

Hoc enim manifestum est cum BD fiat ipsi BA æqualis, quam ostendimus arcu BC majorem esse.

PROPOSITIO XX.

[Fig. 43.]



Si arcus circuli, semicircumferentia minor, AB [Fig. 43], *in partes quotlibet secetur lineis rectis parallelis, quæ & inter se, & cum rectis sibi parallelis per terminos arcus ductis, æqualia intervalla constituant, quales sunt* CD, EF, GH, KL *&c. ducanturque ad terminum arcus alterutrum* A, *& ad reliqua omnia sectionum puncta rectæ circumferentiam tangentes, omnes in eandem partem, & ut unaquæque occurrat proximæ dictarum parallelarum; cujusmodi sunt tangentes* AC, DE, FG, HK *&c. Dico has tangentes, dempta prima* AC, *simul sumptas, minores esse arcu proposito* AB. *Easdem vero omnes, non omissa* AC, *majores esse arcu* AB *diminuto parte extrema* NB, *hoc est, majores arcu* AN.

Ponamus enim primo parallelarum aliquas transire ab utraque parte centri Z, & sit GH, earum quæ sunt à parte B, centro proxima, vel per ipsum centrum transeat. Itaque tangentes omnes inter GH & BO comprehensæ, ut HK, LM, NO, singulæ suis arcubus minores sunt *. Porro autem & tangens GF, arcu sequente FD minor est *, & similiter tangens ED arcu DA. Itaque tangentes omnes inter BO & CD interjectæ, minores sunt arcubus BH & FA, ac proinde omnino minores arcubus BH, HA, sive arcu BA, quod erat primo ostendendum.

* Prop. 16. huj.

* Prop. 17. huj.

Porro jam demonstrabimus tangentes omnes inter BO & A majores esse arcu AN. Enimvero parallela GH, vel propius centrum Z transit quam parallela EF, quam pono proximam esse | earum quæ à parte A transeunt, vel erit remotior, vel æque (*p.* 46). distabit.

Quod si EF longius à centro vel æque remota est ac GH, erit tangens FG major

Du mouvement Cycloïdal.

FG ſera ſupérieure à ſon arc FH, et chacune des autres tangentes ſituées du côté A, ſavoir ED et CA, ſurpaſſera l'arc correſpondant *; de ſorte que la ſomme totale GF + ED + CA ſera plus grande que l'arc HA. Mais de plus la tangente LM ſera plus grande que l'arc HL *, et la tangente NO que l'arc LN; par conſéquent la ſomme des tangentes, avec l'exception de HK, ſera plus grande que l'arc AN; à plus forte raiſon, lorſque HK auſſi vient s'y ajouter, la ſomme des tangentes compriſes entre A et B ſera-t-elle plus grande que ce même arc AN.

* Prop. 18 de cette Partie.

* Prop. 19 de cette Partie.

Mais ſi GH eſt plus éloignée du centre que EF, la tangente KH ſera plus grande que l'arc HF *, la tangente ML comme ci-devant plus grande que l'arc LH, la tangente ON plus grande que l'arc NL, et par conſéquent la ſomme des tangentes ON, ML et KH plus grande que l'arc NF. D'autre part la tangente ED ſera plus grande que ſon arc FD * et de même la tangente CA que l'arc correſpondant DA. Par conſéquent la ſomme des tangentes compriſes entre BO et A, excepté GF, ſera plus grande que l'arc NA; et a-fortiori la ſomme des mêmes tangentes, GF compriſe, c.à.d. celle de toutes les tangentes ſituées entre BO et A, ſurpaſſera le même arc NA.

* Prop. 19 de cette Partie.

* Prop. 18 de cette Partie.

Par ces conſidérations la démonſtration eſt encore manifeſte dans les autres cas, quelqu'arc de la demi-circonférence qu'on prenne; elle eſt ou entièrement la même ou bien une partie ſeulement de la démonſtration précédente.

PROPOSITION XXI.

Lorſqu'un mobile deſcend d'un mouvement continu le long de certains plans inclinés contigus quelconques, et qu'une autre fois il deſcend de la même hauteur par un même nombre de plans contigus, ainſi conſtruits que chacun d'eux correſpond en hauteur à un des plans précédents, mais que le deuxième plan a toujours une plus grande inclinaiſon que le premier; je dis que le temps de la deſcente le long des plans moins inclinés eſt plus bref que celui de la deſcente par les plans plus inclinés.

Soient les deux ſéries de plans compriſes entre les mêmes parallèles horizontales ABCDE et FGHKL [Fig. 44], et ſuppoſons que deux plans correſpondants l'un de la première, l'autre de la deuxième ſérie, ſoient toujours renfermés entre les mêmes parallèles horizontales; ſuppoſons en outre que chaque plan de la ſérie FGHKL [1]) ſoit plus incliné par rapport à l'horizon que le plan correſpondant de même hauteur de la ſérie ABCDE. Je dis que la chute le long de ABCDE ſe fera en un temps plus court que celle le long de FGHKL.

En effet, il eſt d'abord manifeſte que le temps de la deſcente par AB eſt plus court que celui de la deſcente par FG, puiſque le rapport de ces temps eſt égal à celui des droites AB et FG * et que AB $<$ FG, à cauſe de ſon inclinaiſon moins forte. Prolon-

* Prop. 7. de cette Partie.

[1]) L'édition originale a FGHKH (faute d'impression).

arcu ſuo FH, & reliquæ tangentes verſus A, nimirum ED, CA majores ſingulæ arcubus ſuis*; adeo ut omnes ſimul GF, ED, CA majores ſint arcu HA. ſed & arcu HL major erit tangens LM*, & arcu LN tangens NO, itaque tangentes omnes, præter HK, majores ſimul erunt arcu AN; multoque magis, accedente ipſa HK, tangentes omnes inter A & B comprehenſæ arcu eodem AN majores erunt.

* Prop. 18. huj.
* Prop. 19. huj.

Si vero GH à centro longius diſtat quam EF, erit tangens KH major arcu HF*, & tangens ML ut ante major arcu LH, & tangens ON major arcu NL, & omnes proinde tangentes ON, ML, KH majores arcu NF. Sed & tangens ED major eſt arcu ſuo FD*, & tangens CA major ſimiliter arcu ſuo DA. Itaque tangentes omnes inter BO & A, præter GF, majores erunt arcu NA; multoque magis tangentes eædem, accedente GF, hoc eſt, omnes quæ inter BO & A interjiciuntur, eodem arcu NA majores erunt.

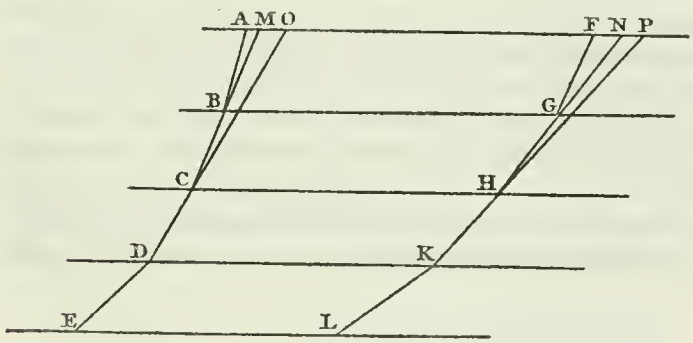
* Prop. 19. huj.
* Prop. 18. huj.

Ex his vero etiam demonſtratio manifeſta eſt in caſibus aliis, qualiscunque ſemicircumferentiæ arcus accipiatur, quippe cum vel eadem ſit ubique, vel pars tantum præcedentis demonſtrationis.

PROPOSITIO XXI.

Si mobile deſcendat continuato motu per quælibet plana inclinata contigua, ac rurſus ex pari altitudine deſcendat per plana totidem contigua, ita comparata ut ſingula altitudine reſpondeant ſingulis priorum planorum, ſed majori quam illa ſint inclinatione. Dico tempus deſcenſus per minus inclinata, brevius eſſe tempore deſcenſus per magis inclinata.

[Fig. 44.]



Sint ſeries duæ planorum inter eaſdem parallelas horizontales comprehenſæ ABCDE, FGHKL [Fig. 44], atque ita ut bina quæque ſibi correſpondentia plana utriusque ſeriei iisdem parallelis horizontalibus includantur; unumquodque vero ſeriei FGHKL[1]) magis inclinatum ſit ad horizontem quam planum ſibi altitudine reſpondens ſeriei ABCDE. Dico breviori tempore abſolvi deſcenſum per ABCDE, quam per FGHKL.

Nam primo quidem tempus deſcenſus per AB, brevius eſſe conſtat tempore deſcenſus per FG, quum ſit eadem ratio horum temporum quæ rectarum AB ad FG*, ſitque AB minor quam FG, propter minorem inclinationem. Producantur jam ſurſum rectæ

(p. 47).
* Prop. 7. huj.

Du MOUVEMENT CYCLOÏDAL.

geons maintenant vers le haut les droites CB et HG et puiſſent-elles couper l'horizontale AF en M et N. Par conſéquent le temps néceſſaire pour parcourir BC après AB eſt égal à celui du temps néceſſaire pour parcourir la même longueur BC après MB, puiſqu'au point B le corps a une même viteſſe, qu'il ſoit deſcendu par AB ou par MB *. De la même manière le temps par GH après FG ſera égal au temps correſpondant à la même longueur GH après NG. Or, le temps par BC après MB eſt au temps par GH après NG, comme ſont entre elles les longueurs BC et GH ou CM et HN, vu que c'eſt là la valeur du rapport des temps correſpondant tant aux longueurs totales MC et NH qu'aux parties MB et NG *, donc auſſi celui des différences des temps. Or, BC eſt plus petite que GH à cauſe de ſon inclinaiſon moindre. Il eſt donc évident que le temps par BC après MB ou après AB eſt plus court que le temps par GH après NG ou après FG.

* Prop. 6. de cette Partie.

* Prop. 7. de cette Partie.

On démontrera de la même manière, en prolongeant DC et KH vers le haut, juſqu'à ce qu'elles rencontrent l'horizontale AF en O et en P, que le temps par CD après ABC ou après OC eſt plus court que le temps par HK après FGH ou après PH. Et enfin que le temps par DE après ABCD eſt plus court que le temps par KL après FGHK. C'eſt pourquoi le temps de la deſcente totale par ABCDE ſera plus court que le temps par FGHKL. C. Q. F. D.

Or, il eſt manifeſte par là, ſi l'on conſidère les lignes courbes comme compoſées d'une infinité de lignes droites, que lorſqu'on a affaire à deux ſurfaces inclinées ſuivant des lignes courbées de la même hauteur et dont l'inclinaiſon de l'une ſurpaſſe toujours celle de l'autre en des points quelconques de même hauteur, le corps deſcendra alors auſſi en un temps plus court le long de la ſurface moins inclinée que le long de la plus inclinée.

Suppoſons par exemple que les deux ſurfaces [Fig. 45] ſoient inclinées ſuivant les courbes AB et CD de même hauteur et pour leſquelles, lorſqu'on prend des points quelconques E, F de même hauteur, l'inclinaiſon de CD ſurpaſſe celle de AB, en d'autres termes que la tangente à la courbe CD en F ſoit plus inclinée par rapport à l'horizon que la tangente en E à la courbe AB: le temps de la chute par AB ſera plus court que celui de la chute par CD.

Et la même choſe aura lieu lorſque l'une des lignes eſt droite, pourvu que l'inclinaiſon partout égale de la droite ſoit plus grande ou plus petite que celle de la courbe en chacun de ſes points.

PROPOSITION XXII.

Si l'on conſidère dans une cycloïde à axe vertical, ayant ſon ſommet en bas, deux parties de même hauteur de la courbe, mais dont l'une eſt plus proche du ſommet, le temps de deſcente par la partie ſupérieure ſera plus petite que celui de la deſcente par la partie inférieure.

Soit AB [Fig. 46] la cycloïde à axe vertical AC dont le ſommet A ſe trouve en bas.

CB, HG, occurrantque horizontali AF in M & N. Itaque tempus per BC post AB, æquale est tempori per eandem BC post MB, cum in puncto B eadem celeritas contingat, sive per AB, sive per MB descendenti *. similiterque tempus per GH post FG, æquale erit tempori per eandem GH post NG. Est autem tempus per BC post MB ad tempus per GH post NG, ut BC ad GH longitudine, sive ut CM ad HN, cum hanc rationem habeant & tempora per totas MC, NH, & per partes MB, NG *, ideoque etiam tempora reliqua. Estque BC, minor quam GH propter minorem inclinationem. Patet igitur tempus per BC post MB sive post AB, brevius esse tempore per GH post NG sive post FG.

De motu in Cycloide.

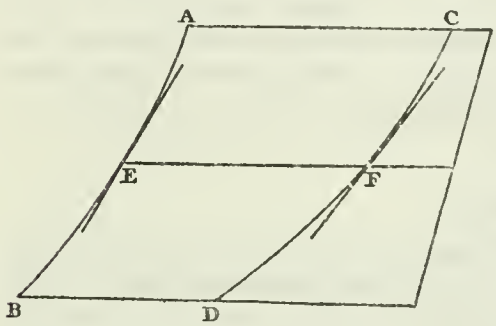
* Prop. 6. huj.

* Prop. 7. huj.

Similiter ostendetur, productis DC, KH sursum, donec occurrant horizontali AF in O & P, tempus per CD post ABC, sive post OC, brevius esse tempore per HK post FGH sive post PH. Ac denique tempus per DE post ABCD, brevius esse tempore per KL post FGHK. Quare totum tempus descensus per ABCDE, brevius erit tempore per FGHKL. quod erat demonstrandum.

Hinc vero manifestum est, considerando curvas lineas tanquam ex innumeris rectis compositas, si fuerint duæ superficies, secundum lineas curvas ejusdem altitudinis inclinatæ, quarum in punctis quibuslibet æque altis major semper sit inclinatio unius quam reliquæ, etiam tempore breviori per minus inclinatam grave descensurum quam per magis inclinatam.

[Fig. 45.]



Velut si sint duæ superficies [Fig. 45] inclinatæ secundum curvas AB, CD, æqualis altitudinis, quarumque in punctis æque altis quibuslibet E, F, major sit inclinatio ipsius CD quam AB, hoc est, ut | recta tangens curvam CD in F, magis (p. 48). inclinata sit ad horizontem, quam quæ curvam AB tangit in puncto E. erit tempus descensus per AB brevius quam per CD.

Idemque continget si altera linearum recta fuerit: dummodo inclinatio rectæ, quæ ubique est eadem, major minorve fuerit inclinatione curvæ in quolibet sui puncto.

PROPOSITIO XXII.

Si in Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus stat, vertice deorsum spectante, duæ portiones curvæ æqualis altitudinis accipiantur, sed quarum altera propior sit vertici; erit tempus descensus per superiorem, brevius tempore per inferiorem.

Sit Cyclois AB [Fig 46], cujus axis AC ad perpendiculum erectus, vertex A deor-

Du mouvement Cycloïdal.

Prenons dans elle les parties BD et EF de même hauteur, c.à.d. telles que les parallèles horizontales BC et DH, comprenant entre elles la partie ſupérieure BD, ſoient à égale diſtance l'une de l'autre que EG et FK qui comprennent entre elles la partie inférieure EF. Je dis que le temps de la deſcente par la courbe BD ſera plus court que celui de la deſcente par EF.

En effet, prenons ſur BD le point quelconque L et ſur EF le point M de telle manière que la hauteur de E au-deſſus de M ſoit la même que celle de B au-deſſus de L. Puiſſent les horizontales LN et MO rencontrer en N et en O la demi-circonférence décrite ſur l'axe AC; tirons encore les droites NA et OA. Comme le point N eſt plus élevé que le point O, il eſt donc manifeſte que la droite NA poſſède par rapport à l'horizon une moindre inclinaiſon que la droite OA. Or, la tangente à la courbe au point L eſt parallèle à NA*, et celle en M eſt parallèle à OA. Par conſéquent la courbe BD eſt moins inclinée au point L que la courbe EF au point M. Si l'on ſuppoſe donc la partie EF, ſans que ſon inclinaiſon ſoit changée, élevée plus haut, par exemple en *ef*, de ſorte qu'elle ſoit compriſe entre les mêmes parallèles que la portion BD, le point M ſera trouvé en *m* à la même hauteur que le point L. Dans ce cas l'inclinaiſon de la courbe *ef* au point *m*, qui eſt égale à celle de la courbe EF en M, ſera donc plus grande que celle de la courbe BD en L. Semblablement, dans le cas de n'importe quel autre point de la courbe *ef*, on démontrera que ſon inclinaiſon eſt plus grande que celle de la courbe BD en un point de même hauteur. Le temps de la deſcente par BD ſera donc plus court que celui de la deſcente par *ef**, ou bien, ce qui eſt la même choſe, par EF. C. Q. F. D.

* Prop. 15. de cette Partie.

* Prop. précéd.

LEMME.

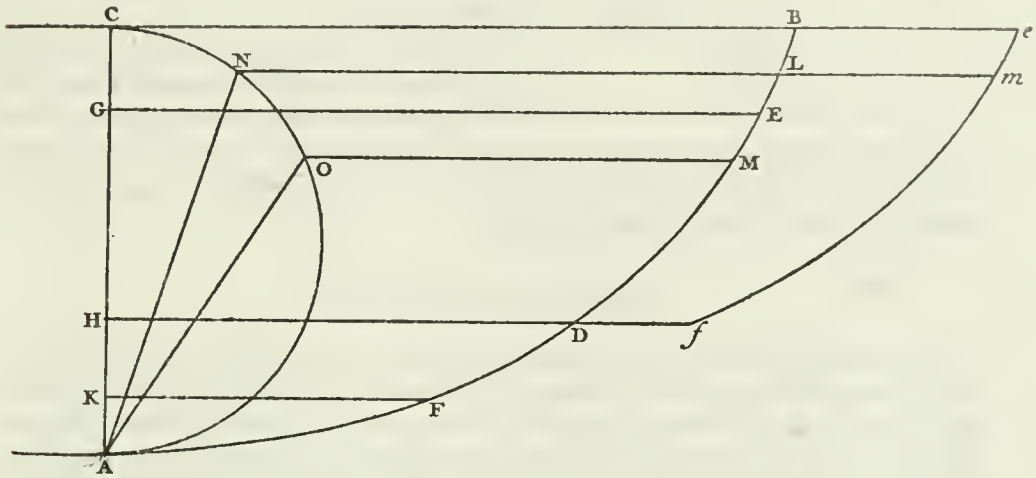
Soit un cercle de diamètre AC [Fig. 47] *que* DE *coupe à angles droits, et puiſſe une droite* AB *partant de l'extrémité* A *du diamètre couper la circonférence en* B *et* DE *en* F. *Je dis que les trois grandeurs* AB, AD *et* AF *ſont proportionnelles entre elles.*

Suppoſons d'abord que le point d'interſection F ſoit ſitué au dedans du cercle, et

ſum ſpectet; & accipiantur in ea portiones BD & EF, æqualis altitudinis, hoc eſt, ejuſmodi ut parallelæ horizontales BC, DH, quæ ſuperiorem portionem BD includunt, æque inter | ſe diſtent ac EG, FK, inferiorem portionem EF includentes. Dico tempus deſcenſus per curvam BD brevius fore tempore per EF. De motu in Cycloide. (p. 49).

Sumatur enim in BD punctum quodlibet L, & in EF punctum M, ita ut eadem ſit altitudo E ſupra M quæ B ſupra L. Et deſcripto ſuper axe AC ſemicirculo, occurrant ei rectæ horizontales LN, MO, in N & O, & jungantur NA, OA. Itaque quum pun-

[Fig. 46.]



ctum N ſit altius puncto O, manifeſtum eſt rectam NA minus ad horizontem inclinari quam OA. Eſt autem ipſi NA parallela tangens curvæ in L puncto *, & ipſi OA parallela tangens curvæ in M. Ergo curva BD in puncto L minus inclinata eſt quam curva EF in puncto M. Quod ſi igitur portio EF, invariata inclinatione, altius extolli intelligatur velut in *ef*, ita ut inter eaſdem parallelas cum portione BD comprehendatur, invenietur punctum M in *m*, æquali altitudine cum puncto L. eritque etiam inclinatio curvæ *ef* in puncto *m*, quæ eadem eſt inclinationi curvæ EF in M, major inclinatione curvæ BD in L. Similiter vero, & in quolibet alio puncto curvæ *ef*, major oſtendetur inclinatio quam curvæ BD in puncto æque alto. Itaque tempus deſcenſus per BD brevius erit tempore per *ef* *, ſive, quod idem eſt, per EF. quod erat demonſtrandum. * Prop. 15. huj. * Prop. præced.

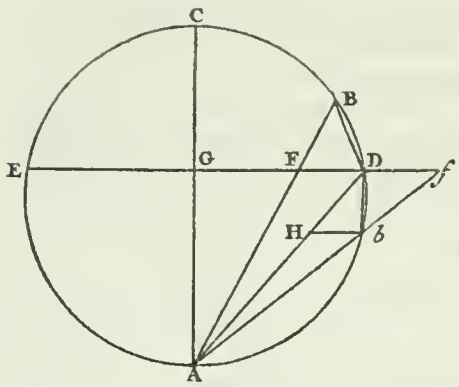
LEMMA.

Eſto circulus diametro AC [Fig. 47], *quem ſecet ad angulos rectos* DE, *& à termino diametri* A *educta recta* AB *occurrat circumferentiæ in* B, *ipſi vero* DE *in* F. *Dico tres haſce*, AB, AD, AF, *proportionales eſſe.*

Sit enim primo interſectio F intra circulum; & arcui BD recta ſubtenſa ducatur.

Du mouvement Cycloïdal.

[Fig. 47.]



tirons la corde correſpondant à l'arc BD. Comme les arcs AE et AD ſont égaux, les angles inſcrits EDA et ABD qui correſpondent à ces arcs ſeront alors également égaux entre eux. Par conſéquent dans les triangles ABD et ADF les angles ABD et ADF ſont égaux. D'autre part l'angle A eſt commun aux deux triangles. Les dits triangles ſeront donc ſemblables, partant BA : AD = AD : AF.

Soit en ſecond lieu le point d'interſection *f* en dehors du cercle et tirons *b*H parallèle à DE, laquelle rencontre la droite AD en H. Suivant ce qui a déjà été démontré on aura alors DA : A*b* = A*b* : AH, en d'autres termes = A*f* : AD. Par conſéquent A*f*, AD et A*b* formeront dans ce cas auſſi une proportion. Ainſi la propoſition eſt établie.

PROPOSITION XXIII.

Soit la cycloïde ABC [Fig. 48] *ayant ſon ſommet vers le bas et ſon axe* AD *vertical. Prenons ſur elle un point quelconque* B *et tirons de là vers le bas la droite* BI *qui touche la cycloïde et ſe termine à la droite horizontale* AI. *Tirons la droite* BF *perpendiculairement à l'axe et décrivons ſur* FA, *après l'avoir diviſée en deux parties égales par le point* X, *la demi-circonférence* FHA. *La droite* ΣG *ayant été enſuite menée parallèlement à* BF *par un point quelconque* G *pris ſur la courbe* BA, *laquelle* ΣG *coupe la circonférence* FHA *en* H *et l'axe* AD *en* Σ, *conſidérons les tangentes aux deux courbes aux points* G *et* H *et les parties de ces tangentes interceptées par les mêmes deux horizontales* MS *et* NT, *ſavoir* MN *et* ST. *Et puiſſent les mêmes droites* MS *et* NT *intercepter ſur la tangente* BI *la partie* OP *et ſur l'axe* DA *la partie* QR.

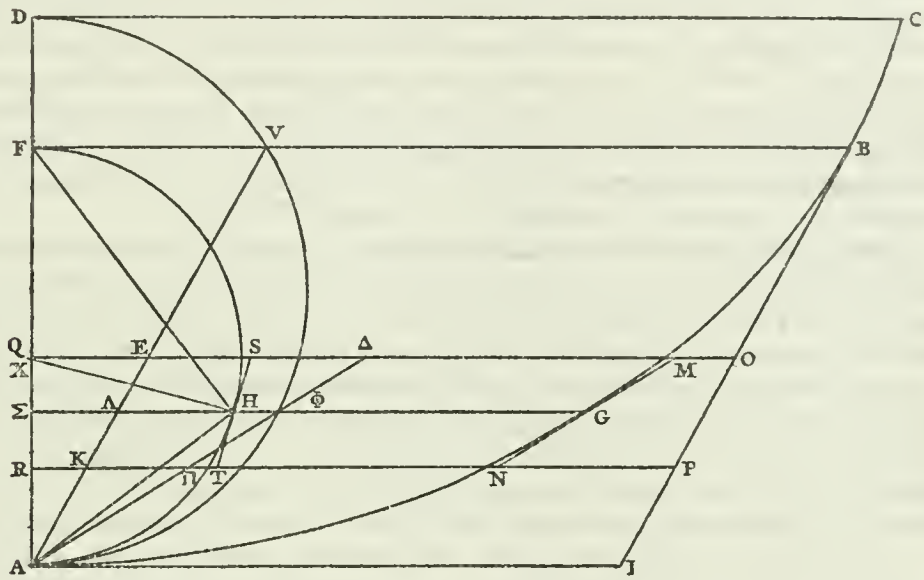
Cela étant ainſi, je dis que le temps dans lequel un corps parcourra la droite MN *avec une viteſſe conſtante telle qu'il peut l'acquérir en deſcendant par l'arc* BG *de la*

Quia igitur arcus æquales ſunt AE, AD, erunt anguli ad circumferentiam ipſis inſiſtentes, EDA, ABD æqua|les. Itaque in triangulis ABD, ADF, æquales anguli ABD, ADF. Communis autem utrique eſt angulus ad A. Ergo dicti trianguli ſimiles erunt, ideoque BA ad AD ut AD ad AF. (*p.* 50).

Sit jam punctum interſectionis *f* extra circulum, & ducatur *b*H parallela DE, quæ occurrat rectæ AD in H. Itaque ſecundum jam demonſtrata erit ut DA ad A*b*, ita A*b* ad AH, hoc eſt, ita A*f* ad AD: Ideoque rurſus proportionales erunt A*f*, AD, A*b*. Quare conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XXIII.

[Fig. 48.]



Sit Cyclois ABC [Fig. 48], *cujus vertex* A *deorſum converſus ſit, axe* AD *ad perpendiculum erecto; ſumptoque in ea quolibet puncto* B, *ducatur inde deorſum recta* BI *quæ Cycloidem tangat, terminetur que recta horizontali* AI. *recta vero* BF *ad axem perpendicularis agatur, & diviſa bifariam* FA *in* X, *ſuper ea deſcribatur ſemicirculus* FHA. *Ductâ deinde per punctum quodlibet* G *in curva* BA *ſumptum, rectâ* ΣG *parallelâ* BF, *quæ circumferentiæ* FHA *occurrat in* H, *axi* AD *in* Σ, *intelligantur per puncta* G *&* H *rectæ tangentes utriusque curvæ, earumque tangentium partes iisdem duabus horizontalibus* MS, NT *interceptæ ſint* MN, ST. *Iisdemque rectis* MS, NT *includantur tangentis* BI *pars* OP, *& axis* DA *pars* QR.

Quibus ita ſe habentibus, dico tempus quo grave percurret rectam MN, *celeritate æquabili quanta acquiritur deſcendendo per arcum Cycloidis* BG, *fore ad tempus*

Du mouvement Cycloïdal.

cycloïde, ſera au temps dans lequel la droite OP *ſera parcourue avec une viteſſe conſtante égale à la moitié de celle qui eſt acquiſe par la deſcente le long de la tangente* BI, *comme la tangente* ST *eſt à la partie* QR *de l'axe.*

En effet, décrivons ſur l'axe AD la demi-circonférence DVA coupant la droite BF en V et ΣG en Φ, et tirons la droite AV qui coupe les droites OQ, PR et GΣ en E, K et Λ. Tirons encore HF, HA, HX et AΦ, dont la dernière coupe les droites OQ et PR aux points Δ et Π.

Le temps par HN dont nous avons parlé a donc au temps par OP une raiſon compoſée du rapport des lignes MN et OP elles-mêmes et de l'inverſe du rapport des viteſſes avec leſquelles elles ſont parcourues*, le dernier rapport étant celui de la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſelon BI ou FA à la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BG ou FΣ*. Mais la viteſſe totale provenant de la chute FA eſt à la viteſſe correſpondant à la chute FΣ dans un rapport égal à celui des racines carrées des longueurs FA et FΣ* et par conſéquent la même que celui de FA à FH. La moitié de la viteſſe provenant de la chute FA eſt donc à la viteſſe provenant de la chute FΣ comme FX eſt à FH. Le temps ſuſdit par MN aura donc au temps par OP une raiſon compoſée des rapports MN : OP et FX : FH. Or, nous démontrerons que le premier de ces rapports, ſavoir MN : OP, eſt égal à FH : HΣ.

* Prop. 5. Galil. du mouv. uniforme [1]).
* Prop. 8. de cette Partie.
* Prop. 3. de cette Partie.

En effet, la tangente BI à la cycloïde eſt parallèle à la droite VA et de même la tangente MGN à la droite ΦA; par conſéquent la droite MN eſt égale à ΔΠ et OP à EK. Le dit rapport de la droite MN à OP eſt donc égal à celui de ΔΠ à EK, en d'autres termes à celui de ΔA à EA, c.à.d. de ΦA à ΛA, c.à.d. de VA à ΦA *. Mais VA : ΦA = FA : AH; car, attendu que le carré de VA eſt égal au rectangle DAF, et le carré de AΦ au rectangle DAΣ, leſquels rectangles ſont entre eux dans le rapport FA : ΣA, ou $FA^2 : AH^2$, il s'enſuit que $VA^2 : \Phi A^2 = FA^2 : AH^2$ ou, en conſidérant les longueurs, VA : AΦ = FA : AH. Le rapport MN : OP eſt donc égal à FA : AH, c.à.d., à cauſe de la ſimilitude des triangles FAH et FHΣ, à FH : HΣ, comme il a été dit. Par conſéquent la dite raiſon du temps par MN au temps par OP eſt compoſée des rapports FX : FH et FH : HΣ; elle ſera donc la même que celle de FX ou XH à HΣ. Mais comme le rayon XH eſt à HΣ, ainſi eſt la tangente ST à la droite QR; c'eſt une choſe qu'on voit facilement. Partant il eſt établi que le temps du mouvement conſidéré par MN eſt au temps du mouvement par OP comme ST eſt à QR. C. Q. F. D.

* Lemme précéd.

PROPOSITION XXIV.

Conſidérons de nouveau, comme dans la Propoſition précédente, la cycloïde ABC [Fig. 49] *dont le ſommet ſe trouve en bas et dont l'axe* AD *eſt vertical. Prenons ſur elle un point quelconque* B *et tirons à partir de lui de haut en bas la tangente à la cycloïde* BΘ *qui rencontre la droite horizontale* AΘ *en* Θ. *Tirons encore la droite* BF *perpendiculaire à l'axe et décrivons ſur* FA *la demi-circonférence* FHA. *Puiſſe en-*

quo percurretur recta OP, *celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur descendendo per totam tangentem* BI, *sicut est tangens* ST *ad partem axis* QR. De motu in Cycloide.

Describatur enim super axe AD semicirculus DVA secans rectam BF in V, & ΣG in Φ, & jungatur AV secans rectas OQ, PR, GΣ in EK & Λ. Jungantur item HF, HA, HX & AΦ; quæ postrema secet rectas OQ, PR in punctis Δ & Π.

Habet ergo dictum tempus per MN ad tempus per OP, rationem eam quæ componitur ex ratione ipsarum linearum MN ad OP, & ex ratione celeritatum quibus ipsæ percurruntur, contrarie sumpta *, hoc est, & ex ratione dimidiæ celeritatis ex BI sive ex FA, ad celeritatem ex BG, sive ex FΣ *. Atqui tota celeritas ex | FA ad celeritatem ex FΣ, est in subduplicata ratione longitudinum FA ad FΣ *, ac proinde eadem quæ FA ad FH. Ergo dimidia celeritas ex FA ad celeritatem ex FΣ erit ut FX ad FH. Itaque tempus dictum per MN ad tempus per OP habebit rationem compositam ex rationibus MN ad OP, & FX ad FH. Harum vero prior ratio, nempe MN ad OP, eadem ostendetur quæ FH ad HΣ.

* Prop. 5. Galil. de motu æquab. [1]) (*p.* 51.)
* Prop. 8. huj.
* Prop. 3. huj.

Est enim tangens Cycloidis BI parallela rectæ VA, similiterque tangens MGN parallela rectæ ΦA; ac proinde recta MN æqualis ΔΠ, & OP æqualis EK. Ergo dicta ratio rectæ MN ad OP eadem est quæ ΔΠ ad EK; hoc est, ΔΛ ad EA; hoc est, ΦA ad ΛA; hoc est VA ad ΦA *. Est autem ut VA ad AΦ ita FA ad AH; nam quia quadratum VA æquale est rectangulo DAF, & quadratum AΦ æquale rectangulo DAΣ, quæ rectangula sunt inter se ut FA ad ΣA, hoc est ut quadratum FA ad quadratum AH, erit proinde & quadratum VA ad quadratum ΦA ut quadratum FA ad quadratum AH; atque etiam VA ad AΦ longitudine, ut FA ad AH. Ratio itaque MN ad OP, eadem erit quæ FA ad AH, hoc est, propter triangula similia FAH, FHΣ, eadem quæ FH ad HΣ, ut dictum fuit. Itaque dicta ratio temporis per MN ad tempus per OP, componitur ex rationibus FX ad FH & FH ad HΣ, ideoque eadem erit quæ FX sive XH ad HΣ. Sicut autem radius XH ad HΣ, ita est tangens ST ad rectam QR; hoc enim facile perspicitur. Igitur tempus motus qualem diximus per MN, ad tempus per OP constat esse sicut ST ad QR. quod erat demonstrandum.

* Lemma præced.

PROPOSITIO XXIV. (*p.* 52).

Sit rursus ut in præcedenti propositione Cyclois ABC [Fig. 49], *cujus vertex* A *deorsum spectet, axis* AD *ad horizontem erectus sit; & sumpto in ea quovis puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* BΘ *quæ Cycloidem tangat, occurratque rectæ horizontali* AΘ *in* Θ: *recta vero* BF *axem perpendicularis agatur, & super* FA *describatur semicirculus* FHA. *Deinde alia recta* GE, *parallela* FB, *secet Cycloidem in* E,

[1]) Ed. Naz. T. VIII, p. 195.

Du mouvement Cycloïdal.

ſuite une autr droite GE, *parallèle à* FB, *couper la cycloïde en* E, *la droite* BΘ *en* I, *la circonférence* FHA *en* H *et enfin l'axe* DA *en* G.

Je dis que le temps de la deſcente ſuivant l'arc de cycloïde BE *eſt à celui ſuivant la tangente* BI *avec la moitié de la viteſſe qui peut être acquiſe par une chute ſuivant* BΘ *comme l'arc* FH *eſt à la droite* FG.

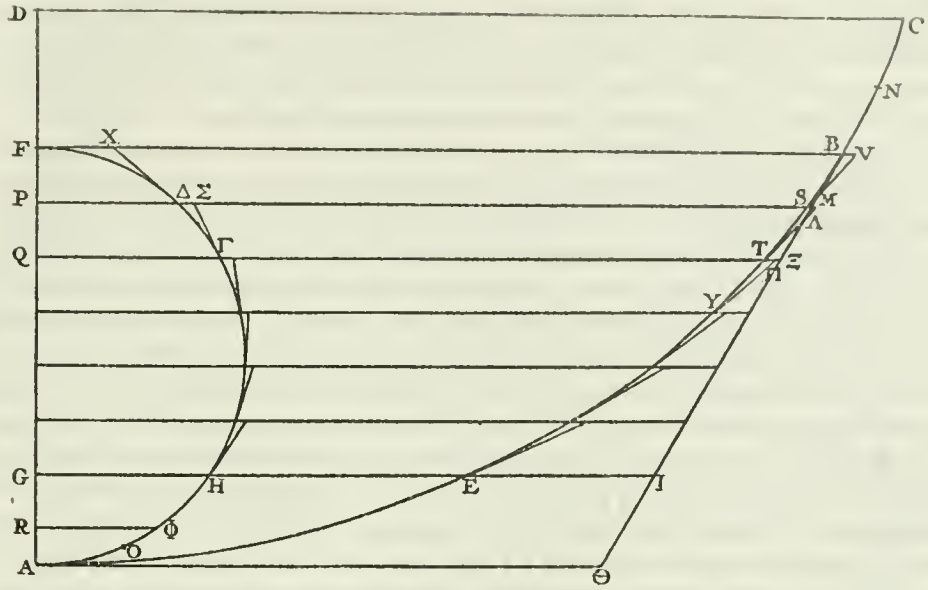
En effet, ſi cela n'eſt pas vrai, le temps de la chute ſuivant l'arc BE aura au temps ſuſdit correſpondant à BI, un rapport ſupérieur ou inférieur à celui de l'arc FH à la droite FG. Que le premier temps ait d'abord à l'autre, ſi cela eſt poſſible, un rapport plus grand.

Dans ce cas un certain temps plus court que celui de la chute ſelon BE (que ce ſoit le temps Z) aura au temps conſidéré correſpondant à BI le rapport de l'arc FH à la droite FG. Que ſi maintenant on prend ſur la cycloïde au-deſſus du point B un autre point N, le temps néceſſaire pour parcourir BE après NB ſera plus court que le temps ſuivant BE. Or, il eſt manifeſte qu'on peut prendre le point N ſi près de B, que la différence de ces temps devient auſſi petite qu'on veut et qu'elle eſt par conſéquent plus petite que celle dont le temps Z eſt ſurpaſſé par le temps de la chute ſuivant BE. Suppoſons donc le point N ainſi choiſi. Il s'enſuit que le temps de la chute ſuivant BE après NB ſera plus grand que le temps Z et aura par conſéquent au temps de la chute ſuivant BI avec la moitié de la viteſſe qui peut être acquiſe par une chute ſuivant BΘ, un rapport ſupérieur à celui de l'arc FH à la droite FG. Que le premier temps ait donc au deuxième un rapport égal à celui de l'arc FHO à la droite FG.

Diviſons FG en parties égales FB, PQ, etc. dont chacune correſpond à une hauteur moindre que celle de la ligne NB, moindre auſſi que celle de l'arc HO; en effet, il eſt évident que cela eſt poſſible. Tirons à partir des points de diviſion des droites PΛ, QΞ, etc. parallèles à la baſe DC et ſe terminant à la tangente BΘ. Et ſoient menées vers le haut, à partir des points où ces parallèles coupent la circonférence FH, et de même à partir du point H, des tangentes chacune juſqu'à la parallèle prochaine, telles que ΔX, ΓΣ, etc. Soient également menées vers le haut à partir des points où

[Fig. 49.]

De motu in Cycloide.



rectam BΘ *in* I, *circumferentiam* FHA *in* H, *& denique axem* DA *in* G.

Dico tempus descensus per arcum Cycloidis BE, *esse ad tempus per tangentem* BI *cum celeritate dimidia ex* BΘ, *sicut arcus* FH *ad rectam* FG.

Si enim hoc verum non est, habebit tempus per arcum BE ad dictum tempus per BI, vel majorem rationem quam arcus FH ad rectam FG vel minorem. Habeat primo, si fieri potest, majorem.

Itaque tempus aliquod brevius tempore per BE (sit hoc tempus Z) erit ad dictum tempus per BI ut arcus FH ad rectam FG. Quod si jam in Cycloide supra punctum B sumatur punctum aliud N, erit tempus per BE post NB, brevius tempore per BE. Manifestum est autem punctum N tam propinquum sumi posse ipsi B, ut differentia eorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde ut minor sit ea qua tempus Z superatur à tempore per BE. Sit itaque | punctum N ita sumptum. unde quidem tempus (*p.* 53). per BE post NB majus erit tempore Z, majoremque proinde rationem habebit ad tempus dictum per BI cum dimidia celeritate ex BΘ, quam arcus FH ad rectam FG. Habeat itaque eam quam arcus FHO ad rectam FG.

Dividatur FG in partes æquales FP, PQ, &c. quarum unaquæque minor sit altitudine lineæ NB, atque item altitudine arcus HO; hoc enim fieri posse manifestum est; & à punctis divisionum agantur rectæ, basi DC parallelæ, & ad tangentem BΘ terminatæ PΛ, QΞ, &c. Quibusque in punctis hæ secant circumferentiam FH, ab iis, itemque à puncto H, tangentes sursum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut ΔX, ΓΣ &c. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ Cycloidi

Du mouvement Cycloïdal.

les dites parallèles coupent la cycloïde, des tangentes telles que SV, TM, etc. Or, si l'on ajoute à la droite FG une partie GR égale à celles qui résultent de la division, et qu'on même RΦ parallèle, comme les autres, à DC, il apparaît que celle-ci coupe la circonférence FHA entre H et O, puisque GR est plus petite que la hauteur du point H au-dessus de O. Et maintenant nous raisonnerons comme suit.

Le temps d'une chute suivant la tangente VS avec la vitesse constante qui pourrait être acquise par une chute suivant BS est plus grand que le temps d'un mouvement uniformément accéléré suivant l'arc BS après NB. Car la vitesse résultant de la chute BS est moindre que la vitesse résultant de la chute NB parce que la hauteur de BS est inférieure à celle de NB. Mais la vitesse provenant de la chute BS est supposée ici rester la même durant le trajet de la tangente VS, tandis que la vitesse acquise par la chute selon NB s'accélère continuellement durant le trajet de l'arc BS; de plus ce dernier est plus petit que la tangente VS et partout moins incliné qu'aucune partie de cette tangente. De sorte que pour toutes ces raisons le temps nécessaire pour parcourir la tangente VS avec la vitesse qui correspond à une chute suivant BS est plus grand que le temps nécessaire pour parcourir l'arc BS après une chute suivant NB. Pareillement le temps d'une chute suivant la tangente MT avec une vitesse égale à celle qui résulte d'une chute suivant BT sera plus grand que le temps nécessaire pour parcourir l'arc ST après NS, et le temps employé pour parcourir la tangente ΠY avec une vitesse telle qu'elle provient d'une chute selon BY sera plus grand que le temps nécessaire pour parcourir l'arc TY après NT. Et ainsi la somme des temps des mouvements uniformes suivant toutes les tangentes jusqu'à la plus basse qui touche la cycloïde en E, chacune d'elles étant parcourue avec la vitesse qui peut être acquise par une chute à partir du point B jusqu'à leur point de contact, sera plus grande que le temps nécessaire pour parcourir l'arc BE après NB. Mais cette même somme de temps serait aussi plus petite, comme nous le montrerons maintenant.

En effet, considérons de nouveau les mêmes temps des mouvements uniformes suivant les tangentes à la cycloïde. Or, le temps d'une chute suivant la tangente VS avec la vitesse provenant d'une chute suivant BS est au temps nécessaire pour parcourir la droite BΛ avec la moitié de la vitesse telle qu'elle serait acquise par une chute suivant FA, comme la tangente ΔX à la circonférence est à la partie FP de l'axe *. Pareillement le temps nécessaire pour parcourir la tangente MT avec une vitesse telle qu'elle provient d'une chute suivant BT est au temps nécessaire pour parcourir la droite ΛΞ avec cette même moitié de la vitesse correspondant à la chute suivant FA, comme la tangente ΓΣ est à la droite PQ. Et ainsi de suite: chacun des temps nécessaires pour parcourir une des tangentes à la cycloïde, lesquels sont les mêmes que ceux considérés plus haut, sera au temps du mouvement uniforme selon la partie de la droite BI qui lui coresponde avec la moitié de la vitesse provenant d'une chute BΘ, comme la tangente à la circonférence FH comprise entre les mêmes parallèles est à la partie correspondante de la droite FG.

* Prop. précéd.

Il y a donc certaines longueurs FP, PQ, etc. et un même nombre d'autres quantités,

occurrunt, tangentes ſurſum ducantur velut SV, TM &c. additâ vero ad rectam FG parte una GR æquali iis quæ ex diviſione, ductâque RΦ parallelâ ſimiliter ipſi DC, patet eam occurrere circumferentiæ FHA inter H & O, quia GR minor eſt altitudine puncti H ſupra O. Jam vero ſic porro argumentabimur. DE MOTU IN CYCLOIDE.

Tempus per tangentem VS cum celeritate æquabili quæ acquireretur ex BS, majus eſt tempore motus continue accelerati per arcum BS poſt NB. Nam celeritas ex BS minor eſt celeritate ex NB, propterea quod minor altitudo BS quam NB. At celeritas ex BS æquabiliter continuari ponitur per tangentem VS, cum celeritas acquiſita ex NB continue porro acceleretur per arcum BS, qui arcus minor inſuper eſt tangente VS, omnibusque partibus ſuis magis erectus quam ulla pars tangentis VS. Adeo ut omnino majus ſit futurum tempus per tangentem VS cum celeritate ex BS, tempore per arcum BS poſt NB. Similiter tempus per tangentem MT, cum celeritate ex BT, majus erit tempore per arcum ST poſt NS, & tempus per tangentem ΠY cum celeritate ex BY, majus tempore per arcum TY poſt NT. Atque ita tempora motuum æquabilium per tangentes omnes usque ad infimam quæ tangit cycloidem in E, cum celeritatibus per ſingulas quantæ acquiruntur cadendo ex B adusque punctum ipſarum contactus, majora ſimul erunt tempore per arcum BE poſt NB. Eadem vero & minora eſſent, ut nunc oſtendemus.

Conſiderentur enim denuo tempora eadem motuum æquabilium per tangentes cycloidis. Et eſt quidem tempus per tangentem VS cum celeritate ex BS, ad tempus per rectam BA cum celeritate dimidia ex FA, ut tangens circumferentiæ ΔX ad partem axis FP*. Similiterque tempus per tangentem MT, cum celeritate ex BT, ad tempus per rectam ΔΞ cum eadem dimidia celeritate ex FA, ut tangens ΓΣ ad rectam PQ. Atque ita deinceps ſingula tempora per tangentes cycloidis, quæ ſunt eadem ſupradictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes ſibi reſpondentes rectæ BI cum celeritate dimidia ex BΘ, ſicut tangentes circumferentiæ FH, iisdem parallelis comprehenſæ, ad partes rectæ FG ipſis reſpondentes. (p. 54). * Prop. præced.

Sunt igitur quantitates quædam rectæ FP, PQ, &c. & totidem aliæ, tempora ſcili-

Du mouvement Cycloïdal.

ſavoir les temps dans leſquels ſont parcourues les droites BΛ, ΛΞ, etc. d'un mouvement uniforme avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BΘ; et chaque quantité de la première ſérie a le même rapport à la quantité ſuivante que chaque quantité de la deuxième ſérie à celle qui la ſuit: en effet, les quantités de chacune des ſéries ſont égales entre elles. Or, les rapports des quantités de la première ſérie à certaines autres, ſavoir aux tangentes ΔX, ΓΣ, etc. à la circonférence, ſont les mêmes et obſervent le même ordre que les rapports des quantités de la deuxième ſérie à certaines autres, ſavoir aux temps du mouvement ſuſdit le long des tangentes VS, MT, etc. à la cycloïde. Par conſéquent, comme ſe rapporte la ſomme de toutes les premières à celle des grandeurs correſpondantes, c.à.d. comme la ligne FG entière eſt à la ſomme de toutes les tangentes XΔ, ΓZ, etc., ainſi eſt le temps dans lequel la tangente entière BI eſt parcourue avec la moitié de la viteſſe acquiſe par une chute ſuivant BΘ, à la ſomme de tous les temps correſpondants aux mouvements ſuſdits ſuivant les tangentes VS, MT, etc. à la cycloïde *. Ainſi donc, par inverſion, les temps des mouvements ſuſdits ſuivant les tangentes à la cycloïde auront au temps néceſſaire pour parcourir la droite BI avec la moitié de la viteſſe qui réſulterait d'une chute ſuivant BΘ, la même raiſon que toutes les tangentes à la circonférence FH à la droite FG, et par conſéquent une raiſon moindre que celle de l'arc FO à la même droite FG, puiſque l'arc FΦ, et par conſéquent a-fortiori l'arc FO, eſt plus grand que l'enſemble des tangentes à l'arc FH *. Mais nous avons poſé que le temps néceſſaire pour parcourir BE après NB eſt au temps néceſſaire pour parcourir BI avec la moitié de la viteſſe qui réſulterait d'une chute ſelon BΘ, comme l'arc FO eſt à la droite FG. Par conſéquent la ſomme des temps néceſſaires pour parcourir chacune des tangentes à la cycloïde ſera plus petite que le temps néceſſaire pour parcourir BE après NB, tandis qu'auparavant nous avons démontré que cette ſomme eſt plus grande; ce qui eſt abſurde. Il en réſulte que le temps néceſſaire pour parcourir l'arc de cycloïde BE n'a pas au temps de parcourir la tangente BI avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſelon BΘ ou FA, un rapport ſupérieur à celui de l'arc FH de la circonférence à la droite FG.

* Prop. 2. des Sphéroïdes et Conoïdes d'Archimède[1]

* Prop. 20. de cette Partie.

Suppoſons maintenant, ſi cela eſt poſſible, que le premier temps ait au deuxième un rapport inférieur au dernier rapport nommé. Par conſéquent un certain temps ſupérieur au temps néceſſaire pour parcourir l'arc BE (que ce ſoit le temps Z) ſera au temps conſidéré correſpondant à BI comme l'arc FH eſt à la droite FG.

Or, ſi l'on prend [Fig. 50] un arc NM égal en hauteur à l'arc BE, mais dont l'extrémité ſupérieure N ſoit ſituée au-deſſous du point B, le temps de chute le long de l'arc NM ſera plus grand que le temps correſpondant pour l'arc BE *. Il eſt évident que le point N peut être pris ſi près du point B que la différence des dits temps devient auſſi petite qu'on veut, et par conſéquent inférieure à celle dont le temps Z ſurpaſſe le temps néceſſaire pour parcourir l'arc BE. Suppoſons donc le point N choiſi de cette manière. Dans cette hypothèſe le temps de la chute ſuivant NM ſera inférieur au temps Z, et aura par conſéquent au dit temps correſpondant à BI, ſup-

* Prop. 22. de cette Partie.

cet quibus percurruntur rectæ BΛ, ΛΞ &c, motu æquabili cum celeritate dimidia ex BΘ; Et unaquæque quantitas in prioribus ad sequentem eadem proportione refertur, qua unaquæque posteriorum ad suam sequentem; sunt enim utrobique inter se æquales. Quibus autem proportionibus priores quantitates ad alias quasdam, nempe ad tangentes circuli ΔX, ΓΣ, &c, referuntur, iisdem proportionibus & eodem ordine posteriores quoque referuntur ad alias quasdam, nempe ad tempora motus qualem diximus per tangentes cycloidis VS, MT &c. Ergo, sicut se habent omnes simul priores ad omnes eas ad quas ipsæ referuntur, hoc est, sicut tota FG ad tangentes omnes XΔ, ΓΣ, &c. ita tempus quo percurritur tota BI cum celeritate dimidia ex BΘ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis VS, MT, &c *. Et invertendo itaque, tempora motuum dictorum per tangentes cycloidis, ad tempus per rectam BI cum celeritate dimidia ex BΘ, eandem rationem habebunt quam dictæ tangentes omnes circumferentiæ FH ad rectam FG; ac minorem proinde quam arcus FO ad rectam eandem FG; quia arcus FΦ, ideoque omnino & arcus FO major est dictis omnibus arcus FH tangentibus *. Atqui tempus per BE post NB, ad tempus per BI cum celeritate dimidia ex BΘ, posuimus esse ut arcus FO ad rectam FG. Ergo dicta tempora omnia per tangentes cycloidis minora simul erunt tempore per BE post NB, cum antea majora esse ostensum sit; quod est absurdum. Itaque tempus per arcum cycloidis BE, ad tempus per tangentem BI, cum celeritate dimidia ex BΘ vel ex FA, non habet majorem rationem quam arcus circumferentiæ FH ad rectam FG.

De motu in Cycloide.

* Prop. 2. Archimedis de Sphæroid. & Conoid. [1]).

* Prop. 20. huj.

Habeat jam, si potest, minorem. Ergo tempus aliquod majus tempore per arcum BE, (sit hoc tempus Z) erit ad tempus dictum per BI, ut arcus FH ad rectam FG.

Quod si jam sumatur [Fig. 50] arcus NM æqualis altitudine cum arcu B|E, sed (*p.* 55). cujus terminus superior N sit humilior puncto B, erit tempus per arcum NM majus tempore per arcum BE *. Manifestum autem quod punctum N tam propinquum sumi potest puncto B, ut differentia dictorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde minor ea qua tempus Z superat tempus per arcum BE. Sit itaque punctum N ita sumptum. Unde quidem tempus per NM minus erit tempore Z, habebitque proinde ad dictum tempus per BI, cum dimidia celeritate ex BΘ, minorem rationem quam

* Prop. 22. huj.

[1]) Voir sur cette Proposition la note 5 de la p. 251 du T. XIV.

Du mouvement Cycloïdal.

posé parcourue avec la moitié de la viteſſe qui réſulterait d'un chute ſuivant BΘ, un rapport inférieur à celui de l'arc FH à la droite FG. Que le premier temps ait donc au deuxième un rapport égal à celui de l'arc LH à la droite FG.

Diviſons maintenant FG en des parties égales FP, PQ, etc. dont chacune ſoit inférieure à la hauteur de l'arc de cycloïde BN et en même temps à celle de l'arc de circonférence FL; et tirons, après avoir ajouté à FG une de ces parties Gζ, à partir des points de diviſion des droites parallèles à la baſe DC et ſe terminant à la tangente BΘ, ſavoir PO, QK, etc. et de même à partir du point ζ la droite ζΩ coupant la cycloïde en V et la circonférence en η. Menons enſuite vers le bas à partir des points où les dites parallèles coupent la circonférence FH, des tangentes chacune juſqu'à la parallèle prochaine, telles que θΔ et ΓΣ, dont la plus baſſe partant du point H rencontre la droite ζΩ en X. Menons de plus également vers le bas, à partir des points où les dites parallèles coupent la cycloïde, un nombre égal de tangentes, telles que SΛ, TΞ, etc. dont la plus baſſe, ſavoir la tangente au point E, rencontre la droite ζΩ en R.

Comme Pζ eſt égale à FG, hauteur de l'arc BE, à laquelle eſt égale d'après la conſtruction celle de l'arc NM, Pζ ſera auſſi égale à la hauteur de l'arc NM. Or, la droite PO eſt, d'après la conſtruction, ſituée plus haut que l'extrémité N. Par conſéquent ζΩ, et ſon point V, ſeront ſitués plus haut que l'extrémité M. C'eſt pourquoi, l'arc SV étant égal en hauteur à l'arc NM, mais ayant ſon extrémité S ſituée au-deſſus de N, le temps d'une chute ſuivant SV ſera plus court que celui d'une chute ſuivant NM*.

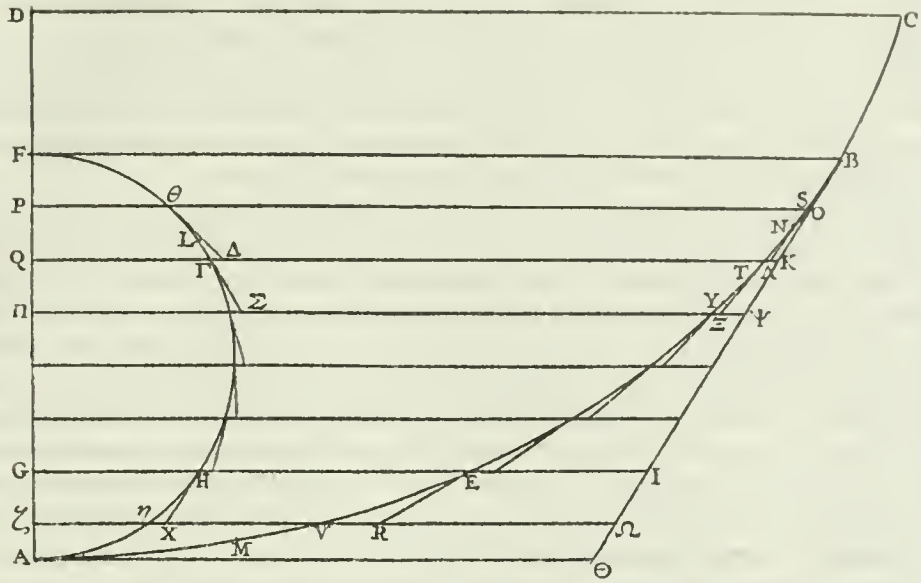
* Prop. 22. de cette Partie.

Mais le temps néceſſaire pour parcourir la tangente SΛ avec la viteſſe conſtante conſidérée, ſavoir celle qui provient d'une chute ſuivant BS, eſt plus court que le temps d'une chute accélérée le long de l'arc ST commençant en S. Car la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BS, avec laquelle toute la droite SΛ eſt parcourue par hypothèſe, eſt égale à la viteſſe provenant d'une chute ſuivant ST *, c.à.d. à la viteſſe acquiſe à la fin par le mouvement ſuivant cet arc ST, et SΛ eſt plus petite que ST. Pareillement le temps néceſſaire pour parcourir la tangente TΞ avec une viteſſe conſtante, ſavoir celle qui provient de la chute ſuivant BT, eſt plus court que le temps d'une chute accélérée ſuivant l'arc TY après ST, vu que la viteſſe provenant de la chute ſuivant BT, avec laquelle toute la droite TΞ eſt parcourue par hypothèſe, eſt égale à la viteſſe provenant d'une chute ſuivant SY, c.à.d. à la

* Prop. 8. de cette Partie.

[Fig. 50.]

De motu in Cycloide.



arcus FH ad rectam FG. Habeat ergo eam quam arcus LH ad rectam FG.

Dividatur jam FG in partes æquales FP, PQ, &c. quarum unaquæque minor sit arcus cycloidis BN altitudine, itemque minor altitudine arcus circumferentiæ FL; & additâ ad FG unâ earum partium Gζ, ducantur à punctis divisionum rectæ basi DC parallelæ, & ad tangentem BΘ terminatæ, PO, QK, &c; itemque à puncto ζ recta ζΩ quæ secet cycloidem in V, circumferentiam in η; quibusque in punctis ductæ parallelæ secant circumferentiam FH, ab iis tangentes deorsum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut θΔ, ΓΣ: Quarum infima à puncto H ducta occurrat rectæ ζΩ in X. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ occurrunt cycloidi, ducantur totidem tangentes deorsum, velut SΛ, TΞ, &c. quarum infima, tangens nempe à puncto E ducta, occurrat rectæ ζΩ in R.

Quia igitur Pζ æqualis est FG altitudini arcus BE, cui æqualis est ex constructione altitudo arcus NM, erit & Pζ æqualis altitudini arcus NM. Est autem recta PO ex constructione superior ter|mino N. Ergo & ζΩ, & in ea punctum V, superius termino (*p.* 56). M. Quare, cum arcus SV æqualis sit altitudinis cum arcu NM, sed termino S sublimiore quam N, erit tempus per SV brevius tempore per NM*. * Prop. 22. huj.

Atqui tempus per tangentem SΛ, cum celeritate æquabili ex BS, brevius est tempore descensus accelerati per arcum ST, incipientis in S. Nam celeritas ex BS, qua tota SΛ transmissa ponitur, æqualis est celeritati ex ST*, quæ motui per arcum ST in fine demum acquiritur; ipsaque SΛ minor est quam ST. Similiter tempus per tangentem TΞ, cum celeritate æquabili ex BT, brevius est tempore descensus accelerati per arcum TY post ST; quum celeritas ex BT, qua tota TΞ transmissa ponitur, sit æqualis cele- * Prop. 8. huj.

Du mouvement Cycloïdal.

viteſſe acquiſe à la fin par le dit mouvement ſuivant l'arc TY après ST, et que la droite TΞ eſt inférieure en longueur à l'arc TY. Par conſéquent la ſomme de tous les temps qui correſpondent aux mouvements uniformes le long des tangentes à la cycloïde avec les viteſſes qui ſont obtenues, dans le cas de chacune d'elles, par une chute à partir du point B juſqu'à ſon point de contact, ſera inférieure au temps d'une chute accélérée le long de l'arc SV. Mais cette même ſomme ſerait auſſi plus grande que ce dernier temps, comme nous le démontrerons maintenant.

En effet, le temps conſidéré néceſſaire pour parcourir la tangente SΛ, avec une viteſſe conſtante, ſavoir celle qui provient d'une chute ſuivant BS, eſt au temps néceſſaire pour parcourir la droite OK avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BΘ, comme la tangente à la demi-circonférence θΔ eſt à la droite PQ *. De même le temps de parcourir la tangente TΞ avec la viteſſe uniforme conſidérée, ſavoir celle qui provient d'une chute ſuivant BT, eſt au temps néceſſaire pour parcourir uniformément la droite KΨ avec la moitié de la viteſſe provenant de la chute ſuivant BΘ, comme la tangente ΓΣ eſt à la droite QΠ. Et ainſi de ſuite: les temps néceſſaires pour parcourir les tangentes à la cycloïde, qui ſont les mêmes que précédemment, ſeront chacun au temps d'un mouvement uniforme ſuivant la partie correſpondante de la droite OΩ, avec la moitié de la viteſſe provenant de la chute ſuivant BΘ, comme la tangente à la circonférence θη compriſe entre les mêmes parallèles eſt à la partie correſpondante de la droite Pζ. D'où l'on conclura, comme dans la première partie de la démonſtration, que la ſomme de toutes les droites PQ, QΠ, etc. c.à.d. la ligne entière Pζ, eſt à la ſomme des tangentes θΔ, ΓΣ, etc. comme le temps dans lequel eſt parcourue toute la tangente OΩ, avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BΘ, à la ſomme totale des mouvements ſuſdits ſuivant les tangentes à la cycloïde SΛ, TΞ, etc. Par converſion, on aura donc auſſi que la ſomme des temps ſuivant les tangentes à la cycloïde aura au temps ſuſdit du mouvement uniforme ſuivant la droite OΩ, ou bien ſuivant BI, le même rapport que la ſomme des dites tangentes à l'arc θη à la droite Pζ ou FG; ce rapport des temps ſera donc ſupérieur à celui de l'arc LH à la droite FG; en effet, l'arc θH, et à plus forte raiſon l'arc LH, ſera plus petit que la dite ſomme des tangentes à l'arc θη *. Mais nous avons ſuppoſé dès le commencement que le temps néceſſaire pour parcourir NM ſe rapporte à celui de BI comme l'arc LH eſt à la droite FG. Par conſéquent le temps de parcourir NM et à plus forte raiſon celui de parcourir SV ſera inférieur au temps de parcourir l'enſemble des tangentes à la cycloïde. Ce qui eſt abſurde puiſqu'il a été démontré plus haut que ce temps eſt inférieur à celui correſpondant à une chute ſuivant l'arc SV. Il eſt donc évident que le temps d'une chute ſuivant l'arc de cycloïde BE eſt au temps néceſſaire pour parcourir uniformément la tangente BI avec la moitié de la viteſſe provenant d'une chute ſuivant BΘ, dans un rapport qui n'eſt pas inférieur à celui de l'arc FH à la droite FG.

* Prop. précéd.

* Prop. 20. de cette Partie.

Mais il a également été démontré que le rapport des temps n'eſt pas plus grand que ce dernier. Il eſt donc néceſſaire qu'il ait la même valeur. C. Q. F. D.

ritati ex SY, quæ in fine demum acquiritur motui dicto per arcum TY post ST; ipsaque TΞ minor sit arcu TY. Atque ita tempora omnia motuum æquabilium per tangentes cycloidis, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur descendendo ex B usque ad punctum ipsarum contactus, breviora simul erunt tempore descensus accelerati per arcum SV. Eadem vero & longiora essent, ut nunc ostendemus. De motu in Cycloide.

Est enim tempus dictum per tangentem SΛ, cum celeritate æquabili ex BS, ad tempus per rectam OK cum celeritate æquabili dimidia ex BΘ, sicut tangens semicirculi θΔ ad rectam PQ *. similiterque tempus per tangentem TΞ, cum celeritate æquabili ex BT, est ad tempus per rectam KΨ cum celeritate æquabili dimidia ex BΘ, ut tangens ΓΣ ad rectam QΠ. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supra dictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ OΩ, cum celeritate dimidia ex BΘ, ut tangentes circumferentiæ θη, iisdem parallelis inclusæ, ad partes rectæ Pζ ipsis respondentes. Unde, ut in priori parte demonstrationis, concludetur omnes simul rectas PQ, QΠ &c. hoc est, totam Pζ esse ad omnes simul tangentes θΔ, ΓΣ, &c. sicut tempus quo percurritur tota OΩ, cum celeritate dimidia ex BΘ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis SΛ, TΞ, &c. Quare & convertendo, tempora omnia per tangentes cycloidis, eam rationem habebunt ad tempus dictum motus æquabilis per rectam OΩ, sive per BI, quam dictæ tangentes omnes arcus θη ad rectam Pζ vel FG, ac proinde majorem quam arcus LH ad rectam FG; est enim arcus θH, adeoque etiam omnino arcus LH, minor dictis tangentibus arcus θη *. Sed tempus per NM posui|mus ab initio (*p.* 57). ad idem tempus per BI se habere ut arcus LH ad rectam FG. Ergo tempus per NM, multoque magis tempus per SV, minus erit tempore per tangentes cycloidis. Quod est absurdum, cum hoc tempus, illo per arcum SV, antea minus ostensum fuerit. Patet igitur tempus per arcum cycloidis BE ad tempus per tangentem BI cum celeritate æquabili dimidia ex BΘ, non minorem rationem habere quam arcus FH ad rectam FG.

* Prop. præced.

* Prop. 20. huj.

Sed nec majorem habere ostensum fuit. Ergo eandem habeat necesse est. quod erat demonstrandum.

Du mouvement Cycloïdal.

PROPOSITION XXV.

Dans une cycloïde à axe vertical et dont le ſommet ſe trouve en bas, les temps de deſcente dans leſquels un mobile, partant du repos d'un point quelconque de la courbe, atteint le point le plus bas, ſont égaux entre eux, et ont au temps de la chute verticale le long de l'axe entier de la cycloïde une raiſon égale à celle de la demi-circonférence d'un cercle à ſon diamètre.

Conſidérons une cycloïde ABC à axe vertical dont le ſommet eſt tourné vers le bas [Fig. 51], et un mobile deſcendant librement à partir d'un point, tel que B, arbitrairement choiſi ſur cette courbe, ſuivant l'arc BA ou ſuivant une ſurface poſſédant la même courbure. Je dis que le temps de la deſcente de ce mobile eſt au temps d'une chute le long de l'axe DA, comme la demi-circonférence d'un cercle eſt à ſon diamètre. Ceci étant démontré, il ſera établi en même temps que les temps de chute le long d'arcs de la cycloïde ſe terminant en A mais d'ailleurs arbitrairement choiſis ſont égaux entre eux.

Décrivons ſur l'axe DA un demi-cercle dont la circonférence ſoit coupée en E par la droite BF parallèle à la baſe DC, et après avoir joint les points E et A par une droite, traçons BG parallèle à cette dernière et touchant donc la cycloïde au point B. Suppoſons que la même droite rencontre en G la droite horizontale tirée par A. Décrivons encore un demi-cercle FHA ſur FA.

D'après la propoſition précédente, le temps de la deſcente ſuivant l'arc de cycloïde BA eſt alors au temps d'un mouvement uniforme le long de la droite BG avec la moitié de la viteſſe qui ſerait acquiſe par une chute ſuivant BG, comme le contour FHA du demi-cercle eſt à la droite FA. Mais le temps du dit mouvement uniforme par BG eſt égal au temps de la chute libre accélérée ſuivant la même droite BG, ou à celle ſuivant EA qui lui eſt égale et parallèle, c.àd. au temps de la chute accélérée ſuivant l'axe DA *. Par conſéquent le temps du mouvement le long de l'arc BA ſera

* Prop. 6. de Galilée sur le mouv. accél.[1])

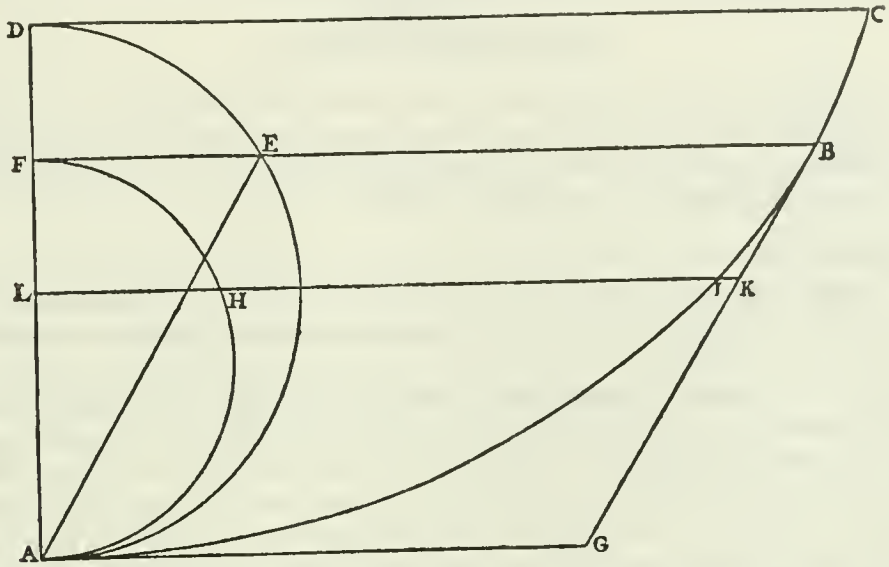
[1]) Ed. Naz. T. VIII, p. 221.

De motu in Cycloide.

PROPOSITIO XXV.

In Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimiſſum, ad punctum imum verticis pervenit, ſunt inter ſe æqualia; habentque ad tempus caſus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam ſemicircumferentia circuli ad diametrum.

[Fig. 51.]



Eſto cyclois ABC [Fig. 51] cujus vertex A deorſum ſpectet, axis vero AD ad perpendiculum erectus ſit, & à puncto quovis in cycloide ſumpto, velut B; deſcendat mobile impetu naturali per arcum BA, ſive per ſuperficiem ita inflexam. Dico tempus deſcenſus hujus eſſe ad tempus caſus per axem DA, ſicut ſemicircumferentia circuli ad diametrum. Quo demonſtrato, etiam tempora deſcenſus, per quoſlibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter ſe æqualia eſſe conſtabit.

Deſcribatur ſuper axe DA ſemicirculus, cujus circumferentiam ſecet recta BF, baſi DC parallela, in E; jnnctâque EA, ducatur ei parallela BG, quæ quidem cycloidem tanget in B. Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G: ſitque etiam ſuper FA deſcriptus ſemicirculus FHA.

Eſt igitur, per præcedentem, tempus deſcenſus per arcum cycloidis BA, ad tempus motus æquabilis per rectam BG cum celeritate dimidia ex BG, ſicut arcus ſemicirculi FHA ad rectam FA. Tempus vero dicti motus æquabilis per BG, æquatur tempori deſcenſus naturaliter accelerati per eandem BG, ſive per EA, quæ ipſi parallela eſt & æqualis, hoc eſt, tempori deſcenſus accelerati per axem DA*. Itaque tempus per

* Prop. 6. Galil. de motu Accel.[1]).

Du mouvement Cycloïdal.

auſſi au temps de chute ſuivant l'axe DA, comme la circonférence FHA d'un demi-cercle eſt à ſon diamètre FA. C. Q. F. D.

Que ſi l'on ſuppoſe la cavité de la cycloïde conſtruite entièrement, il eſt certain que le mobile, après être deſcendu le long de l'arc BA, montera, en continuant ſon mouvement à partir de là, le long du deuxième arc ſymétrique avec le premier * et y employera autant de temps que pour la deſcente *; et qu'après cela il reviendra de nouveau à B en paſſant par A et que les temps de ces oſcillations cycloïdales d'amplitudes quelconques ſeront chacun au temps de la chute verticale ſuivant l'axe DA, comme la circonférence totale du cercle eſt à ſon diamètre.

* Prop. 9. de cette Partie.

* Prop. 11. de cette Partie.

PROPOSITION XXVI.

Les mêmes choſes étant ſuppoſées, et une horizontale HI *étant en outre tirée* [Fig. 51] *qui coupe l'arc* BA *en* I *et la circonférence* FHA *en* H, *je dis que le temps néceſſaire pour parcourir l'arc* BI *eſt à celui dans lequel eſt parcouru l'arc* IA *après* BI, *comme l'arc* FH *de la circonférence eſt à* HA.

En effet, ſuppoſons que la droite HI coupe la tangente BG en K et l'axe DA en L. Le temps de la chute ſuivant l'arc BA eſt alors à celui du mouvement uniforme ſuivant BG avec la moitié de la viteſſe qui proviendrait d'une chute ſuivant BG, comme l'arc FHA eſt à la droite FA *. Or, le temps du dit mouvement uniforme ſuivant BG eſt au temps d'un mouvement uniforme ſuivant BK avec la même demi-viteſſe, comme la longueur BG eſt à BK ou comme FA eſt à FL. D'autre part le temps d'un mouvement uniforme avec la viteſſe mentionnée ſuivant BK eſt au temps d'une chute ſuivant BI, comme FL eſt à l'arc FH *. On aura donc „ex æquo" [1]): le temps d'une chute ſuivant BA eſt à celui d'une chute ſuivant BI comme l'arc FHA eſt à l'arc FH. Et, par diviſion et converſion: le temps d'une chute le long de BI eſt à celui d'une chute le long de IA après BI, comme l'arc FH eſt à l'arc HA. C. Q. F. D.

* Prop. 24. de cette Partie.

* Prop. 24. de cette Partie.

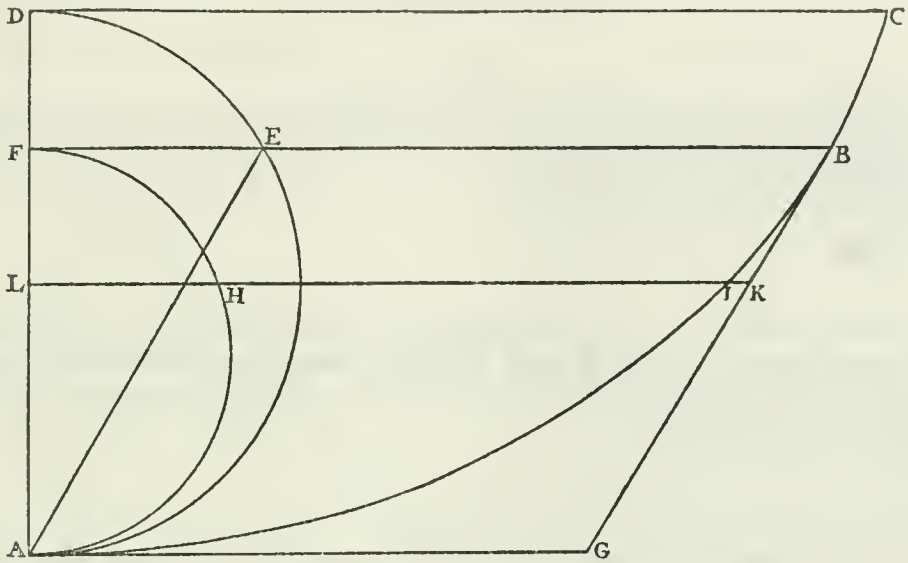
[1]) Comparez sur cette expression d'Euclide la p. 396 du T. XVI.

arcum BA, erit quoque ad tempus descensus per axem DA, ut semicirculi circumferentia FHA ad diametrum FA. quod erat demonstrandum. De motu in Cycloide.

Quod si tota cycloidis cavitas perfecta ponatur, constat mobile, postquam per arcum (*p.* 58). BA descenderit, inde continuato motu per alterum ipsi æqualem arcum ascensurum *, atque in eo tantundem temporis atque descendendo consumpturum *. Deinde rursus per A ad B perventurum, ac singularum ejusmodi reciprocationum, in magnis parvisve cycloidis arcubus peractarum, tempora fore ad tempus casus perpendicularis per axem DA, sicut circumferentia circuli tota ad diametrum suam.

* Prop. 9. huj.
* Prop. 11. huj.

[Fig. 51.]



PROPOSITIO XXVI.

Iisdem positis, si ducatur insuper recta horizontalis HI [Fig. 51] *quæ arcum* BA *secet in* I, *circumferentiam vero* FHA *in* H: *dico tempus per arcum* BI, *ad tempus per arcum* IA *post* BI, *eam rationem habere quam arcus circumferentiæ* FH *ad* HA.

Occurrat enim recta HI tangenti BG in K, axi DA in L. Est itaque tempus per arcum BA, ad tempus motus æquabilis per BG cum celeritate dimidia ex BG, sicut arcus FHA ad rectam FA *. Tempus autem dicti motus æquabilis per BG, est ad tempus motus æquabilis per BK, cum eadem celeritate dimidia ex BG, sicut BG ad BK longitudine, hoc est, sicut FA ad FL. Et rursus tempus motus æquabilis, cum dicta celeritate, per BK, ad tempus per arcum BI, sicut FL ad arcum FH *. Igitur ex æquo [1]) erit tempus per arcum BA ad tempus per BI, ut arcus FHA ad FH. Et dividendo, & convertendo, tempus per BI, ad tempus per IA post BI, ut arcus FH ad HA. quod erat demonstrandum.

* Prop. 24. huj.
* Prop. 24. huj.

TROISIÈME PARTIE
DE L'HORLOGE À PENDULE.

De l'Evolution et de la Dimenſion des Lignes courbes.

DEFINITIONS.

I.

Appelons ligne courbée vers un ſeul côté une ligne que toutes ſes tangentes touchent du même côté. Que ſi la ligne a quelques parties droites, les prolongements de celles-ci ſeront conſidérés comme des tangentes.

II.

Lorſque deux lignes de cette eſpèce émanent d'un même point et que la convexité de l'une eſt tournée vers la concavité de l'autre, comme ſont placées dans la figure ci-jointe [Fig. 52] *les courbes* ABC *et* ADE, *elles ſeront dites concaves l'une et l'autre vers le même côté.*

III.

Si l'on conſidère un fil, ou une ligne flexible, enroulé ſur une ligne courbée vers un ſeul côté, et que, une extrémité du fil demeurant attachée à la courbe, l'autre en eſt écartée de telle manière que la partie libre du fil reſte toujours tendue, il eſt manifeſte qu'une certaine autre courbe eſt décrite par cette extrémité du fil. Donnons-lui le nom de Développante.

IV.

Et que celle ſur laquelle le fil eſt enroulé porte le nom de Développée. Dans la figure qui précède [Fig. 52] ABC *eſt la développée et* ADE *la développante correspondante de ſorte que, lorſque l'extrémité du fil paſſe de* A *en* D, *la partie tendue du fil eſt la droite* DB, *le reſte* BC *étant encore enroulé ſur la courbe* ABC. *Il eſt manifeſte que* DB *touche la développée en* B.

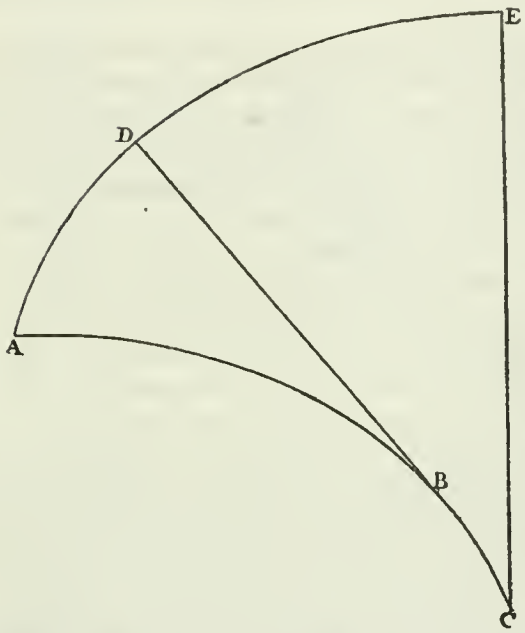
HOROLOGII OSCILLATORII

Pars Tertia.

De linearum curvarum evolutione & dimensione.

DEFINITIONES.

[Fig. 52.]



I.

Linea in unam partem inflexa vocetur quam rectæ omnes tangentes ab eadem parte contingunt. Si autem portiones quasdam rectas lineas habuerit, hæ ipsæ productæ pro tangentibus habentur.

II.

Cum autem duæ hujusmodi lineæ ab eodem puncto egrediuntur, quarum convexitas unius obversa sit ad cavitatem alterius, quales sunt in figura adscripta [Fig. 52] *curvæ* ABC, ADE, *ambæ in eandem partem cavæ dicantur.*

III.

Si lineæ, in unam partem cavæ, filum seu linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente una fili extremitate illi | affixa, altera extremitas abducatur, ita ut pars ea quæ soluta est semper ex- (p. 60). *tensa maneat; manifestum est curvam quandam aliam hac fili extremitate describi. Vocetur autem ea, Descripta ex evolutione.*

IV.

Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta. In figura superiori [Fig. 52], ABC *est evoluta*, ADE *descripta ex evolutione* ABC, *ut nempe cum extremitas fili ex* A *venit in* D, *pars fili extensa sit* DB *recta, reliqua parte* BC *adhuc applicata curvæ* ABC. *Manifestum est autem* DB *tangere evolutam in* B.

De l'évolution des courbes.

PROPOSITION I[1]).

Toute tangente à la développée rencontrera la développante à angles droits.

Soit AB [Fig. 53] la développée et AH la ligne décrite par ſon évolution. Puiſſe la droite FDC, tangente en D à la courbe AD, couper en C la courbe ACH. Je dis qu'il la coupe à angles droits, en d'autres termes que ſi l'on mène la droite CE perpendiculairement à CD elle touche la courbe ACH en C. En effet, puiſque DC touche la développée en D, il apparaît qu'elle repréſente la poſition du fil au moment où ſon extrémité eſt parvenue juſqu'au point C; et ſi nous réuſſiſſons à démontrer que le fil, dans la deſcription entière de la courbe ACH, n'atteint nulle part la droite CE excepté au point C, il ſera manifeſte que la droite CE touche la courbe ACH en ce point.

Prenons ſur AC un point H quelconque différent de C et conſidérons d'abord le cas où ce point eſt plus éloigné de l'origine de la développante que le point C. Suppoſons que la partie libre du fil ſoit HG lorsqu'il eſt parvenu avec ſon extrémité juſqu'au point H. HG touche donc la ligne AB en G. Et comme dans la deſcription de la partie CH de la courbe, l'arc DG a été développé, CD prolongée du côté D coupera HG, p. e. en F. Appelons E le point de rencontre de GH avec la droite CE. Puiſque l'enſemble des deux lignes CF et FG eſt alors plus grand que DG, que cette dernière ſoit courbée ou droite, il en réſultera, lorſqu'on ajoute de part et d'autre la droite DC, que la ſomme des droites CF et FG eſt plus grande que celle de la droite CD et de DG. Mais à cauſe de l'évolution du fil, il apparaît que la droite HG eſt égale à la ſomme de la droite CD et de DG. Par conſéquent la ſomme CF + FG ſera auſſi plus grande que la droite HG; et en retranchant la partie commune FG, on trouve que CF eſt plus grande que HF. Or, FE > FC, parce que l'angle C du triangle FCE eſt droit. FE eſt donc a fortiori plus grande que FH. D'où il reſſort que du moins de ce côté-là du point C l'extrémité du fil n'arrive pas jusqu'à la droite CE.

Suppoſons maintenant le point H plus près de l'origine de la développante que le point C [Fig. 54] et ſoit HG la poſition du fil au moment où ſon extrémité eſt en H. Tirons les droites DG et DH dont la dernière rencontre la droite CE en E. Il eſt clair que la droite DG ne peut ſe trouver ſur le prolongement de HG et que HGD ſera par conſéquent un triangle. Or, comme la droite DG eſt ou bien plus petite que DKG ou bien ſon égale, ſavoir dans le cas ou la partie DG de la développée eſt droite, on trouvera, en ajoutant GH de part et d'autre, que la ſomme des droites DG et

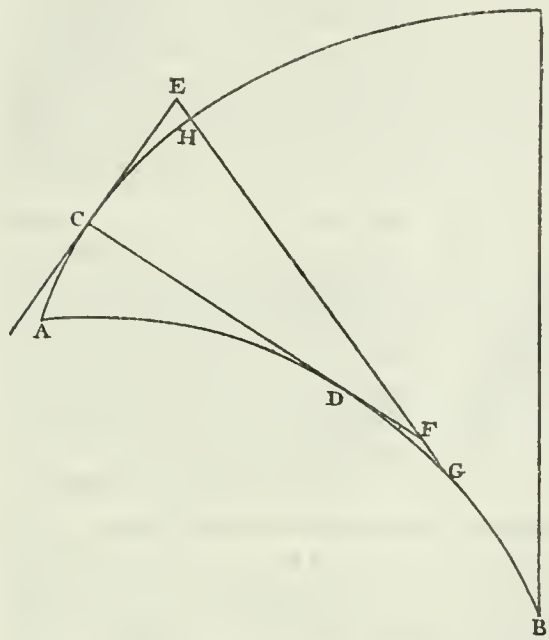
[1]) Comparez sur cette Proposition et les trois suivantes les Théorèmes de 1659 des p. 398 et suiv. du T. XIV.

PROPOSITIO I[1]).

De linearum curvarum evolutione.

Recta omnis, quæ evolutam tangit, occurret lineæ ex evolutione descriptæ ad angulos rectos.

[Fig. 53.]



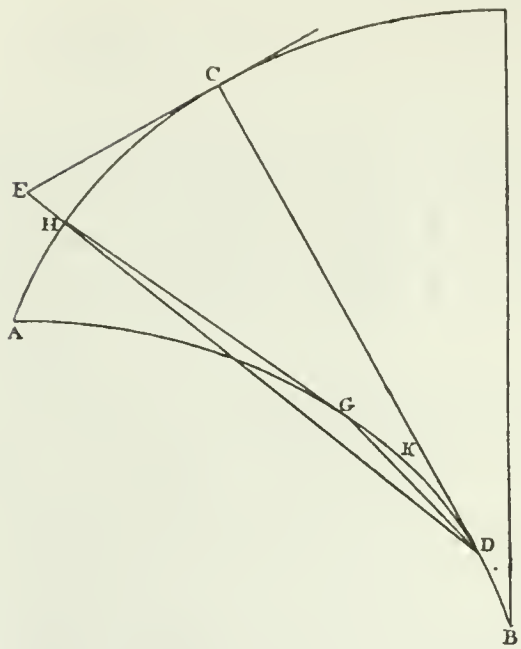
Sit AB [Fig. 53] evoluta, AH vero quæ ex evolutione illius descripta est. Recta autem FDC, tangens curvam AD in D, occurrat in C curvæ ACH. Dico ei occurrere ad angulos rectos: hoc est, si ducatur CE recta perpendicularis CD, dico eam in C tangere curvam ACH. Quia enim DC tangit evolutam in D, apparet ipsam referre positionem fili tunc cum ejus extremitas pervenit in C. Quod si igitur ostenderimus filum, in tota reliqua descriptione curvæ ACH, nusquam pertingere ad rectam CE præterquam in C puncto, manifestum erit rectam CE (*p.* 61). ibidem curvam ACH contingere.

Sumatur punctum aliquod in AC præter C, quod sit H, sitque primo remotius à principio evolutionis A quam punctum C, & intelligatur pars libera esse HG, cum extremitate sua ad H pervenit. Tangit ergo HG lineam AB in G. Cumque interea dum describitur pars curvæ CH, evolutus sit arcus DG, occurret CD à parte D producta ipsi HG, ut in F. Ponatur autem GH occurrere rectæ CE in E. Quia igitur duæ simul DF, FG, majores sunt quam DG, sive curva ea fuerit sive recta: fiet addendo utrinque rectam DC, ut rectæ CF, FG simul majores sint recta CD & ipsa DG. Sed propter evolutionem, apparet utrisque simul, rectæ CD, & lineæ DG, æquari rectam HG. Ergo duæ simul CF, FG majores quoque erunt recta HG; & ablata communi FG, erit CF major quam HF. Sed FE major est quam FC, quia angulus C trianguli FCE est rectus. Ergo FE omnino major quam FH. Unde apparet, ab hac quidem parte puncti C, fili extremitatem non pertingere ad rectam CE.

Sit jam punctum H propinquius principio evolutionis A quam punctum C [Fig. 54], sitque fili positio HG, tunc cum ejus extremitas esset in H, & ducantur rectæ DG, DH, quarum hæc occurrat rectæ CE in E: apparet autem DG rectam non posse esse in directum ipsi HG, adeoque HGD fore triangulum. Jam quia recta DG vel minor est quam DKG, vel eadem, si nempe evolutæ pars DG recta sit; additâ utrique GH,

De l'évolution des courbes.

[Fig. 54.]



GH eſt inférieure ou égale à DKG + GH ou bien à la droite DC qui eſt égale à cette dernière ſomme. Mais la droite DH eſt plus petite que la ſomme des droites DG et GH. DH eſt donc à plus forte raiſon inférieure à la droite DC. Or, DE > DC, puisque dans le triangle DCE l'angle C eſt droit. Par conſéquent DH eſt beaucoup plus petite que DE. Le point H. c.à.d. l'extrémité du fil GH, eſt donc ſitué à l'intérieur de l'angle DCE. D'où il appert qu'entre A et C auſſi l'extrémité du fil n'arrive nulle part juſqu'à la droite CE. Partant CE touche la courbe AC en C; c'eſt pourquoi DC, à laquelle CE eſt perpendiculaire par conſtruction, coupe la courbe à angles droits. C. Q. F. D.

Par là il eſt encore manifeſte que AHC eſt courbée vers un ſeul côté et qu'elle eſt concave vers le même côté que AGB, par l'évolution de laquelle elle a été décrite. Car toutes les tangentes à la ligne AHC tombent en dehors de l'eſpace DGAHC; mais toutes les tangentes à la ligne AGD tombent dans lui. D'où il eſt évident que la concavité AHC regarde la convexité AGD.

PROPOSITION II.

Toute ligne courbe terminée, courbée vers un ſeul côté, telle que ABD [Fig. 55] *peut être diviſée en un ſi grand nombre de parties qui ſi l'on tire les cordes qui ſouſtendent chacun des arcs, telles que* AB, BC *et* CD, *et enſuite depuis chacun des points de diviſion et auſſi depuis l'extrémité de la courbe les tangentes* AN, BO, CP, *chacune juſqu'à la normale à la courbe au point de diviſion ſuivant* (BN, CO, DP *ſont des normales*), *que chaque corde, dis-je, aura à la normale correſpondante* (AB *à* BN, BC *à* CO, CD *à* DP) *un rapport ſupérieur à tout rapport arbitrairement donné.*

En effet, ſoit donné le rapport EF : FG [Fig. 55] de deux droites formant les côtés d'un angle droit F et tirons la droite GEH.

Suppoſons d'abord la courbe ABD diviſée par les points B, C en des parties ſi petites que les tangentes à la courbe en deux de ces points qui ſe ſuivent ſe coupent l'une l'autre ſuivant des angles dont chacun eſt ſupérieur à l'angle FEH, tels que ∠ AKB, ∠ BLC et ∠ CMD. La poſſibilité d'une pareille diviſion eſt trop évidente

erunt rectæ DG, GH simul minores vel | æquales duabus istis, scilicet DKG & GH, (*p.* 62). sive his æquali rectæ DC. Duabus autem rectis DG, GH minor est recta DH. Ergo hæc minor utique erit rectâ DC. Sed DE major est quam DC, quia in triangulo DCE angulus C est rectus. Ergo DH multo minor quam DE. Situm est ergo punctum H, hoc est extremitas fili GH, intra angulum DCE. Unde apparet neque inter A & C usquam illam pertingere ad rectam CE. Ergo CE tangit curvam AC in C; ac proinde DC, cui CE ducta est perpendicularis, occurrit curvæ ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

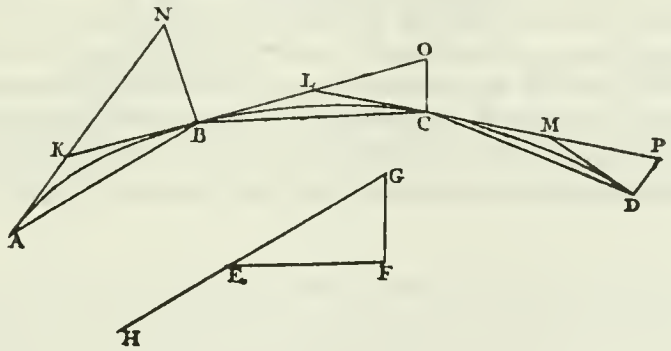
DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Hinc etiam manifestum est curvam AHC in partem unam inflexam esse, & in eandem partem cavam ac ipsa AGB, cujus evolutione descripta est. Omnes enim tangentes lineæ AHC, cadunt extra spatium DGAHC: omnes vero tangentes lineæ AGD, intra dictum spatium. unde liquet cavitatem AHC respicere convexitatem AGD.

PROPOSITIO II.

Omnis curva linea terminata, in unam partem cava, ut ABD [Fig. 55], *potest in tot partes dividi, ut si singulis partibus subtensæ rectæ ducantur, velut* AB, BC, CD; *& à singulis item divisionis punctis, ipsaque curvæ extremitate rectæ ducantur curvam tangentes, ut* AN, BO, CP, *quæ occurrant iis, quæ in proxime sequentibus divisionis punctis curvæ ad angulos rectos insistunt, quales sunt lineæ* BN, CO, DP; *ut inquam subtensa quæque habeat ad sibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut* AB *ad* BN, BC *ad* CO, CD *ad* DP, *rationem majorem quavis ratione proposita.*

[Fig. 55.]



Sit enim data [Fig. 55] ratio lineæ EF ad FG, quæ recto angulo ad F jungantur, & ducatur recta GEH.

Intelligatur primo curva ABD in partes tam exiguas secta punctis B, C, ut tangentes quæ ad bina quæque inter se proxima puncta curvam contingunt, occurrant sibi mutuo secundum angulos qui singuli majores sint angulo FEH; quales sunt anguli AKB, BLC, CMD. quod quidem fieri posse evidentius est quam ut demonstratione

De l'évolution des courbes.

pour exiger une démonſtration. Les cordes AB, BC et CD ayant été tirées et les normales à la courbe BN, CO, DP ayant été érigées, leſquelles rencontrent les prolongements de AK, de BL et de CM en N, O et P, je dis que chacun des rapports de deux droites AB : BN, BC : CO et CD : CP eſt ſupérieur au rapport EF : FG.

Car, puiſque ∠ AKB > ∠ HEF, ∠ NKB, ſupplément du premier, ſera plus petit que ∠ GEF. Or, l'angle B du triangle KBN eſt droit, comme F du triangle EFG. Par conſéquent KB : BN > EF : FG. Mais AB > KB, puiſque l'angle K du triangle AKB eſt obtus; en effet, il eſt plus grand que l'angle HEF lequel eſt obtus par conſtruction. Le rapport AB : BN ſera donc plus grand que le rapport KB : BN et à plus forte raiſon que le rapport EF : FG. On démontrera de la même manière que les rapports BC : CO et CD : DP ſont l'un et l'autre plus grands que le rapport EF : FG. La propoſition eſt donc démontrée.

PROPOSITION III.

Deux lignes courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté ne peuvent émaner d'un ſeul point dans une telle poſition l'une par rapport à l'autre que toute droite normale à l'une ſoit auſſi normale à l'autre.

En effet, ſoient ACE et AGK poſſédant l'extrémité commune A, ſi cela eſt poſſible, des lignes courbes de cette eſpèce [Fig. 56] et ſoit KE une normale en un point quelconque K de la courbe extérieure à cette dernière: étant normale à cette courbe KE le ſera donc auſſi à la courbe ACE.

Nous pouvons prendre maintenant quelque droite Q plus grande que la courbe KGA. Suppoſons KGA diviſée par les points H, G, F, comme il a été dit dans la propoſition précédente, en un ſi grand nombre de parties que chacune des cordes KH, HG, GF, FA ait à la normale adjacente HM, GN, FO ou AP un rapport ſupérieur à celui de la ligne Q à la droite KE. L'enſemble des cordes nommées aura donc auſſi à la ſomme de toutes les normales un rapport ſupérieur à Q : KE. Prolongeons maintenant ces mêmes normales et puiſſent-elles couper la courbe ACE en D,

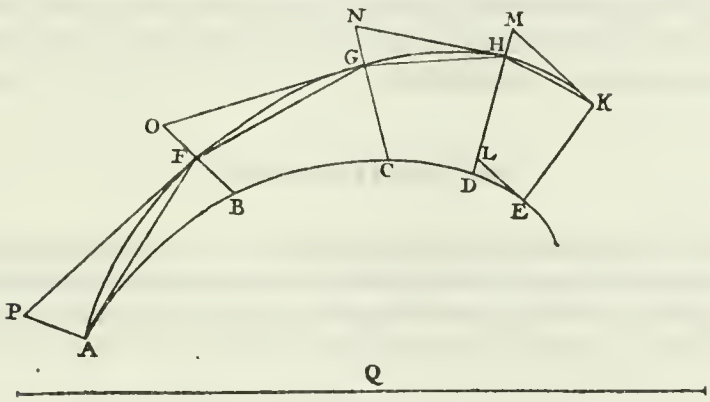
indigeat. Ductis jam ſubtenſis AB, BC, CD, & erectis curvæ perpendicularibus BN, CO, DP, quæ occurrant productis AK, BL, CM, in N, O, P: dico rationes ſingulas rectarum, AB ad BN, BC ad CO, CD ad DP, majores eſſe ratione EF ad FG. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quia enim angulus AKB major eſt angulo HEF, erit reſiduus illius ad duos rectos, nimirum angulus NKB, minor angulo GEF. Angulus autem B trianguli KBN eſt rectus, ſicut & angulus F in triangulo EFG. Ergo major erit ratio KB ad BN quam EF ad FG. Sed AB major eſt quam KB, quoniam angulus K in triangulo AKB eſt obtuſus, eſt enim major angulo HEF qui eſt obtuſus ex conſtructione. Ergo ratio AB ad BN major erit ratione KB ad BN, ac proinde omnino major ratione EF ad FG. Eodem modo & ratio BC ad CO, & CD ad DP, major oſtendetur ratione EF ad FG. Itaque conſtat propoſitum. (*p.* 63).

PROPOSITIO III.

Duæ curvæ in unam partem inflexæ & in easdem partes cavæ ex eodem puncto egredi nequeunt, ita ad ſe invicem comparatæ, ut recta omnis quæ alteri earum ad angulos rectos occurrit, ſimiliter occurrat & reliquæ.

[Fig. 56.]



Sint enim, ſi fieri poteſt, hujuſmodi lineæ curvæ ACE, AGK, communem terminum habentes A [Fig. 56], & ſumpto in exteriore illarum puncto quolibet K, ſit inde educta KE recta, curvæ AGK occurrens ad angulos rectos, ac proinde etiam curvæ ACE.

Poteſt jam recta quædam ſumi major curva KGA, quæ ſit Q. Diviſa autem intelligatur ipſa KGA, ut in propoſitione antecedenti dictum fuit, in tot partes punctis HGF, ut ſubtenſæ ſingulæ KH, HG, GF, FA, ad perpendiculares curvæ ſibi contiguas HM, GN, FO, AP majorem rationem habeant quam linea Q ad rectam KE. Itaque & omnes ſimul dictæ ſubtenſæ ad omnes dictas perpendiculares majorem habebunt rationem quam Q ad KE. Producantur autem perpendiculares eædem & occur- (*p.* 64).

De l'évolution des courbes.

C, et B, normalement par hypothèſe. On aura maintenant: KE < MD. En effet, EL, perpendiculaire à KE, ſera tangente à la courbe ACE, puiſque KE lui eſt normale; EL coupera donc néceſſairement la droite MD entre D et M. Par conſéquent KE, qui eſt la plus courte de toutes les lignes compriſes entre les parallèles EL et KM, ſera plus petite que ML et à plus forte raiſon que MD. On démontrera de la même manière que HD < NC, GC < OB, et FB < PA. Comme on a donc PA > FB, la ſomme PA + OF ſera ſupérieure à OB. Pareillement, puiſque OB > GC, la ſomme OB + NG ſera plus grande que NC. Mais la ſomme PA + OF était ſupérieure à OB. Par conſéquent la ſomme des trois termes PA, OF et NG ſera containement plus grande que NC. Derechef, puiſque NC > HD, la ſomme NC + MH ſera plus grande que MD. Partant, ſi l'on prend au lieu de NC la ſomme des trois termes PA, OF, NG qui lui eſt ſupérieure, la ſomme des quatre grandeurs PA, OF, NG et MH ſera a-fortiori plus grande que MD: et par conſéquent cette même ſomme ſera auſſi certainement plus grande que la droite KE, puiſque MD ſurpaſſait KE en longueur. Or, nous avons dit que la ſomme des ſouſtangentes AF + FG + GH + HK a à celle de toutes les normales PA, OF, NG et MH un rapport ſupérieur à celui de la ligne Q à KE. Par conſéquent la ſomme de toutes les cordes ſera plus grande que la droite Q. Mais cette dernière avait été priſe plus grande que la courbe AGK. La ſomme des cordes AF + FG + CK + HK ſera donc plus grande que la courbe AGK aux arcs de laquelle ces cordes correſpondent; ce qui eſt abſurde puiſque chacune des cordes eſt plus petite que l'arc correſpondant.

PROPOSITION IV.

Si d'un même point partent deux lignes courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté, et ainſi ſituées l'une par rapport à l'autre que toutes les tangentes à l'une d'elles coupent l'autre à angles droits, cette deuxième ſera la développante de la première à partir du point commun.

Soient données les lignes ABC et ADE [Fig. 57] courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté, poſſédant l'extrémité commune A. Puiſſent toutes les tangentes à la ligne ABC, telles que BD et CE, couper la ligne ADE normalement. Je dis que ADE eſt décrite par l'évolution de ABC à partir de l'extrémité A.

En effet, ſuppoſons, ſi cela eſt poſſible, que par la dite évolution ſoit décrite une certaine autre courbe AFG. Par conſéquent des lignes droites quelconques, tangentes à la développée ABC, telles que BD et CE, couperont cette courbe AFG à angles droits *, p. e. en F et G. Mais par hypothèſe ces mêmes tangentes ſont auſſi normales à la ligne ADE. Or, nous avons affaire à des courbes ADE et AFG, ſe terminant au même point A, courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même

* Prop. I. de cette Partie.

rant curvæ ACE in D, C, B, nimirum ad angulos rectos ex hypothesi. Erit jam KE minor quam MD. Etenim, ducta EL ipsi KE perpendiculari, quoniam KE occurrit lineæ curvæ ECA ad angulos rectos, tanget EL curvam ACE, occurretque necessario rectæ MD interD & M. Unde cum KE sit brevissima omnium quæ cadunt inter parallelas EL, KM, erit ea minor quam ML, ac proinde minor quoque omnino quam MD. Eodem modo & HD minor ostendetur quam NC, & GC minor quam OB, & FB minor quam PA. Cum sit ergo PA major quam FB, erunt duæ simul PA, OF majores quam OB. Item quum OB sit major quam GC, erunt duæ simul OB, NG, majores quam NC. Sed duæ PA, OF majores erant quam OB. Itaque tres simul PA, OF, NG omnino majores erunt quam NC. Rursus, quia NC major quam HD, erunt duæ simul NC, MH majores quam MD. Unde, si loco NC sumantur tres hæ ipsa majores PA, OF, NG, erunt omnino hæ quatuor PA, OF, NG, MH majores quam MD. ac proinde eædem quoque omnino majores recta KE, quia ipsa MD major erat quam KE. Diximus autem subtensas omnes AF, FG, GH, HK majorem rationem habere ad omnes perpendiculares PA, OF, NG, MH, quam linea Q ad KE. Ergo cum dictis perpendicularibus minor etiam sit KE, habebunt dictæ subtensæ ad KE omnino majorem rationem quam Q ad KE. Ergo subtensæ simul sumptæ majores erunt rectâ Q. Hæc autem ipsa curvâ AGK major sumpta fuit. Ergo subtensæ AF, FG, GH, HK simul majores erunt curva AGK cujus partibus subtenduntur; quod est absurdum, cum singulæ suis arcubus sint minores. Non igitur poterunt esse duæ curvæ lineæ quæ quemadmodum dictum fuit sese habeant. quod erat demonstrandum.

De linearum curvarum evolutione.

PROPOSITIO IV.

Si ab eodem puncto duæ lineæ exeant in partem unam inflexæ, & in eandem partem cavæ, ita vero mutuo com|paratæ ut rectæ omnes, quæ alteram earum contingunt, alteri occurrant ad angulos rectos; posterior hæc prioris evolutione, à puncto communi cœpta, describetur. (p. 65).

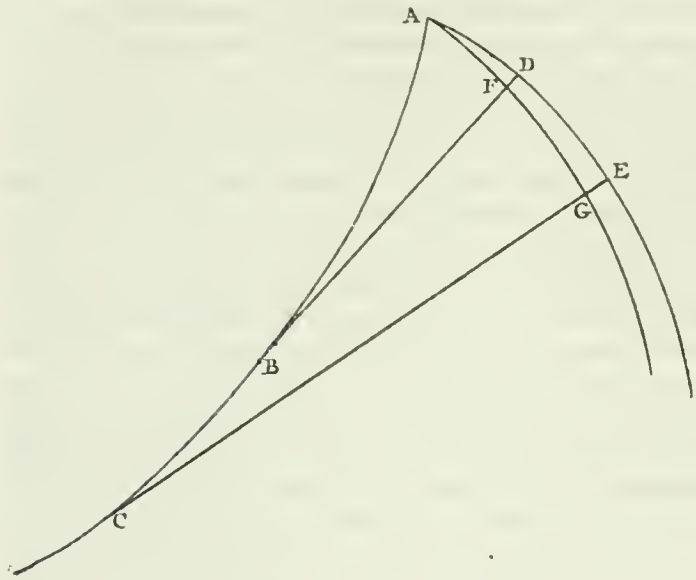
Sunto lineæ ABC, ADE [Fig. 57], in partem unam inflexæ, & quarum utraque in easdem partes cava existat, habeantque communem terminum A punctum. Omnes autem rectæ tangentes lineam ABC, velut BD, CE, occurrant lineæ ADE ad angulos rectos. Dico evolutione ipsius ABC, à termino A incepta, describi ADE.

Si enim fieri potest, describatur dicta evolutione alia quædam curva AFG. Ergo lineæ rectæ quælibet, evolutam ABC tangentes, ut BD, CE, occurrent ipsi AFG ad angulos rectos *, puta in F & G. Sed eædem tangentes etiam ad rectos angulos occurrere ponuntur lineæ ADE. Sunt igitur lineæ curvæ ADE, AFG, eodem puncto A terminatæ, inque partem unam flexæ, & ambæ in eandem partem cavæ, quippe utra-

* Prop. 1. huj.

De l'évolution des courbes.

[Fig. 57.]



côté, puiſqu'elles ſont concaves vers le même côté que ABC; car ceci eſt vrai de la ligne ADE par hypothèſe et de la ligne AFG d'après la première propoſition de cette Partie. De plus toutes les normales à l'une d'elles ſont auſſi normales à l'autre. Mais il a été démontré plus haut que ceci eſt impoſſible *. Il eſt donc établi que ADE elle-même ſera décrite par l'évolution de la ligne ABC. C. Q. F. D.

* Prop. 3. de cette Partie.

PROPOSITION V.

Lorſqu'une droite touche une cycloïde en ſon ſommet et qu'on conſtruit ſur cette droite priſe pour baſe une autre cycloïde, ſemblable et égale à la première, à partir du point coïncidant avec le ſommet nommé, une tangente quelconque à la cycloïde inférieure ſera normale à l'arc cycloïdal ſupérieur [1]).

Suppoſons que la droite AG [Fig. 58] touche la cycloïde en ſon ſommet A et que ſur cette droite priſe pour baſe une autre cycloïde AEF à ſommet F ſoit conſtruite. Soit BK une tangente à la cycloïde ABC. Je dis que cette tangente, prolongée juſqu'à la cycloïde AEF, la rencontrera à angles droits.

En effet, décrivons autour de AD, axe de la cycloïde ABC, le cercle générateur AHD qui coupe BH, parallèle à la baſe, en H, et tirons la droite HA. Il s'enſuit, puiſque BK touche la cycloïde en B, qu'elle eſt parallèle à la droite HA *. Par conſéquent AHBK eſt un parallélogramme et AK eſt égale à HB, c.à.d. à l'arc AH *. Décrivons maintenant le cercle KM égal au cercle générateur AHD, touchant la baſe AG en K et coupant la droite BK prolongée en E. Comme BKE eſt parallèle à

* Propos. 15. de la 2ième Partie.
* Propos. 14. de la 2ième Partie.

[1]) Comparez sur cette Proposition et la suivante les p. 404—405 du T. XIV et 142—145 du T. XVII.

que in eandem atque ipſa ABC; nam de linea ADE conſtat ex hypotheſi, de AFG vero ex propoſitione prima hujus; & omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos, etiam alteri ſimiliter occurrunt. quod quidem fieri non poſſe antea oſtenſum eſt *. Quare conſtat ipſam ADE deſcriptum iri evolutione lineæ ABC. quod erat demonſtrandum. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE. * Prop. 3. huj.

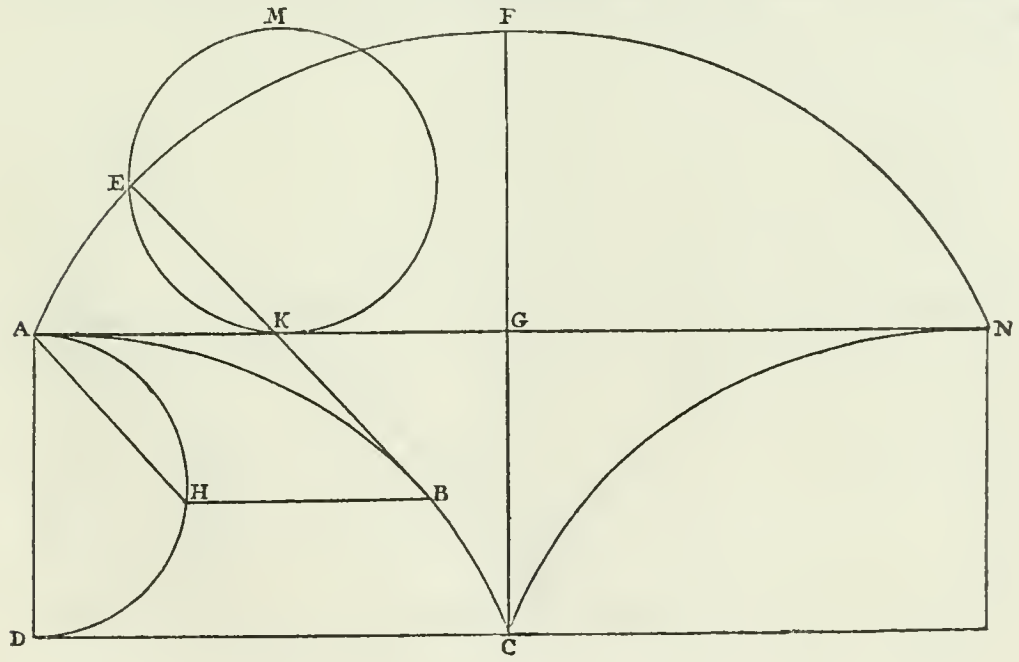
PROPOSITIO V. (*p. 66*).

Si Cycloïdem recta linea in vertice contingat, ſuper qua, tanquam baſi, alia cyclois priori ſimilis & æqualis conſtituatur, initium ſumens à puncto dicti verticis; recta quælibet inferiorem cycloidem tangens, occurret ſuperioris portioni, ſibi ſuperpoſitæ, ad angulos rectos [1]).

Tangat cycloidem ABC in vertice A recta AG [Fig. 58], ſuper qua, tanquam baſi, ſimilis aliqua cyclois conſtituta ſit AEF, cujus vertex F. Cycloidem autem ABC tangat recta BK in B. Dico eam productam occurrere cycloidi AEF ad angulos rectos.

Deſcribatur enim circa AD, axem cycloidis ABC, circulus genitor AHD, cui occurrat BH, baſi parallela, in H, & jungatur HA. Quia ergo BK tangit cycloidem in B, conſtat eam parallelam eſſe rectæ HA *. Itaque AHBK parallelogrammum eſt, ac proinde AK æqualis HB, hoc eſt, arcui AH *. Sit porro jam deſcriptus circulus KM, genitori circulo, hoc eſt ipſi AHD, æqualis, qui tangat baſin AG in K, rectam vero * Propos. 15. partis 2. * Propos. 14. partis 2.

[Fig. 58.]



De l'évolution des courbes.

AH et par conſéquent EKA = KAH, il eſt manifeſte que le prolongement de BK coupe de la circonférence KM un arc égal à celui que la droite AH coupe de la circonférence AHD. Par conſéquent l'arc KE eſt égal à l'arc AH, c.à.d. à la droite HB et à la droite KA. Mais de cette égalité il réſulte, d'après une propriété de la cycloïde, puisque le cercle générateur MK a touché la règle en K, que le point décrivant la cycloïde à paſſé par E. La droite KE rencontre donc la cycloïde en E à angles droits *. Or, KE n'eſt autre choſe que le prolongement de BK. Il eſt donc évident que BK prolongée juſqu'à la cycloïde lui eſt normale. C. Q. F. D.

* Propos. 15. de la 2ième Partie.

PROPOSITION VI.

Par l'évolution, à partir du ſommet, d'une demi-cycloïde, une autre demi-cycloïde eſt décrite, égale et ſemblable à la première, dont la baſe coïncide avec la droite qui touche la cycloïde développée en ſon ſommet.

Soit donnée une demi-cycloïde ABC [Fig. 58] à laquelle ſoit impoſée une autre demi-cycloïde ſemblable AEF, comme dans la propoſition précédente. Je dis que lorſque la ligne flexible appliquée à la demi-cycloïde ABC eſt développée à partir du point A, elle décrit de ſon extrémité la demi-cycloïde AEF. En effet, puiſque les demi-cycloïdes ABC et AEF, courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté, de plus ſituées de ſorte que toutes les tangentes de la demi-cycloïde ABC coupent la demi-cycloïde AEF à angles droits, il s'enſuit que cette dernière eſt décrite par l'évolution de la première à partir du point A *. C. Q. F. D.

* Prop. 4. de cette Partie.

BK productam fecet in puncto E. Quia ergo ipſi AH parallela eſt BKE, ac proinde angulus EKA æqualis KAH, manifeſtum eſt BK productam abſcindere à circulo KM arcum æqualem ei quem à circulo AHD abſcindit recta AH. Itaque arcus KE æqualis eſt arcui AH, hoc eſt rectæ HB, hoc eſt rectæ KA. Hinc | vero ſequitur, ex cycloidis proprietate, cum circulus genitor MK tangebat regulam in K, punctum deſcribens fuiſſe in E. Itaque recta KE occurrit cycloidi in E ad angulos rectos *. Eſt autem KE ipſa BK producta. Ergo patet productam BK occurrere cycloidi ad angulos rectos. quod erat demonſtrandum.

De linearum curvarum evolutione.

(p. 67.)

* Propos 15. partis 2.

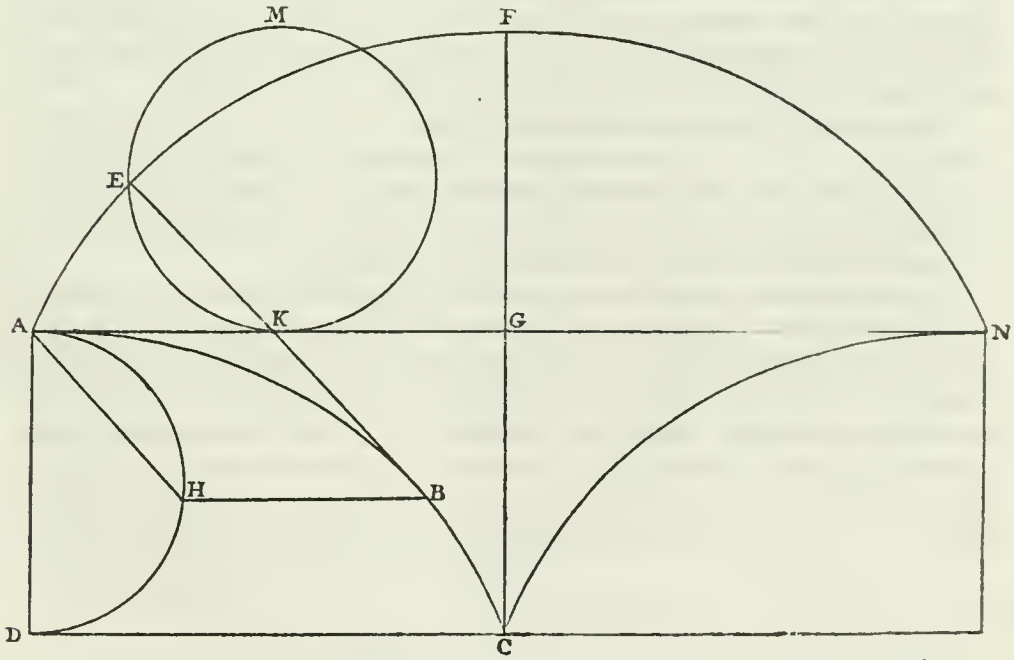
PROPOSITIO VI.

Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia ſemicyclois deſcribitur evolutæ æqualis & ſimilis, cujus baſis eſt in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.

Sit ſemicyclois ABC, cui ſuperimpoſita ſit alia ſimilis AEF, quemadmodum in propoſitione præcedenti [Fig. 58]. Dico ſi linea flexilis, circa ſemicycloidem ABC applicata, evolvatur, incipiendo ab A, eam deſcribere extremitate ſua ipſam ſemicycloidem AEF. Quia enim ex puncto A egrediuntur ſemicycloides ABC, AEF, in unam partem inflexæ, & ambæ in eandem cavæ, ac præterea ita comparatæ, ut omnes tangentes ſemicycloidis ABC occurrant ſemicycloidi AEF ad angulos rectos, ſequitur hanc evolutione illius, à termino A incepta, deſcribi *. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 4. huj.

[Fig. 58.]



De l'évolution des courbes.

Et il apparaît que si nous construisons une demi-cycloïde CN symétrique avec ABC par rapport à la droite CG, une autre demi-cycloïde FN sera décrite par l'extrémité du fil, soit par l'évolution de la courbe CN soit lorsque le fil, déjà tendu suivant CF, est enroulé sur elle; et que cette demi-cycloïde formera avec la précédente, AEF, une cycloïde entière.

Par ces considérations, et par la Prop. XXV de la Chute des Corps pesants, la vérité de ce que nous avons dit plus haut dans la Construction de l'Horloge sur le mouvement uniforme du pendule est présentement manifeste. En effet, il est clair que le pendule, suspendu et mis en mouvement entre une paire de lames courbées en forme de demi-cycloïde, décrit par son mouvement un arc de cycloïde et que par conséquent ses oscillations, quelle que soit leur amplitude, sont exécutées dans des temps égaux. Car il n'est d'aucune importance que le mobile parcoure une surface courbée en cycloïde ou bien qu'étant attaché à un fil il décrive cette même ligne en l'air, attendu que dans l'un et l'autre cas il est également libre et a la même inclinaison au mouvement dans tous les points de la courbe.

PROPOSITION VII.

La cycloïde est quadruple de son axe, en d'autres termes du diamètre du cercle générateur.

En effet d'après la figure précédente reproduite ici [Fig. 58] il apparaît que la demi-cycloïde ABC, égale au fil enroulé sur elle, est double de son axe AD et que par conséquent la cycloïde entière est quadruple de son axe, puisqu'après l'évolution de toute la demi-cycloïde ABC, le fil coïncide avec la droite CF qui est double de AD, attendu que les axes des cycloïdes ABC et AEF sont égaux.

Il apparaît aussi que la tangente BE qui n'est autre que la partie tendue du fil d'abord appliquée à l'arc BA, est égale en longueur à ce dernier. Or, BE est le double de BK, ou de AH, puisqu'il a été démontré dans la Proposition V que KE = AH. L'arc cycloïdal AB sera donc le double de la droite AH ou BK, BH étant parallèle à la base de la cycloïde, et cela quel que soit le point B choisi sur elle.

Le grand géomètre anglais Christophe Wren a le premier trouvé cette mesure de la cycloïde [1]), mais d'une tout autre manière, et il a ensuite confirmé sa proposition par une démonstration élégante qui a été publiée dans le livre sur la cycloïde de Monsieur John Wallis [2]). Il existe en outre sur cette ligne beaucoup de fort belles inventions des mathématiciens de nos jours, auxquelles ont surtout donné occasion certains problèmes proposés par Blaise Pascal, Français qui excellait dans ces études. Celui-ci, faisant le dénombrement tant de ses inventions à lui que de celles des autres [3]) dit que Mersenne a le premier remarqué l'existence de cette ligne dans la nature [4]); que

---

[1]) Comparez la p. 203 du T. XIV et la note 3 de la p. 145 du T. XVII.

Et apparet, ſi dimidiam cycloidem, ipſi ABC gemellam, contrario ſitu ab altera parte lineæ CG diſponamus, velut CN, ejus evolutione, vel etiam dum filum, jam extenſum in CF, circa eam replicatur, alteram ſemicycloidem FN fili extremitate deſcriptum iri, quæ ſimul cum priore AEF integram conſtituat. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Atque ex his, & propoſitione 25 de deſcenſu gravium, manifeſtum jam eſt quod ſupra in Conſtructione Horologii de æquabili penduli motu dictum fuit. Patet enim perpendiculum, inter laminas binas, ſecundum ſemicycloidem inflexas, ſuſpenſum agitatumque, motu ſuo cycloidis arcum deſcribere, ac proinde æqualibus temporibus quaſlibet ejus reciprocationes abſolvi. Non refert enim utrum in ſuperficie, ſecundum cycloidem curvata, mobile feratur, an filo alligatum lineam ipſam in aëre percurrrat, cum utrobique eandem libertatem, eandemque in omnibus curvæ punctis inclinationem ad motum habeat.

PROPOSITIO VII.

Cyclois linea ſui axis, ſive diametri circuli genitoris, quadrupla eſt.

Repetita enim figura præcedenti [Fig. 58]: cum poſt totam ſemicycloidem ABC evolutam, filum occupet rectam CF; quæ dupla eſt AD, propterea quod axes cycloidum ABC, AEF ſunt æquales; apparet ſemicycloidem ipſam ABC, filo ſibi circum applicito æqualem, duplam eſſe ſui axis AD, ac totam proinde cycloidem axis ſui quadruplam. (*p.* 68).

Apparet etiam tangentem BE, quæ refert partem fili extenſam, antea curvæ parti BA applicatam, huic ipſi longitudine æquari. Eſt autem BE dupla ipſius BK, ſive AH, quoniam in propoſitione quinta oſtenſum eſt KE ipſi AH æqualem eſſe. Itaque pars cycloidis AB rectæ AH, ſive BK, dupla erit: exiſtente nimirum BH parallela baſi cycloidis: idque ubicunque in ea punctum B ſumptum fuerit.

Hanc cycloidis dimenſionem primus invenit, via tamen longe alia, eximius geometra Chriſtophorus Wren Anglus [1]), eamque deinde eleganti demonſtratione confirmavit, quæ edita eſt in libro de cycloide viri clariſſimi Ioannis Walliſij [2]). De eadem vero linea, alia quoque multa extant pulcherrima inventa noſtri temporis mathematicorum, quibus præcipuè occaſionem præbuere problemata quædam à Blaſio Paſchalio Gallo propoſita, qui in his ſtudiis præcellebat. Is cum ſua, tum aliorum inventa recenſens [3]), primum omnium Merſennum lineam hanc in rerum natura advertiſſe ait [4]). Primum

---

[2]) Voir sur cet ouvrage la note 3 de la p. 518 du T. II.

[3]) Dans son „Histoire de la Roulette" de 1658 (note 4 de la p. 350 du T. XIV). Voir aussi sa „Lettre de A. Dettonville a Monsieur Hugguens de Zulichem" de février 1659 (p. 196 du T. XIV).

[4]) C. de Waard, éditeur de la „Correspondance du P. Marin Mersenne" (voir la note 8 de la 41

De l'évolution des courbes.

Roberval a le premier défini ſes tangentes et meſuré ſes lieux plans et ſolides; que le même a trouvé les centres de gravité et du plan et de ſes parties; que Wren a le premier donné une droite égale à la courbe cycloïdale; que j'ai trouvé, moi le premier, la grandeur abſolue de la portion de la cycloïde qui en eſt coupée par une parallèle à la baſe paſſant par un point de l'axe diſtant du ſommet d'un quart de ſa longueur, portion égale à la moitié de l'hexagone équilatère inſcrit au cercle générateur [1]); enfin qu'il à déterminé lui-même les centres de gravité des ſolides et des demi-ſolides, tant de ceux obtenus par rotation autour de la baſe qu'autour de l'axe, et de même de leurs parties. Il dit en outre avoir trouvé (mais après avoir reçu de Wren la dimenſion de la cycloïde) le centre de gravité de la courbe et les dimenſions des ſurfaces convexes dans leſquelles ſont compriſes les ſolides mentionnés plus haut et leurs parties, ainſi que les centres de gravité de ces ſurfaces: et enfin les longueurs des courbes cycloïdales quelconques, tant allongées que raccourcies, c.à.d. de celles qui ſont décrites par un point pris à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle générateur. Les démonſtrations de ces choſes ont été publiées par Paſcal. Après quoi Monſieur Wallis a auſſi expoſé ſes propres méditations ſort ſubtiles ſur la même ligne: il affirme avoir trouvé indépendamment toutes ces mêmes propriétés et avoir réſolu les problèmes propoſés par Paſcal. Le très ſavant Lovera s'attribue la même choſe [2]). Que les ſavants jugent, d'après leurs écrits, combien eſt dû à chacun d'eux. Pour nous, nous avons rapporté ce qui précède puiſqu'il nous ſemblait que nous ne devions pas paſſer ſous ſilence des inventions ſi belles par leſquelles il eſt arrivé que de toutes les lignes aucune n'eſt maintenant connue mieux et plus à fond que la cycloïde. Quant à notre méthode de

---

qui précède) écrit à la p. XXV de sa „Note sur la Vie de Mersenne", par laquelle le T. I de la „Correspondance" débute: „C'est pendant ce séjour [au couvent de la Place Royale à Paris], selon Pascal et certains autres savants que Mersenne avait trouvé, en 1615, la forme de la cycloïde, mais il ne fut question sans doute, à ce moment, que d'une étude sur la roue d'Aristote, problème alors très débattu". Toutefois de Waard est, lui aussi, d'avis que ce fut Mersenne qui proposa le premier le problème de la cycloïde: „pour croire que ce fût par l'étude de la roue d'Aristote que Mersenne, vers l'année 1615, fut amené à étudier le problème de la cycloïde, nous avons des raisons au moins aussi fortes que pour ajouter foi au récit un peu colorié de Pascal" („Une lettre inédite de Roberval du 6 janvier 1637 contenant le premier énoncé de la cycloïde" par C. de Waard, Bulletin des Sciences Math., réd. par E. Picard et P. Appell, Série II, T. XLV, Paris, Gauthier-Villars, 1921).

[1]) T. XIV, p. 350—351 (1658).

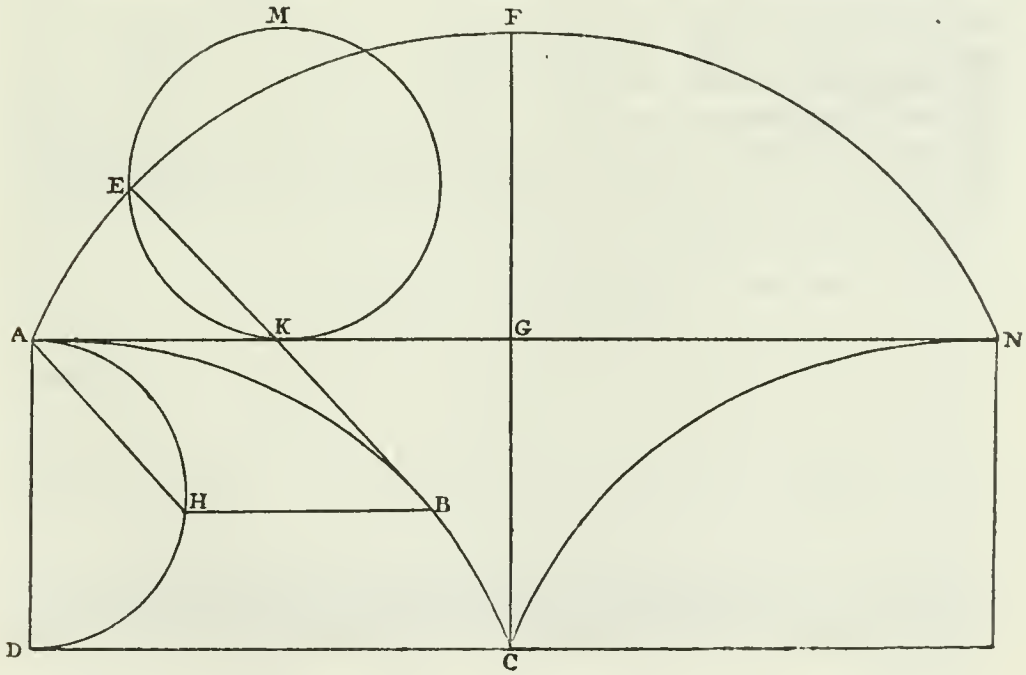
[2]) Voir sur les solutions de A. de la Loubère la note 6 de la p. 346 du T. II.

Robervallium tangentes ejus defini|viſſe, ac plana & ſolida dimenſum eſſe. Item centra gravitatis tum plani, tum partium ejus inveniſſe. Primum Wrennium curvæ cycloidis æqualem rectam dediſſe. Me quoque primum reperiſſe dimenſionem abſolutam portionis cycloidis, quæ rectâ, baſi parallelâ, abſcinditur per punctum axis, quod quarta parte ejus à vertice abeſt. quæ nimirum portio æquatur dimidio hexagono æquilatero, intra circulum genitorem deſcripto [1]). Seipſum denique ſolidorum ac ſemiſolidorum, tam circa baſin quàm circa axem, centra gravitatis deſiniviſſe, itemque partium eorum. Lineæ etiam ipſius (Sed hæc poſt acceptam à Wrennio dimenſionem) centrum gravitatis inveniſſe, & dimenſionem ſuperficierum convexarum, quibus ſolida iſta eorumque partes comprehenduntur; earumque ſuperficierum centra gravitatis. Ac denique dimenſionem curvarum cujuſvis cycloidis, tam protractæ quam contractæ: hoc eſt earum quæ deſcribuntur à puncto intra vel extra circumferentiam circuli genitoris ſumpto. Et horum quidem demonſtrationes à Paſchalio ſunt editæ. A quibus ſuas quoque, de eadem linea, ſubtiliſſimas meditationes expoſuit Cl. Walliſius, atque eadem illa omnia ſuo Marte ſe reperiſſe, ac problemata à Paſchalio propoſita ſolviſſe contendit. Quod idem & doctiſſimus Lovera ſibi vindicat [2]). Quantum vero unicuique debeatur, ex ſcriptis eorum eruditi dijudicent. Nos propterea tantum præcedentia retulimus, quod ſilentio prætereunda non videbantur egregia adeo inventa, quibus factum eſt, ut, ex lineis omnibus, nulla nunc melius aut penitius quam cyclois cognita ſit. Methodum

(p. 69).

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

[Fig. 58.]



De l'évolution des courbes.

la mesurer, il nous a semblé devoir l'appliquer aussi à d'autres lignes: c'est de quoi nous traiterons maintenant.

PROPOSITION VIII.

Montrer quelle est la ligne par l'évolution de laquelle la parabole est décrite [1]).

Soit une paraboloïde AB à axe AD et sommet A [Fig. 59] ayant cette propriété que, BD étant normale à l'axe, le cube de DA, abscisse correspondant au sommet, est égal au solide qui a pour base le carré de DB et pour hauteur une droite donnée M. Cette courbe est connue depuis longtemps aux géomètres. Prolongeons l'axe DE d'une longueur $AE = \frac{8}{27}$ M. Si l'on applique maintenant un fil continu à EAB et que celui-ci est développé à partir du point E, je dis que la développante est la parabole EF à axe EAG et sommet E et dont le latus rectum est égal au double de EA.

En effet, après avoir pris sur la courbe AB un point quelconque B, menons-y la tangente BG coupant l'axe EA en G. Tirons ensuite à partir de ce point G la droite GF normale à la parabole EF en F. Soit FH une perpendiculaire à GF, donc une tangente à la parabole en F, et enfin FK une normale à l'axe.

KG est donc égale à la moitié du latus rectum, c.à.d. à EA, par conséquent, en ajoutant ou retranchant AK de part et d'autre, on trouve que EK = AG. Or, AG est le tiers de AD puisque BG touche la paraboloïde en B: c'est ce qu'on peut aisément démontrer d'après la nature de cette courbe. Il s'ensuit que EK elle aussi est égale au tiers de AD; et KH qui d'après la nature de la parabole est le double de KE sera égale aux deux tiers de AD. Par conséquent le cube de KH est égal à $\frac{8}{27}$ fois le cube de AD, c.à.d. au solide ayant pour base le carré de DB et pour hauteur $\frac{8}{27}$ M, c.à.d. AE. C'est pourquoi, comme DB^2 est à KH^2, ainsi sera KH à AE, c.à.d. à KG. Mais nous avions: $KH = \frac{2}{3}$ AD = GD. Comme BD^2 est à DG^2, ainsi est donc HK à KG. D'autre part, comme HK est à KG, ainsi est FK^2 à KG^2. Par conséquent, comme

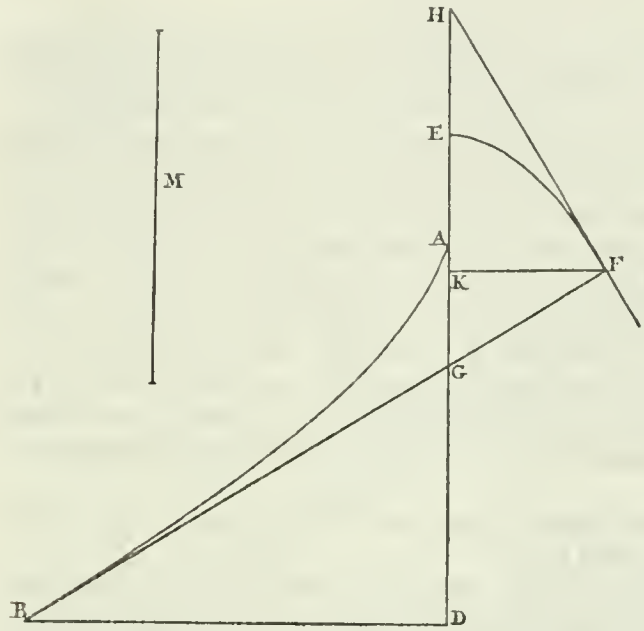
[1]) Voir sur la méthode générale pour trouver la forme des développées la Prop. XI qui suit. La développée de la parabole ordinaire, ainsi que celles des paraboles et hyperboles de degrés supérieurs, étaient connues à Huygens dès décembre 1659; voir les notes 2 et 3 de la p. 147 du T. XVII.

vero noſtram, qua in hac metienda uſi ſumus, in aliis quoque experiri libuit, de quibus porro nunc agemus. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

PROPOSITIO VIII.

Cujus lineæ evolutione parabola deſcribatur oſtendere [1]).

[Fig. 59.]



Sit paraboloides AB, cujus axis AD; vertex A [Fig. 59]; proprietas autem iſta, ut ordinatim ad axem applicatâ BD, cubus abſciſſæ ad verticem DA æquetur ſolido, baſin habenti quadratum DB, altitudinem vero æqualem lineæ cuidam datæ M; quæ quidem curva pridem geometris nota fuit; & ponatur axi DE juncta in directum AE, quæ habeat $\frac{8}{27}$ ipſius M. Jam ſi filum continuum circa EAB applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico deſcri|ptam ex evolutione eſſe parabolam EF, cujus axis EAG, vertex E, latus rectum æquale duplæ EA. (p. 70).

Sumpto enim in curva AB puncto quolibet B, ducatur quæ in ipſo tangat curvam recta BG, occurrens axi EA in G. & ex G ducatur porro GF, quæ ad rectos angulos occurrat parabolæ EF in F; & ſit ipſi GF perpendicularis FH, quæ parabolam in F continget; & denique FK ordinatim ad axem EG applicetur.

Eſt igitur KG æqualis dimidio lateri recto, hoc eſt, ipſi EA; ac proinde, additâ vel ablatâ utrimque AK, erit EK æqualis AG. Eſt autem AG triens ipſius AD, quoniam BG tangit paraboloidem in B: illud enim ex natura curvæ hujus facile demonſtrari poteſt. Ergo & EK æqualis eſt trienti AD: & KH, quæ ex natura parabolæ dupla eſt KE, æquabitur duabus tertiis AD. Itaque cubus ex KH æqualis eſt $\frac{8}{27}$ cubi ex AD, hoc eſt, ſolido baſin habenti quadratum DB, altitudinem vero æqualem $\frac{9}{27}$ M, hoc eſt, ipſi AE. Quamobrem ut quadratum DB ad quadratum KH, ita erit KH longitudine ad AE, hoc eſt ad KG. Erat autem KH æqualis $\frac{2}{3}$ AD, hoc eſt ipſi GD. Ergo ut quadratum BD ad quadratum DG ita eſt HK ad KG. Ut autem HK ad KG, ita eſt quadratum FK ad quadratum KG. Ergo ſicut quadratum BD ad quadratum

De l'évolution des courbes.

BD^2 eſt à DG^2, ainſi eſt FK^2 à KG^2. Donc $BD : DG = FK : KG$. Il s'enſuit que BGF eſt une ligne droite. Mais GF eſt normale à la parabole EF. Il paraît donc que BG, tangente à la paraboloïde, rencontre, lorſqu'on la prolonge, la parabole à angles droits. Et ceci ſera démontré de la même manière de n'importe quelle tangente à la même courbe. Il eſt donc établi que la parabole EF eſt décrite par l'évolution de la ligne EAB depuis ſon extrémité E*. C. Q. F. D.

* Prop. 4. de cette Partie.

PROPOSITION IX.

Trouver une ligne droite égale à un arc donné d'une paraboloïde, ſavoir de celle pour laquelle les carrés des ordonnées ſont entre eux comme les cubes des abſciſſes.

Il eſt évident par la propoſition précédente comment ceci doit être fait. Toutefois point n'eſt beſoin de la parabole EF [Fig. 59] pour cette conſtruction qui ſera exécutée comme ſuit. Etant donnée une partie quelconque AB [Fig. 60] de cette paraboloïde, à laquelle il s'agit d'égaler une droite, ſoit tirée BG tangente au point B et rencontrant l'axe AG en G. Or, BG ſera en effet une tangente lorſque AG eſt le tiers de AD laquelle eſt compriſe entre le ſommet et l'ordonnée BD. Après avoir pris enſuite $AE = \frac{8}{27} M$, M étant le latus rectum de la paraboloïde AB, tirons EF // BG et puiſſe-t-elle couper la ligne AF, parallèle à BD, en F. Si l'on ajoute maintenant à la droite BG la différence NF dont la droite EF ſurpaſſe EA, on aura une droite égale à la courbe AB. De quoi la démonſtration ſe voit aiſément par les choſes auparavant dites.

La courbe AB ſurpaſſe donc toujours la tangente BG d'une longueur égale à celle donc la droite EF ſurpaſſe la droite EA.

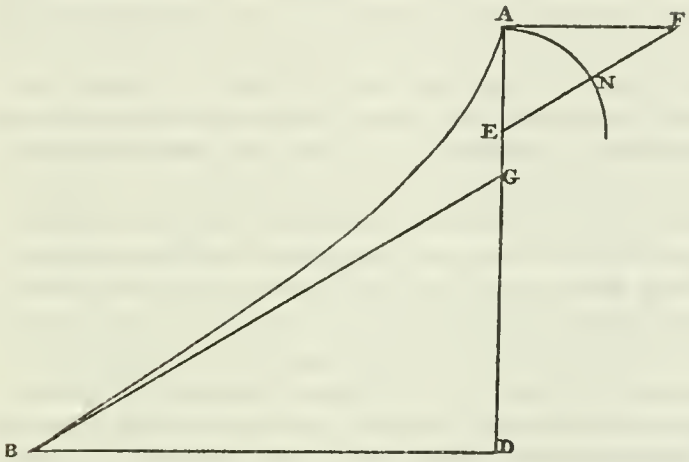
Or, ici nous ſommes tombés de nouveau ſur une ligne dont d'autres ont meſuré la longueur avant nous. C'eſt la ligne que Jean van Heuraet de Harlem a en 1659 montré être égale à une droite; ſa démonſtration a été ajoutée aux commentaires de Jean van Schooten ſur la Géométrie de Deſcartes publiés la même année. Van Heuraet a donc, le premier de tous, rectifié une courbe du nombre de celles dont des points quelconques ſont définis géométriquement, après que peu auparavant Wren avait rectifié la cycloïde par un épichérème non moins ingénieux.

DG, ita quadratum FK ad quadratum KG. Et proinde ſicut BD ad DG longitudine, ita FK ad KG. Unde ſequitur BGF eſſe lineam rectam. Sed GF occurrit parabolæ EF ad angulos rectos. Ergo apparet BG, tangentem paraboloidis, productam occurrere eidem parabolæ ad | angulos rectos. Idque ſimiliter de quavis illius tangente demonſtrabitur. Ergo conſtat ex evolutione lineæ EAB, à termino E incepta, deſcribi parabolam EF *. quod erat demonſtandum. De linearum curvarum evolutione. (p. 71). * Prop. 4. huj.

PROPOSITIO IX.

Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut cubi abſciſſarum ad verticem.

[Fig. 60.]



Quomodo hoc fiat ex prop. præcedenti manifeſtum eſt. Parabola vero EF [Fig. 59] ad conſtructionem non requiritur, quæ ſic peragetur. Data quavis parte paraboloidis hujus AB [Fig. 60] cui rectam æqualem invenire oporteat, ducatur BG tangens in puncto B, quæ occurrat axi AG in G. Tanget autem ſi AG fuerit tertia pars AD, inter verticem & ordinatim applicatam BD interceptæ. Porro ſumpta AE æquali $\frac{8}{27}$ lineæ M, quæ latus rectum eſt paraboloidis AB, ducatur EF parallela BG, occurratque lineæ AF, quæ parallela eſt BD, in F. Jam ſi ad rectam BG addatur NF, exceſſus rectæ EF ſupra EA, habebitur recta æqualis curvæ AB. Cujus demonſtratio ex ante dictis facile perſpicitur.

Semper ergo curva AB tantum ſuperat tangentem BG, quantum recta EF rectam EA.

Rurſus autem hic in lineam incidimus, cujus longitudinem alii jam ante dimenſi ſunt. Illam nempe quam anno 1659 Joh. Heuratius Harlemenſis rectæ æqualem oſtendit, cujus demonſtratio poſt commentarios Joh. Schotenii in Carteſii Geometriam, eodem anno editam, adjecta eſt. Et ille quidem omnium primus curvam lineam, ex earum numero quarum puncta quælibet geo|metricè definiuntur, ad hanc menſuram (p. 72). reduxit, cum ſub idem tempus Cycloidis longitudinem dediſſet Wrennius, non minus ingenio ſoepicheremate.

De l'évolution des courbes.

Je ſais il eſt vrai qu'après la publication de la découverte de van Heuraet, le très ſavant Wallis, dans ſon livre de la ciſſoïde, a voulu l'attribuer auſſi à Guillaume Neile, gentilhomme de ſon pays. Mais à mon avis, quand je conſidère ce qu'il avance dans ce livre, Neile n'a pas à vrai dire été beaucoup éloigné de cette trouvaille ſans toutefois y parvenir tout-à-fait. Car d'après ſa démonſtration même rapportée par Wallis il apparaît qu'il ne comprenait pas clairement quelle ſerait cette courbe dont il voyait que, ſi elle était conſtruite, la meſure ſeraît donnée. Et il eſt croyable que s'il avait ſu qu'il s'agit d'une courbe du nombre de celles qui étaient connues depuis longtemps aux géomètres, lui-même, ou d'autres en ſon nom, leur auraient communiqué un eſi noble invention ſous une forme plus achevée; invention qui méritait autant ou plus que toute autre qu'ils s'écriaſſent εὕρηκα comme jadis Archimède. Sans doute Fermat, conſeiller de Toulouſe et très habile géomètre, a rédigé de la même invention des preuves qui ont été imprimées en 1660, mais celles-ci datent apparemment de plus tard [1]).

Or, puiſque nous ſommes engagés dans ce ſujet, qu'il nous ſoit permis de dire auſſi ce que nous avons contribué à l'avancement d'une ſi excellente découverte: nous avons donné à van Heuraet l'occaſion d'y parvenir et nous avons trouvé avant lui et les premiers de tous la dimenſion de la courbe parabolique d'après la quadrature, ſuppoſée donnée, de l'hyperbole, ce qui fait partie de la trouvaille de van Heuraet. En effet, vers la fin de l'année 1657 nous ſommes tombés ſimultanément ſur ces deux choſes, la dimenſion mentionnée de la courbe parabolique et la réduction de la ſurface du conoïde parabolique au cercle. Et comme nous avions fait ſavoir par une lettre à van Schooten, et à d'autres de nos amis, que deux découvertes extraordinaires au au ſujet de la parabole nous étaient venues dans l'eſprit et que l'une d'elles était la réduction de la ſurface du conoïde parabolique à un cercle, v. Schooten communiqua cette lettre à van Heuraet qui était alors ſon ami intime. Il ne fut pas difficile à cet homme, doué d'un eſprit fort pénétrant, de comprendre que la dimenſion de la courbe parabolique elle-même était dans un étroit rapport avec celle de la ſurface du conoïde. Ayant trouvé l'une et l'autre et pouſſant ſes recherches encore plus loin il tomba ſur ces autres courbes paraboloïdales, auxquelles on trouve des droites abſolument égales [2]).

Et afin que nul ne déſire, comme cela pourrait avoir lieu, de témoignage ſur la réduction de la ſurface du conoïde à une ſurface plane, il me ſemble bon de citer ici une lettre de Monſieur François Sluſius qu'il faut conſidérer comme un des principaux géomètres d'aujourd'hui: dans cette lettre, datant de la même année, il me félicitait de cette découverte, peut-être plus expreſſément que je ne méritais. Voici une citation de ſa lettre du 24 décembre de l'année 1657 [3]): „*J'ajoute ſeulement deux choſes, l'une etc. L'autre que je ne compte preſque pour rien toutes ces courbes et même*

[1]) Voir sur la question v. Heuraet-Neile la note 2 de la p. 123 du T. XVII: Huygens avait apparemment l'intention d'en parler déjà en 1660 alors qu'elle était actuelle. L'apparition de l'

Scio equidem, ab edito Heuratii invento, Doctissimum Wallisium Wilhelmo Nelio, nobili apud suos juveni, idem attribuere voluisse, in libro de Cissoide. Sed mihi, quæ illic adfert perpendenti, videtur non multum quidem ab invento illo Nelium abfuisse, neque tamen plane id adfecutum esse. Nam neque ex demonstratione ejus, quam Wallisius affert, apparet illum satis perspexisse quænam foret curva illa, cujus, si construeretur, mensuram datam fore videbat. Et credibile est, si scivisset ex earum numero esse quæ jampridem Geometris cognitæ fuerant, vel ipsum, vel alios ejus nomine, tam nobile inventum Geometris maturius impertituros fuisse, quod, si quod aliud, merebatur ut Archimedeum illud εὕρηκα exclamarent. Sane ejusdem inventi, tanquam à se profecti, etiam Fermatius, Tholosanus senator ac Geometra peritissimus, demonstrationes conscripsit, quæ anno 1660 excusæ sunt, sed illæ sero utique [1]). DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Cum vero in his simus, etiam de nobis dicere liceat, quid ad promovendum tam eximium inventum contulerimus: siquidem & Heuratio ut eo perveniret occasionem præbuimus, & dimensionem curvæ parabolicæ ex hyperbolæ data quadratura, quæ Heuratiani inventi pars est, ante ipsum atque omnium primi reperimus. Etenim sub finem anni 1657 in hæc duo simul incidimus, curvæ parabolicæ quam dixi dimensionem, & superficiei conoidis parabolici in circulum reductionem. Cumque Schotenio, aliisque item amicorum, per literas indicassemus, duo quædam non vulgaria circa parabolam inventa nobis sese obtulisse, eorumque alterum esse conoidicæ superficiei extensionem in circulum, ille literas eas cum Heuratio, quo tum familiariter utebatur, communicavit. Huic vero, acutissimi ingenii viro, non difficile fuit intelligere, conoidis istius superficiei affinem esse dimensionem ipsius curvæ parabolicæ. Qua utraque inventa, ulterius inde investigans, in alias istas curvas paraboloides incidit, quibus rectæ æquales absolute inveniuntur [2]).

Ac de Conoidis quidem superficie in planum redacta, ne quis forte testimonium desideret, pauca hæc adscribere visum est ex literis viri clarissimi, atque inter præcipuos hodie Geometras censendi, Franc. Slusii, quibus eo ipso anno mihi inventum illud, ac prolixius forte quam pro merito, gratulatus est. In quibus literis | 24. Decemb. anni (*p.* 73). 1657. [3]) datis, ista habentur. *Duo tantum addo, unum &c. Alterum est, me has om-*

„Hor. osc." donna lieu à une discussion sur ce sujet (e.a. avec J. Wallis), sur laquelle on peut consulter le T. VII.

Dans une lettre à Leibniz du 1 décembre 1696 Wallis (p. 653 du T. III de ses „Opera mathematica", publiés à Oxford en 1699) écrit: „De invento Nelii qui (traditis à me ad Prop. 38 Ar. Infinitorum insistens) primus omnium exhibuit æqualem Curvæ rectam: Quod dixerat Hugenius, (eum non procul abfuisse, non tamen omnino assecutum) id post retraxit Hugenius (in suis ad me literis) jussitque ut id iterum Nelio assererem. Num Nelius statim sciverit, per omnia, qualis fuerit illa Curva, ego non certus scio: Sed Brounkerus & Ego protinus deteximus Paraboloidem esse; cui ego nomen feci Semi-cubicalem". Nous ne connaissons pas de lettre de Huygens à Wallis où il rétracte l'opinion exprimée dans l'„Horologium oscillatorium".

[2]) Voir les p. 189—190 et 196 du T. XIV.

[3]) T. II, p. 107.

le lieu linéaire entier en comparaiſon avec votre découverte d'une démonſtration de l'exiſtence d'un rapport déterminé entre la ſurface du conoïde parabolique et le cercle qui en eſt la baſe. Je donne volontiers la préférence à cette belle induction pour la quadrature du cercle à toutes les diverſes choſes que j'ai tirées autrefois du lieu linéaire et que je vous communiquerai à l'occaſion ſi vous le déſirez".

L'année ſuivante je trouvai auſſi les ſurfaces des conoïdes hyperboliques et ſphéroïdaux, c.à.d. leur réduction à des cercles, et je fis connaître les conſtructions de ces problèmes, ſans toutefois y ajouter de démonſtration, aux géomètres avec qui j'étais alors en commerce de lettres, ſavoir Paſcal et autres en France et Wallis en Angleterre. Ce dernier publia peu après ſes idées à lui ſur ces ſujets enſemble avec beaucoup d'autres inventions ſubtiles, ce qui fut cauſe que je ne travaillai pas tout de ſuite à l'achèvement de mes démonſtrations [1]). Mais puiſque mes conſtructions ne me paraiſſent pas manquer d'élégance et qu'elles ſont encore inédites, je veux les inſérer ici.

Trouver un cercle égal à la ſurface courbe d'un conoïde parabolique [2]).

Soit donné un conoïde [Fig. 61] dont la parabole ABC ſoit la ſection par l'axe; que BD ſoit l'axe du conoïde, B ſon ſommet, AC le diamètre de ſa baſe, lequel eſt perpendiculaire à l'axe. Et ſoit demandé de trouver un cercle égal à la ſurface courbe du conoïde.

Qu'on prenne, après avoir prolongé l'axe du côté du ſommet, BE = BD et qu'on tire EA, tangente en A à la parabole ABC. Que l'on coupe enſuite AD en G de telle manière que AG : GD = EA : AD. Soit H une droite égale à AE + DG et L une droite égale au tiers de la baſe AC. Soit K la moyenne proportionnelle que l'on peut conſtruire entre H et L. Décrivons un cercle de rayon K. Celui-ci ſera égal en ſurface à la ſurface courbe ABC du conoïde. Il s'enſuit que ſi AE = 2AD la ſurface courbe du conoïde ſera au cercle qui en forme la baſe comme 14 eſt à 9; ſi AE = 3AD, comme 13 eſt à 6; ſi AE = 4AD, comme 14 eſt à 5. Et qu'ainſi ce rapport ſera toujours exprimé par celui de deux nombres entiers, lorſqu'il en eſt de même pour celui de AE à AD.

Trouver un cercle égal à la ſurface d'un ſphéroïde allongé [3]).

Conſidérons un ſphéroïde oblong [Fig. 62] d'axe AB et de centre C. Soit ABDE une ellipſe obtenue par la ſection du ſphéroïde par l'axe, et DE ſon petit diamètre.

---

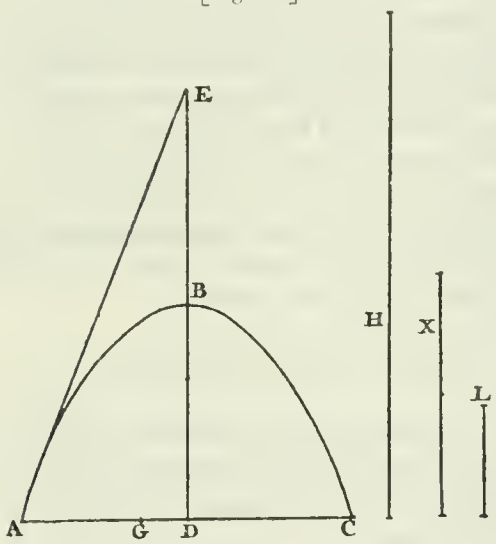
[1]) Comparez la p. 192 du T. XIV.
[2]) Voir les p. 267—268 du T. XIV.
[3]) Voir les p. 190 et 320—324 du T. XIV.

nes curvas, ipsumque adeo locum linearum integrum, nihili pene facere præ invento hoc tuo, quo superficiei in conoide parabolico rationem ad circulum suæ baseos demonstrasti. Hanc pro circuli quadratura pulcherrimam ἀπαγωγὴν præfero libens iis omnibus, quas ex loco lineari nec paucas olim deduxi, & quas tecum, si ita jusseris, data occasione communicabo. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Anno autem insequenti etiam superficies conoidum hyperbolicorum & sphæroidum reperi, quomodo ad circulos reduci possent, constructionesque eorum problematum, non addita tamen demonstratione, Geometris quibuscum tunc literarum commercium habebam, in Gallia Paschalio aliisque, in Anglia Wallisio impertii, qui non multo post sua quoque super his, una cum aliis multis subtilibus inventis in lucem edidit, fecitque ut nostris demonstrationibus perficiendis supersederem. Quoniam vero non inelegantes visæ sunt constructiones nostræ, neque adhuc publice extant, placet hoc loco illas adscribere.

Conoidis parabolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire [2]).

[Fig. 61.]



Sit datum conoides [Fig. 61] cujus sectio per axem parabola ABC; axis ejus BD, vertex B, diameter basis AC, quæ sit axi BD ad angulos rectos. Et oporteat superficiei portionis curvæ invenire circulum æqualem.

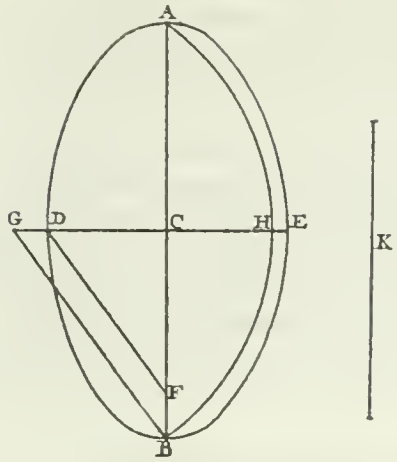
Producto axe à parte verticis, sumatur (*p.* 74). BE æqualis BD, & jungatur EA, quæ parabolam ABC in A continget. Porro secetur AD in G, ut sit AG ad GD sicut EA ad AD. Et utrisque simul AE, DG æqualis statuatur recta H. Item trienti basis AC æqualis sit recta L, & inter H & L media proportionalis inveniatur K. qua tanquam radio circulus describatur. Is æqualis erit superficiei curvæ conoidis ABC. Hinc sequitur, si fuerit AE dupla AD, superficiem conoidis curvam ad circulum baseos fore ut 14 ad 9. Si AE tripla AD, ut 13 ad 6. si AE quadrupla AD, ut 14 ad 5. Atque ita semper fore ut numerus ad numerum, si AE ad AD ejusmodi rationem habuerit.

Sphæroidis oblongi superficiei circulum æqualem invenire [3]).

Esto sphæroides oblongum [Fig. 62] cujus axis AB, centrum C, sectio per axem ellipsis ADBE, cujus minor diameter DE.

De l'évolution des courbes.

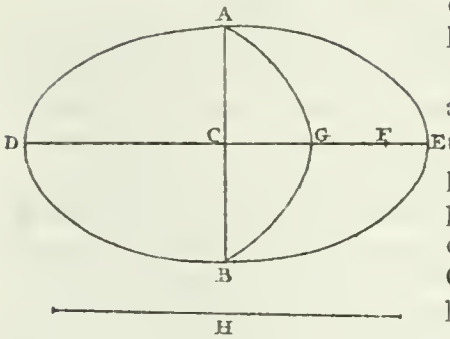
[Fig. 62.]



Posons DF = CB, en d'autres termes soit F un des deux foyers de l'ellipse ADBE; et tirons la droite BG parallèle à FD, laquelle rencontre le prolongement de ED en G. Décrivons maintenant sur l'axe AB du centre G, avec le rayon GB, l'arc de circonférence BHA. Et soit la droite K moyenne proportionnelle entre le demi-diamètre CD et une droite égale à la somme de l'arc AHB et du diamètre DE. Cette droite K sera le rayon d'un cercle égal à la surface du sphéroïde ADBE.

Trouver un cercle égal à la surface du sphéroïde large ou aplati [1]).

[Fig. 63.]



Considérons un sphéroïde aplati d'axe AB et de centre C [Fig. 63]. Soit ADBE une ellipse obtenue par la section du sphéroïde par l'axe.

Soit de nouveau F l'un des deux foyers et, après avoir divisé FC en G, supposons construite une parabole AGB ayant AB pour base et le point G pour sommet. Et soit H une moyenne proportionnelle entre le diamètre DE et une droite égale à la courbe parabolique AGB. Cette droite H sera le rayon d'un cercle égal à la surface du sphéroïde considéré.

Trouver un cercle égal à la surface courbe d'un conoïde hyperbolique [2]).

Soit donné un conoïde hyperbolique à axe AB [Fig. 64] et dont la section par l'axe soit l'hyperbole CAD à latus transversum EA, à centre F et à latus rectum AG.

Prenons sur l'axe la droite AH égale à la motié du latus rectum AG. Et comme

[1]) Voir les p. 317—319 du T. XIV.
[2]) Voir les p. 315—316 du T. XIV.

Ponatur DF æqualis CB, ſeu ponatur F alter ſocorum ellipſeos ADBE rectæque FD parallela ducatur BG, occurrens productæ ED in G, centroque G, radio GB, deſcribatur ſuper axe AB arcus circumferentiæ BHA. Interque ſemidiametrum CD & rectam utrisque æqualem, arcui AHB & diametro DE, media proportionalis ſit recta K. Erit hæc radius circuli qui ſuperficiei ſphæroidis ADBE æqualis ſit. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sphæroidis lati ſive compreſſi ſuperficiei circulum æqualem invenire [1]). (*p.* 75).

Sit ſphæroides latum cujus axis AB, centrum C [Fig. 63], ſectio per axem ellipſis ADBE.

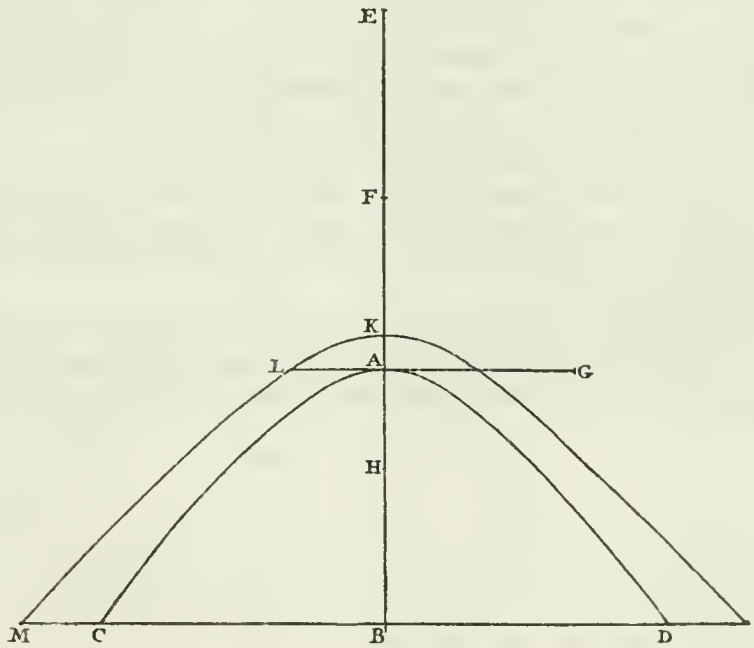
Sit rurſus ſocorum alteruter F, diviſâque biſariam FC in G, intelligatur parabola AGB quæ baſin habeat axem AB, verticem vero punctum G. Sitque inter diametrum DE, & rectam curvæ parabolicæ AGB æqualem, media proportionalis linea H. Erit hæc radius circuli qui ſuperficiei ſphæroidis propoſiti æqualis ſit.

Conoidis hyperbolici ſuperficiei curvæ circulum æqualem invenire [2]).

Eſto conoides hyperbolicum [Fig. 64] cujus axis AB, ſectio per axem hyperbola CAD, cujus latus tranſverſum EA, centrum F, latus rectum AG.

Sumatur in axe recta AH, æqualis dimidio lateri recto AG, & ut HF ad AF longi-

[Fig. 64.]



De l'évolution des courbes.

HF eſt à AF en longueur, ainſi ſoit AF à FK en puiſſance. Suppoſons conſtruite une autre hyperbole KLM à ſommet K, qui poſſède le même axe et le même centre F et qui ait ſon latus rectum et ſon latus tranſverſum inverſement proportionnels aux grandeurs correſpondantes de la première. Que BC prolongée la coupe en M et que AL ſoit parallèle à BC. La ſurface courbe du conoïde ſera maintenant au cercle de diamètre CD qui conſtitue ſa baſe, comme l'eſpace ALMB, compris entre trois droites et la courbe hyperbolique, eſt à la moitié du carré de BC. On achèvera donc aiſément la conſtruction, poſée la quadrature de l'hyperbole.

Tandis que d'après notre démonſtration la ſurface du conoïde parabolique ſe réduit, tout auſſi bien que celle de la ſphère, à la ſurface d'un cercle ſuivant les règles connues de la géométrie, il faut admettre, pour que cette reduction ait lieu pour la ſurface du ſphéroïde allongé, que la longueur d'un arc de circonférence puiſſe être égalée à une droite. Mais la quadrature de l'hyperbole eſt requiſe pour la complanation correſpondante de la ſurface du ſphéroïde aplati, ainſi que pour celle de la ſurface du conoïde hyperbolique. Car la longueur de la ligne parabolique, que nous avons employée dans le cas de ce ſphéroïde, dépend de la quadrature de l'hyperbole, comme nous le montrerons tout-à-l'heure.

Cependant nous avons trouvé, ce qui ne ſemble pas indigne d'être remarqué, qu'on peut conſtruire, ſans ſuppoſer aucunement la quadrature de l'hyperbole, un cercle égal à la ſomme des ſurfaces d'un ſphéroïde aplati et d'un conoïde hyperbolique.

En effet, nous avons réuſſi à prouver qu'étant donné un ſphéroïde aplati quelconque, on peut trouver un conoïde hyperbolique, ou au contraire qu'étant donné un conoïde hyperbolique, on peut trouver un ſphéroïde aplati tel qu'il eſt poſſible d'obtenir un cercle égal à la ſomme des ſurfaces des deux corps [1]). Il ſuffira d'en avoir donné un ſeul exemple dans un cas plus ſimple que les autres.

Soit donné un ſphéroïde aplati à axe SI [Fig. 65] et que STIK ſoit une ellipſe obtenue par une ſection du ſphéroïde par l'axe. Soit O le centre de cette ellipſe et TK ſon grand axe. Que la forme de l'ellipſe ſoit telle que ſon latus tranſverſum TK ait à ſon latus rectum un rapport égal à celui d'une ligne diviſée en extrême et moyenne raiſon à ſa plus grande partie.

Prenons BC double en puiſſance à SO et de même BA double en puiſſance par rapport à OK. Que BC, BA, BF et BE ſoient en proportion continue et que EP ſoit priſe égale à EA. Suppoſons maintenant conſtruit un conoïde hyperbolique QFN à

[1]) T. XIV, p. 192—195, 324—326, 329—334.

tudine, ita ſit AF ad FK potentiâ. Et intelligatur vertice K alia hyperbola deſcripta KLM, eodem axe & centro F cum priore, quæque latera rectum & transverſum illi reciproce proportionalia habeat. Occurrat autem ipſi producta BC in M, ſitque AL parallela BC. Erit jam ſicut ſpatium ALMB, tribus rectis lineis & curva hyperbolica comprehenſum, ad dimidium quadratum ex BC, ita ſuperficie conoidis curva ad circulum baſeos ſuæ, cujus diameter CD. Unde conſtructio reliqua facile abſolvetur, poſitâ hyperbolæ quadraturâ. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

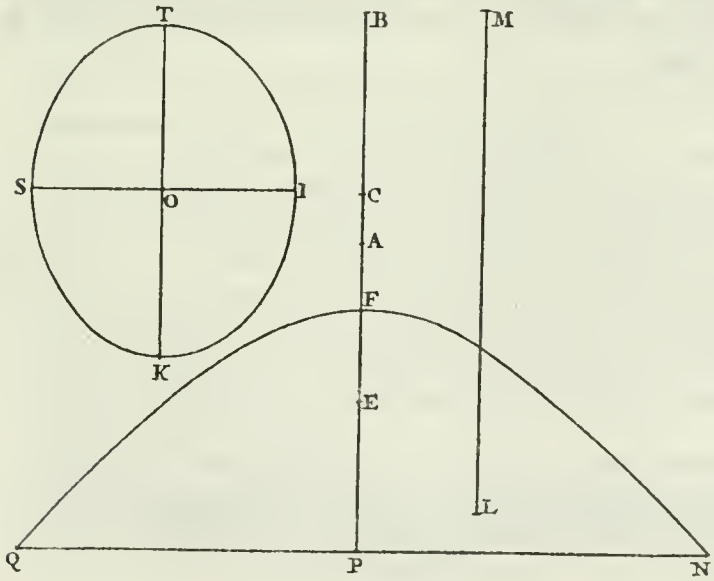
Quum igitur conoidis parabolici ſuperficies ad circulum redigatur, æque ac ſuperficies ſphæræ, ex notis geometriæ regulis; in ſuperficie ſphæroidis oblongi, ut idem fiat, ponendum eſt arcus | circumferentiæ longitudinem æquari poſſe lineæ rectæ. Ad (*p.* 76). ſphæroidis vero lati, itemque ad conoidis hyperbolici ſuperficiem eadem ratione complanandam, hyperbolæ quadratura requiritur. Nam parabolicæ lineæ longitudo, quam in ſphæroide hoc adhibuimus, pendet à quadratura hyperbolæ, ut mox oſtendemus.

Verum, quod non indignum animadverſione videtur, invenimus absque ulla hyperbolicæ quadraturæ ſuppoſitione, circulum æqualem conſtrui ſuperficiei utrique ſimul, ſphæroidis lati & conoidis hyperbolici.

Dato enim ſphæroide quovis lato, poſſe inveniri conoides hyperbolicum, vel contra, dato conoide hyperbolico, poſſe inveniri ſphæroides latum ejusmodi, ut utriusque ſimul ſuperficiei exhibeatur circulus æqualis [1]). cujus exemplum in caſu uno cæteris ſimpliciore ſufficiet attuliſſe.

Sit ſphæroides latum cujus axis SI [Fig. 65], ſectio per axem ellipſis STIK, cujus ellipſis centrum O, axis major TK. ponatur autem ellipſis hæc ejusmodi, ut latus transverſum TK habeat ad latus rectum eam rationem, quam linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta, ad partem ſui majorem.

[Fig. 65.]



Sumatur BC potentia dupla ad SO, item BA potentia dupla ad OK. & ſint hæ quatuor continue proportionales BC, BA, BF, | BE, & (*p.* 77). ponatur EP æqualis EA. Intelligatur jam conoides hyperbolicum QFN, cujus axis FP; axi adjecta,

De l'évolution des courbes.

axe FP, et dont la longueur ajoutée à l'axe, c.à.d. le demi latus tranſverſum, ſoit FB, tandis que BC repréſente ſon latus rectum.

La ſurface courbe de ce conoïde, jointe à celle du ſphéroïde SI, ſera égale à un cercle de rayon ML, le carré de ML étant égal à la ſomme du carré TK et de deux fois le carré SI [1]).

Trouver une ligne droite égale à une courbe parabolique [2]).

ABC [Fig. 66] repréſente une portion d'une parabole à axe BK, auquel la baſe AC eſt perpendiculaire. On demande de trouver une droite égale à la courbe ABC.

Prenons une droite IE [Fig. 67] égale à la demi-baſe AK et prolongeons-la juſqu'au point H de telle manière que IH ſoit égale à AG, laquelle, touchant la parabole au point A de la baſe, coupe l'axe prolongé en G. Soit en autre DEF une portion d'hyperbole décrite avec le ſommet E et le centre I, et dont EH repréſente le diamètre, la baſe DHF lui étant normale. Le latus rectum eſt arbitraire. Si l'on ſuppoſe maintenant un parallélogramme DPQF conſtruit ſur la baſe DF, lequel ſoit égal à l'aire DEF, ſon côté PQ coupera le diamètre de l'hyperbole en R de telle manière que RI ſera égale à la courbe parabolique AB, dont ABC eſt le double.

Il apparaît par là comment la meſure de la courbe parabolique dépend de la quadrature de l'hyperbole et réciproquement.

Or, un problème quelconque qui ſe réduit à l'une des deux queſtions nommées eſt capable d'une ſolution numérique auſſi approchée qu'on veut par l'admirable invention des logarithmes. En effet, nous avons trouvé jadis que par eux la quadrature de l'hyperbole eſt réſolue numériquement avec une approximation auſſi grande qu'on le déſire [3]). Voici notre règle.

---

[1]) C'est le cas spécial dont il est question aux p. 194—195 et 333—334 du T. XIV.

[2]) Voir les p. 234—236 du T. XIV.

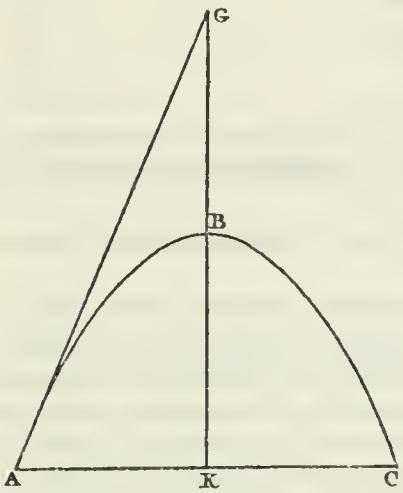
[3]) Voir les p. 434—435 et 474 et suiv. (1662) du T. XIV.

ſive $\frac{1}{2}$ latus transverſum FB; dimidium latus rectum æquale BC.

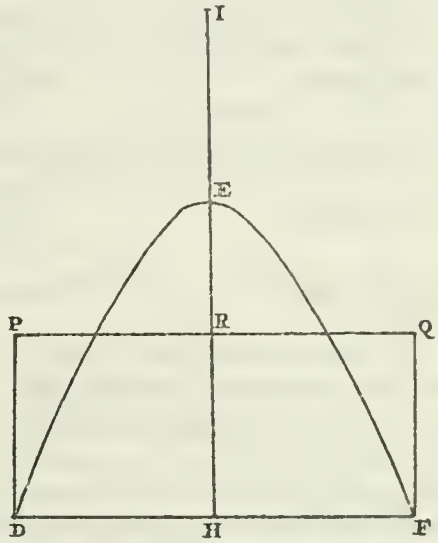
Hujus conoidis ſuperficies curva, unà cum ſuperficie ſphæroidis SI, æquabitur circulo cujus datus erit radius ML, qui nempe poſſit quadratum TK cum duplo quadrato SI [1]).

Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire [2]).

[Fig. 66.]



[Fig. 67.]



Sit parabolæ portio ABC [Fig. 66], cujus axis BK, baſis AC axi ad angulos rectos; & oporteat curvæ ABC rectam æqualem invenire.

Accipiatur baſi dimidiæ AK æqualis recta IE [Fig. 67], quæ producatur ad H, ut ſit IH æqualis AG, quæ parabolam in puncto baſis A contingens, cum axe producto convenit in G. Sit jam portio hyperbolæ DEF, vertice E, centro I deſcriptæ, cujusque diameter ſit EH; baſis vero DHF ordinatim ad diametrum applicata. Latus rectum pro lubitu ſumi poteſt. Quod ſi jam ſuper baſi DF intelligatur parallelogrammum conſtitutum DPQF, quod portioni DEF æquale ſit; ejus latus PQ ita ſecabit diametrum hyperbolæ in R, ut RI ſit æqualis curvæ parabolicæ AB, cujus dupla eſt ABC.

Apparet igitur hinc quomodo à quadratura hyperbolæ pendeat curvæ parabolicæ menſura, & illa ab hac viciſſim.

Quæcunque vero problemata ad alterum è duobus hiſce reducuntur, quamlibet veræ proximam ſolutionem per numeros accipiunt, logarithmorum admirabili invento. Cum per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quam proxime explicetur [3]). Eſt autem regula hujusmodi. (p. 78).

De l'évolution des courbes.

Soit DAB [Fig. 68] une portion d'hyperbole à aſymptotes CS et CV, DE et BV étant des parallèles à l'aſymptote SC.

Qu'on prenne la différence des logarithmes correſpondant à des nombres ayant entre eux les mêmes rapports que les droites DE et BV, et enſuite le logarithme de cette différence. Ajoutons-y le logarithme, qui eſt toujours le même, 0,36221,56887 [1]). La ſomme ſera le logarithme du nombre qui repréſentera l'eſpace DEVBAD, compris entre trois droites et la courbe DAB, exprimé en parties telles que le parallélogramme DC en a 100000,00000. D'où l'on conclura auſſi facilement à l'aire de la portion DAB.

Soit p.e. la proportion DE : BV égale à 36 : 5.

Du logarithme de 36	1,55630,25008
retranchons	0,69897,00043
La différence des logarithmes ſera	0,85733,24965 [2]),
et	9,93314,92856 le logarithme de cette différence.
En y ajoutant	0,36221,56887, le logarithme qu'il faut toujours
ajouter, on obtient	10,29536,49713 pour le logarithme de l'eſpace DEVBAD.

Le nombre correſpondant à ce logarithme a 11 chiffres, puiſque la caractériſtique eſt 10. Il faut donc d'abord chercher le nombre inférieur, auſſi approché que poſſible, qui correſpond au logarithme trouvé: c'eſt le nombre 19740. Enſuite il faut calculer d'après la différence de ce même logarithme et de celui qui le ſuit dans la table, les chiffres ſuivants 81026 que l'on doit écrire à la ſuite des premiers pour obtenir le nombre total, ſavoir 197408,10260, où le zéro eſt ajouté à la fin pour que le nombre des chiffres ſoit en effet de onze. L'aire de l'eſpace DEVBAD eſt donc à fort peu près de 197408,10260 parties, telles que le parallélogramme DC en a 100000,00000.

PROPOSITION X.

Montrer des lignes courbes telles que par leur évolution ſoient décrites des ellipſes et des hyperboles, et trouver des lignes droites égales à ces courbes [3]).

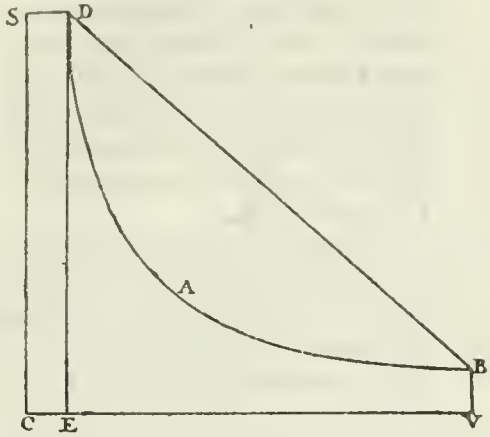
Soit AB [Fig. 69] une ellipſe ou hyperbole quelconque à axe tranſverſal AC, à centre D, et dont le latus rectum ſoit le double de AE. Menons à partir d'un point

---

[1]) Voir sur ce nombre remarquablement exact la note 2 de la p. 476 du T. XIV.

[2]) Dans l'édition originale une faute d'impression, déjà corrigée dans l'édition de 's Gravesande, avait changé le chiffre 2 en 1. On trouve ailleurs chez Huygens le nombre correct: voir la l. 5 de la p. 477 du T. XIV ainsi que la p. 23 du Manuscrit 13, dont il est question dans une note de cette même p. 477.

[Fig. 68.]



Sit DAB [Fig. 68] portio hyperbolæ, cujus asymptoti CS, CV, ductis DE, BV parallelis asymptoto SC. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Accipiatur differentia logarithmorum qui conveniunt numeris, eandem inter se rationem habentibus quam rectæ DE, BV; ejusque differentiæ quæratur logarithmus. Cui addatur logarith|mus hic (*p. 79*). (qui semper est idem) 0,36221,56887 [1]). Summa erit logarithmus numeri qui spatium DEVBAD designabit, tribus rectis & curva DAB comprehensi, in partibus qualium parallelogrammum DC est 100000,00000. Unde porro facile quoque habebitur area portionis DAB.

Sit ex. gr. proportio DE ad BV ea quæ 36 ad 5.

Ab	1,55630,25008,	logarithmo 36.
auferatur	0,69897,00043.	logarithmus 5.
Erit	0,85733,24965.	differentia logarithmorum [2]).
Et	9,93314,92856.	logarithmus differentiæ.
Cui addatur	0,36221,56887.	logarithmus semper addendus.
Fit	10,29536,49743.	logarithmus spatii DEVBAD.

Habebit hujus logarithmi numerus 11 characteres, quum characteristica sit 10. Quæratur itaque primo numerus proxime minor, conveniens invento logarithmo, qui numerus est 19740. Deinde ex differentia logarithmi ejusdem, & proxime eum in tabula sequentis, reliqui characteres eliciantur 81026, scribendi post priores, ut fiat 197408,10260, addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum 11. Est ergo area spatii DEVBAD proxime partium 197408,10260, qualium partium parallelogrammum DC est 100000,00000.

PROPOSITIO X.

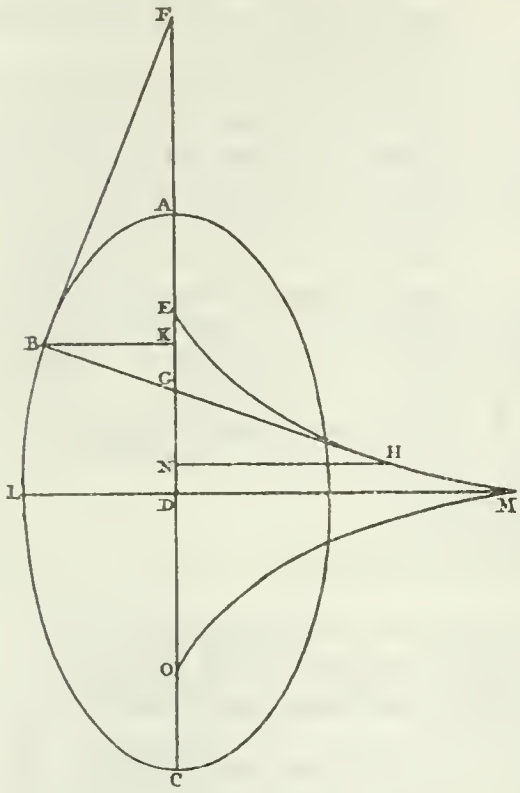
Lineas curvas exhibere quarum evolutione ellipses & hyperbolæ describantur, rectasque invenire iisdem curvis æquales [3]).

Sit ellipsis vel hyperbole quælibet AB [Fig. 69] cujus axis transversus AC; centrum figuræ D; latus rectum duplum ipsius AE. Et sumpto in sectione quovis puncto, ut

[3]) Voir les notes 5—7 de la p. 122 du T. XVII.

De l'évolution des courbes.

[Fig. 69.]

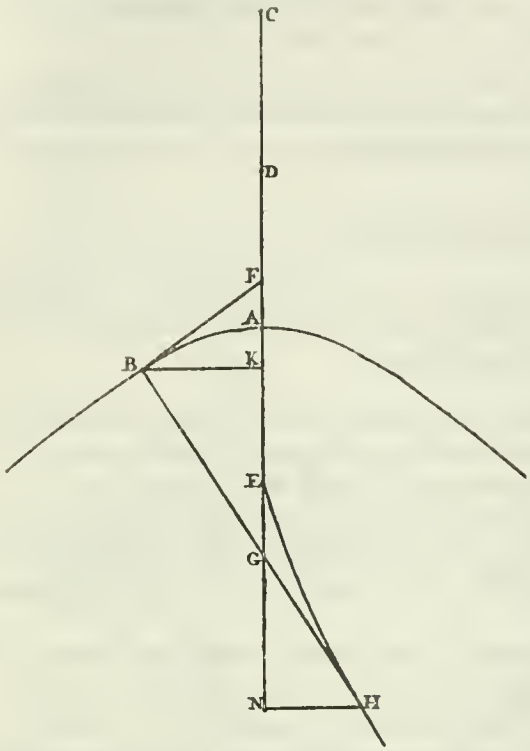


B quelconque de la ſection l'ordonnée BK et au dit point B une tangente qui coupe l'axe en F. Soit BG perpendiculaire à FB et puiſſe-t-elle couper l'axe en G. Prolongeons BG juſqu'au point H de telle manière que le rapport BH : HG ſoit compoſé des rapports GF : FK et AD : DE.

Je dis que la courbe EHM dont tous les points ſont trouvés de la même manière que le point H eſt celle par l'évolution de laquelle, jointe à la droite EA, eſt décrite la ſection AB. En d'autres termes que BH touche la courbe en H et eſt égale à la ligne entière HEA. C'eſt pourquoi, lorſqu'on retranche EA de HB, la droite qui reſte ſera égale à l'arc HE. Et il paraît, puisque tous les points de la courbe indifféremment ſont trouvés ſuivant la même méthode bien déterminée, qu'elle eſt partout du genre de celles qui ſont eſtimées purement géométriques. Il s'enſuit que la relation de tous ſes points à ceux de l'axe AC pourra être exprimée par une certaine équation que je trouve monter à la ſixième dimenſion et poſſéder un minimum de termes lorſque AB eſt une hyperbole dont le latus tranſverſum et le latus rectum ſont égaux; en effet, dans ce dernier cas, ſi l'on tire d'un point quelconque de la courbe tel que H une perpendiculaire HN à l'axe CAN, et qu'on appelle AC a, CN [1]) x, et NH y, le cube de $x^2 - y^2 - a^2$ ſera toujours égal à $27x^2y^2a^2$. Mais dans ce cas particulier les points de la courbe EHM pourront être trouvés beaucoup plus rapidement, comme cela ſera démontré dans la ſuite.

Au reſte il faut remarquer que dans le cas de l'ellipſe chaque quadrant eſt décrit par l'évolution d'une ligne correſpondante; le quadrant ABL p.e. par l'évolution de la ligne AEHM, le quadrant CL par celle de la ligne COM ſymétrique avec la précédente. Il y a en effet cette différence entre les deux ſections que — tandis que l'origine de la courbe EHM eſt tant pour l'ellipſe que pour l'hyperbole le point E, la droite AE ayant été priſe égale à la moitié du latus rectum — dans le cas de l'hyperbole la courbe nommée s'étend à partir du point E juſqu'à l'infini, mais que dans le cas de ellipſe elle ſe termine au point M du petit axe, LM étant priſe égale à la moitié du latus rectum, qui ſe rapporte aux ordonnées perpendiculaires au dit petit axe. Car il

[Fig. 69.]



B, applicetur ordinatim ad axem recta BK, & ad dictum punctum B tangens ducatur quæ conveniat cum axe in F; ſitque BG ipſi FB perpendicularis, axique occurrat in G; & producatur BG usque ad H, ut BH ad HG habeat rationem eam quæ componitur ex rationibus GF ad FK, & AD ad DE. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Dico curvam EHM, cujus puncta omnia inveniuntur eodem modo quo punctum H, eſſe eam cujus evolutione, unà cum recta EA, deſcribetur ſectio AB. Ipſam autem BH tangere curvam in | H, & eſſe toti HEA æqualem. (*p.* 80). Quamobrem, ſi ab HB auferatur EA, reliqua recta portioni curvæ HE æquabitur. Apparet autem, cum curvæ puncta quævis indifferenter, certaque ratione inveniantur, eſſe eam utrobique ex earum genere, quæ merè geometricæ cenſentur. Unde & relatio horum omnium punctorum ad puncta axis AC, æquatione aliqua exprimi poterit, quam æquationem ad ſextam dimenſionem aſcendere invenio; minimumque habere terminorum, ſi fuerit AB hyperbola cujus latera transverſum rectumque æqualia. Tunc enim ducta ex quovis curvæ puncto, ut H, ad axem CAN perpendiculari HN; vocatâque AC, a; CN [1]), x; & NH, y; erit ſemper cubus ab $xx—yy—aa$ æqualis 27 $xxyyaa$. Sed hoc caſu brevius quoque multo, quam prædicta conſtructione, curvæ EHM puncta reperiri poſſunt, ut in ſequentibus oſtendetur.

Cæterum notandum eſt, in ellipſi ſingulos quadrantes ſingularum linearum evolutione deſcribi; ſicut quadrans ABL evolutione lineæ AEHM, quadrans CL evolutione ſimilis huic oppoſitæ COM. Eſt enim hæc in ſectione utraque diverſitas, quod cum principium quidem curvæ EHM, tam in ellipſi quam in hyperbola, ſit punctum E, ſumpta AE æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti; in hyperbola in infinitum inde dicta linea extenditur, at in ellipſi finitur | in puncto axis minoris M, ſumpta LM æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti, ſecundum quod poſſunt ordinatim applicatæ ad dictum minorem axem. Namque hos ter- (*p.* 81).

[1]) Lisez: DN.

De l'évolution des courbes.

apparaîtra facilement à celui qui considère la genèse de cette courbe, que ce sont là ses extrémités, en tenant compte de la proportion AD : DE = LM : MD propre à l'ellipse.

Or, nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ces choses, mais nous poursuivrons en enseignant la méthode par laquelle on trouve tant les courbes qui correspondent aux sections coniques que d'autres courbes en nombre infini provenant de courbes données quelconques.

PROPOSITION XI.

Étant donnée une ligne courbe, en trouver une autre par l'évolution de laquelle elle peut être décrite; et montrer que de toute courbe géométrique provient une autre courbe également géométrique, et qui est rectifiable [1]).

Soit [Fig. 70] une courbe ou une partie d'elle ABF courbée vers un seul côté, et une droite KL à laquelle tous les points soient rapportés; et qu'il faille trouver une autre courbe telle que DE par l'évolution de laquelle ABF puisse être décrite.

Supposons cette courbe déjà trouvée. Puisque toutes les tangentes à la courbe DE doivent être normales à la développante ABF, il est évident que réciproquement toutes les normales à ABF, telles que BD et FE, seront tangentes à la développée CDE.

Considérons les points B et F fort proches l'un de l'autre, et puisque l'évolution commence par hypothèse à partir du point A et que F en est plus éloigné que B, le point de contact E sera également plus éloigné du point A que le point D; et l'intersection des droites BD et FE, qui est G, tombera au-delà du point D sur la droite BD. Car il est nécessaire que BD et FE se coupent, puisqu'elles sont normales à la courbe BF du côté où elle est concave.

[1]) Comparez les p. 206 et 387 (note 2) du T. XIV, ainsi que le § 1 à la p. 142 et le § 5 à la p. 146 du T. XVII, notamment la note 3 de la p. 143 de ce dernier Tome, où nous avons reproduit la première Fig. 70 du texte. Nous y avons remarqué que la lettre C du § 1 manque dans cette figure; toutefois dans son exemplaire à lui de l'„Hor. osc." Huygens y a ajouté la lettre C de sa main, de sorte que l'accord avec le texte du § 1 nommé est dès lors complet.

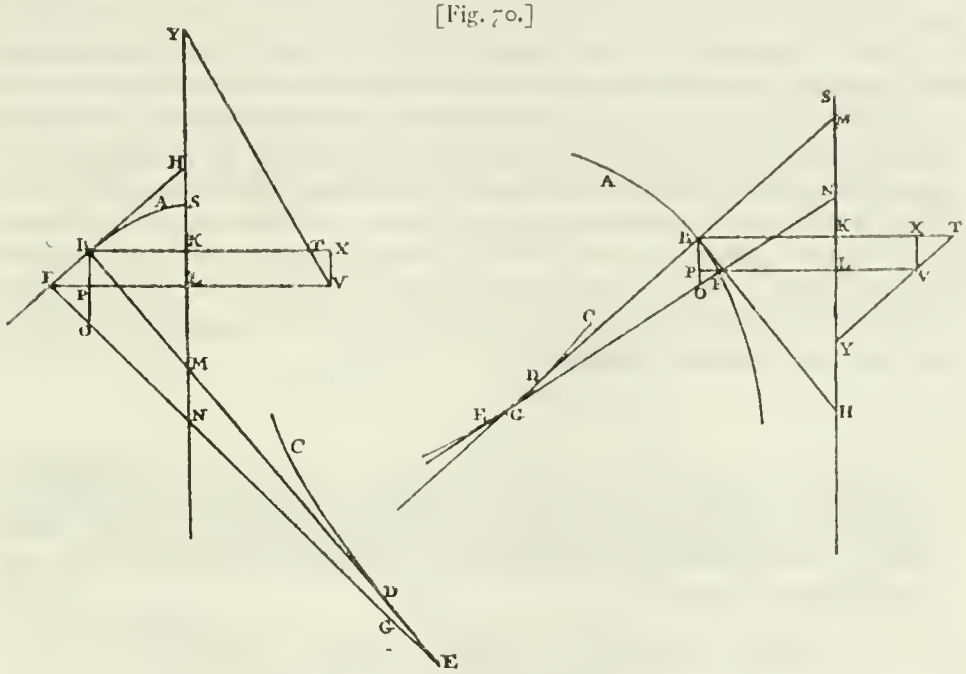
minos esse hujus curvæ, facile apparebit ortum ejus consideranti, quodque in ellipsi est sicut AD ad DE, ita LM ad MD. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Horum autem demonstrationi non immorabimur, sed ad ipsam methodum tradendam pergemus, qua & hæ curvæ ex sectionibus conicis, & aliæ innumeræ ex aliis quibuscunque datis inveniuntur.

PROPOSITIO XI.

Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa describatur; & ostendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica existat, cui recta linea æqualis dari possit [1]).

[Fig. 70.]



Sit curva quæpiam, vel pars ejus, in partem unam inflexa ABF [Fig. 70], & recta KL, ad quam puncta omnia referantur; & oporteat invenire curvam aliam, ut DE, cujus evolutione ipsa ABF describatur.

Ponatur jam inventa; & quoniam tangentes omnes curvæ DE, necesse est occurrere lineæ ABF, ex evolutione descriptæ, ad angulos rectos; patet quoque vicissim eas quæ ipsi ABF ad rectos angulos insistunt, ut BD, FE, tacturas evolutam CDE.

Intelligantur autem puncta B, F, inter se proxima; & siquidem à parte A evolutio incipere ponatur, ulteriusque inde distet F quam B, etiam contactus E ulterius quam D distabit ab A; intersectio vero rectarum BD, FE, quæ est G, cadet ultra punctum D in recta BD. Nam concurrere ipsas BD, FE necesse est, cum curvæ BF ad partem cavam insistant rectis angulis. (p. 82).

De l'évolution des courbes.

Or, d'autant que le point F ſera plus proche du point B, d'autant plus rapprochés ſeront apparemment auſſi les points D, G et E; par conſéquent, ſi l'intervalle BF eſt conſidéré comme infiniment petit, les trois points nommés devront être conſidérés comme n'en formant qu'un ſeul; en outre, lorſqu'on tire la droite BH qui touche la courbe en B, celle-ci ſera eſtimée être une tangente en F auſſi. Soit BO parallèle à KL et BK, FL des perpendiculaires ſur cette dernière; puiſſe FL couper la droite BO en P et ſoient marqués les points M et N où les droites BD et FE coupent KL. Comme alors le rapport BG : GM eſt égal au rapport BO : MN, le dernier étant donné, le premier ſera également connu: et comme la droite BM eſt donnée en grandeur et en poſition, le point G ſitué ſur le prolongement de BM ſera également donné; et ce point eſt identique avec le point D de la courbe CDE puiſque, comme nous l'avons dit, G et D coïncident [1]). Or, le rapport BO : MN eſt donné en effet, directement dans le cas de la cycloïde où nous l'avons examiné en premier lieu (et où nous avons trouvé qu'il eſt de 2 : 1 [2])), par la compoſition de deux rapports donnés dans les autres courbes que nous avons priſes en conſidération juſqu'aujourd'hui. Car puiſque le rapport BO : MN eſt compoſé des rapports BO : BP, ou NH : LH, et BP ou KL : MN, il eſt clair que ſi ces deux rapports ſont donnés, la raiſon compoſée des deux BO : MN ſera également connue. Mais il apparaîtra bientôt que ces deux rapports ſont donnés dans toutes les courbes géométriques, et que par conſéquent on peut toujours leur aſſigner des courbes par l'évolution deſquelles elles peuvent être décrites et qui ſont par conſéquent rectifiables.

---

[1]) En transposant ce calcul dans les notations modernes — comparez sur ce sujet la p. 44 de l'Avertissement qui précède — on peut écrire, comme le disent la p. 143 du T. III des „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" de M. Cantor (Deuxième éd. Leipzig, Teubner 1901) et la note 70 de la traduction allemande de l'„Hor. osc." par A. Heckscher et A. v. Oettingen publiée en 1913:

$$BO = BP + PO = BP\left[1 + \left(\frac{PF}{BP}\right)^2\right] = \Delta x\left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

donc
$$\lim. BO = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx;$$

$$MN = KL + LN - KM = \Delta x + \Delta\,(\text{sous-normale}).$$

La sous-normale étant $y\frac{dy}{dx}$, on a

$$d\left(y\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2},$$

donc
$$\lim. MN = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx + y\frac{d^2y}{dx^2}\,dx.$$

Comme BG : MG = BO : MN, on a donc

Quanto autem punctum F ipsi B propinquius fuerit, tanto propius quoque puncta D, G & E convenire apparet; ideoque, si interstitium BF infinite parvum intelligatur, tria dicta puncta pro uno eodemque erunt habenda; ac præterea, ductâ rectâ BH, quæ curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F censebitur. Sit BO parallela KL, & in hanc perpendiculares cadant BK, FL: secetque FL rectam BO in P, & sint puncta notata M, N, in quibus rectæ, BD, FE, occurrant ipsi KL. Quia igitur ratio BG ad GM est eadem quæ BO ad MN, data hac dabitur & illa; & quia recta BM datur magnitudine ac positione, dabitur & punctum G in producta BM, sive D in curva CDE, quia G & D in unum convenire diximus [1]). Datur autem ratio BO ad MN, simpliciter quidem in Cycloide, ubi primùm omnium illam investigavimus, invenimusque duplam [2]); in aliis vero curvis, quas hactenus examinavimus, per duarum datarum rationum compositionem. Nam quia ratio BO ad MN componitur ex rationibus BO ad BP, sive NH ad LH, & ex BP sive KL ad MN; patet, si rationes hæ utræque dentur etiam ex iis compositam rationem BO ad MN datum iri. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in sequentibus patebit; ac proinde iis semper curvas adsignari posse, quarum evolutione describantur, quæque ideo ad rectas lineas sint reducibiles. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

$$\lim. \frac{BG}{MG} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}},$$

d'où l'on tire

$$\lim. \frac{BG}{BG - MG} \text{ ou } \lim. \frac{BG}{BM} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-y\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

La normale BM étant

$$x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \text{ il en résulte}$$

$$\lim. BG = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ rayon de courbure.}$$

Vers 1694 Jacques Bernoulli réussit à trouver pour ce rayon l'expression équivalente $\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ („Jac. B. Curvatura Laminæ elasticæ. Ejus identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti etc.", p. 264 des Acta Eruditorum de Leipzig de 1694).

[3]) Voir le § 3 à la p. 145 du T. XVII; voir aussi la note 2 de la p. 142 du même Tome et la note 1 de la p. 404 du T. XIV.

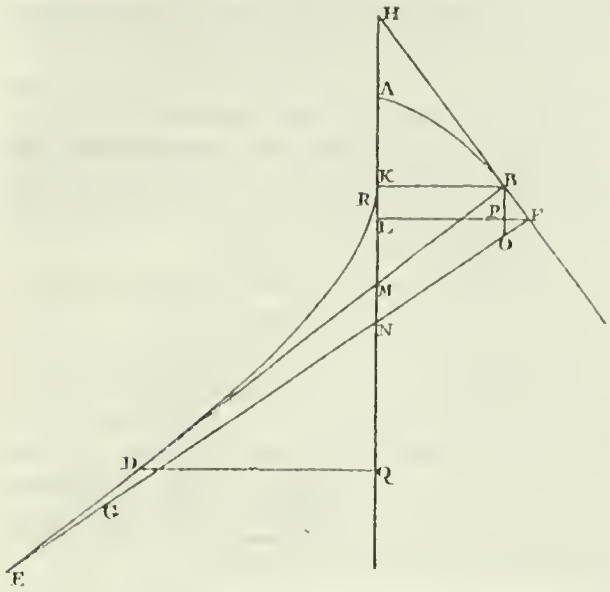
De l'évolution des courbes.

Suppoſons d'abord [Fig. 71] que ABF ſoit une parabole de ſommet A et d'axe AQ. Puiſque les lignes BM et FN ſont normales à la parabole et BK et FL à l'axe AQ, d'après une propriété de la parabole, MK et NL ſeront chacune égale à la moitié du latus rectum; et en retranchant la partie commune LM on aura KL = MN. Par conſéquent, attendu que le rapport BG : GM eſt compoſé des rapports NH : HL et KL : MN, comme il a été dit, et que le dernier des deux eſt de 1 : 1, il eſt évident que BG : GM = NH : HL; et, par diviſion, BM : MG = NL : LH, ou MK : KH; car LH et KH ſont conſidérées comme identiques à cauſe de la proximité des points B et F. Or, le rapport MK : KH eſt donné, lorſque le point B l'eſt puiſque MK et KH ſont données chacune en grandeur: MK eſt égale à la moitié du latus rectum, et KH = 2KA. La droite BM eſt auſſi donnée en poſition et en grandeur. Par conſéquent MG ſera auſſi donnée et le point G ou D de la courbe RDE également: ce point eſt trouvé en prolongeant BM juſqu'en G de telle manière qu'on ait: BM : MG = $\frac{1}{2}$ latus rectum: 2KA.

De cette manière, un nombre quelconque de points, outre B, ayant été pris ſur la parabole ABF, autant de points de la ligne RDE ſeront trouvés de la même manière; par là même il eſt évident que la ligne RDE eſt géométrique et l'on connaît une de ſes propriétes d'où les autres peuvent être déduites. Par exemple, ſi nous voulons demander enſuite, par quelle équation s'exprime la relation de tous les points de la courbe CDE [3]) à la droite AQ, DQ étant une perpendiculaire ſur AQ, le latus rectum de la parabole ABF étant appelé a, AK b, AQ x et QD y, voici ce que nous aurons. Puiſque BM : MD, c. à. d. KM : MQ, = $\frac{1}{2}a : 2b$, et que KM = $\frac{1}{2}a$, MQ ſera auſſi égale à $2b$. Or, MA = $\frac{1}{2}a + b$. Par conſéquent AQ ou $x = 3b + \frac{1}{2}a$. D'où $b = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$. Enſuite, comme MK^2 ou $\frac{1}{4}a^2 : KB^2$ ou $ab = MQ^2$ ou $4b^2 : QD^2$, on aura QD^2 ou $y^2 = \frac{16b^3}{a}$. Et, en ſubſtituant à b l'expreſſion $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$ qui a été trouvée égale à lui, on obtiendra: $y^2 = 16(\frac{1}{3}x - 6a)^3 : a$. Par conſéquent $\frac{27}{16}ay^2 = (x - \frac{1}{2}a)^3$. Prenons ſur l'axe de la parabole AR = $\frac{1}{2}a$; on aura alors RQ = $x - \frac{1}{2}a$. Il apparaît donc que la courbe CD [1]) eſt d'une telle nature que le cube de la ligne RQ eſt toujours égal à un parallélépipède dont la baſe eſt le carré de QD et la hauteur $\frac{27}{16}a$; et

[1]) Lisez RDE [Fig. 71].

[Fig. 71.]



Ponatur primo parabola esse ABF [Fig. 71], cujus vertex A, axis AQ. Cum igitur lineæ BM, FN, sint parabolæ ad angulos rectos; ductæque sint ad axem AQ perpendiculares BK, FL; erunt, ex proprietate parabolæ, singulæ MK, NL dimidio lateri recto æquales; & ablata communi LM, æquales inter se KL, MN. Hinc, quum ratio BG ad GM componatur ex rationibus NH ad HL, & KL ad MN, uti dictum fuit, sitque earum posterior ratio æqualitatis, liquet rationem BG ad GM fore eandem quæ NH ad HL; & dividendo, BM ad MG, eandem quæ NL ad LH, sive MK ad KH; nam LH, KH pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F. Data autem est ratio MK ad KH, dato puncto B; quoniam tam MK, quam KH dantur magnitudine; nam MK æquatur dimidio lateri recto, KH vero duplæ KA. Dataque etiam est positione & magnitudine recta BM. Ergo & MG data erit, adeoque & punctum G, sive D, in curva RDE; quod nempe invenitur productâ BM usque in G, ut sit BM ad MG sicut $\frac{1}{2}$ lateris recti ad duplam KA. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE. (p. 83).

Et sic quidem, adsumptis in parabola ABF aliis quotlibet punctis præter B, totidem quoque puncta lineæ RDE, simili ratione, invenientur; atque hoc ipso lineam RDE geometricam esse constat, unáque proprietas ejus innotescit, ex qua cæteræ deduci possunt. Ut si inquirere deinde velimus, quanam æquatione exprimatur relatio punctorum omnium curvæ CDE [1]) ad rectam AQ: ducta in hanc perpendiculari DQ, vocatoque latere recto parabolæ ABF, a; AK, b; AQ, x; QD, y. Quoniam ratio BM ad MD, hoc est, KM ad MQ, est ea quæ $\frac{1}{2}a$ ad $2b$, estque ipsa KM ∞ $\frac{1}{2}a$, erit & MQ æqualis $2b$. Est autem MA ∞ $\frac{1}{2}a + b$. ergo AQ sive x æqualis $3b + \frac{1}{2}a$. Unde $b \infty \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$. Porro quoniam, sicut quadratum MK, hoc est, $\frac{1}{4}aa$ ad quadratum KB, hoc est, ab, ita qu. MQ, hoc est, $4bb$ ad qu. QD; erit qu. QD, sive $yy \infty \frac{16b^3}{a}$. Ubi, si in locum b substituatur $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$, quod illi æquale inventum est, fiet $yy \infty 16.$ cub. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$ divisis per a. Ac proinde $\frac{27}{16}ayy \infty$ cubo ab $x - \frac{1}{2}a$. Accipiatur AR in axe parabolæ ∞ $\frac{1}{2}a$; eritque RQ ∞ $x - \frac{1}{2}a$. Curvam igitur CD ejus naturæ esse liquet, ut semper cubus lineæ RQ æquetur parallelepipedo, cujus basis qu. QD, altitudo $\frac{27}{16}a$;

DE L'ÉVOLUTION DES COURBES.

que par conſéquent cette courbe eſt la paraboloïde dont nous avons fait voir plus haut que la parabole AB eſt la développante, paraboloïde dont le latus rectum eſt égal à $\frac{27}{16}$ fois celui de la parabole AB. En effet, s'il en eſt ainſi ſon latus rectum devient égal à $\frac{16}{27}$ fois celui de la paraboloïde, comme il a été trouvé en cet endroit.

Or, il eſt manifeſte de quelle manière on peut trouver le rapport OB : BP ou NH : HL, non ſeulement lorsque ABF eſt une parabole, mais encore lorsque c'eſt une autre courbe géométrique quelconque. Car il ſuffira de mener une tangente à la courbe au point conſidéré F [Fig. 70] et de prendre FN perpendiculaire à FH, par quoi NH et HL ſeront données et par conſéquent auſſi leur rapport.

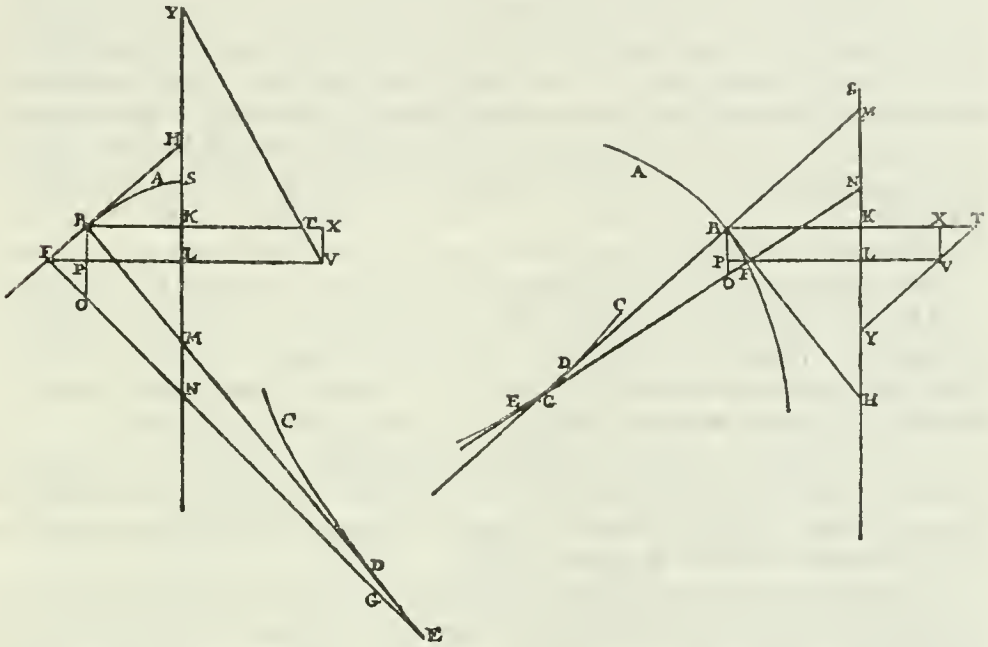
Mais il n'eſt pas auſſi évident comment le rapport KL : MN peut être trouvé; toutefois nous montrerons comme ſuit que cela eſt toujours poſſible.

Soient les droites KT et LV perpendiculaires à KL, ſoit KT = KM, LV = LN, et tirons VX parallèle à LN et rencontrant KT en X. Vu que la différence de LK et de NM eſt toujours la même que celle de LN et de KM, c. à. d. que celle de LV et de KT, et que la différence de LV et de KT eſt égale à XT, et que XV = LK, il en réſulte que NM eſt égale ou bien à VX + XT ou bien à VX — XT. Par conſéquent, ſi le rapport VX : XT eſt donné, le rapport VX : VX + XT ou VX : VX — XT, en d'autres termes celui de VX ou LK à MN ſera également donné.

ac proinde ipſam paraboloidem eſſe, cujus evolutione deſcribi parabolam AB ſupra oſtendimus; cujus nimirum paraboloidis latus rectum æquetur $\frac{27}{16}$ lateris recti parabolæ AB. tunc enim hujus latus rectum æquale ſit $\frac{16}{27}$ lateris recti paraboloidis, quemadmodum ibi fuit definitum. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quomodo porro ratio OB ad BP, ſive NH ad HL, non tantum cum ABF parabola eſt, ſed etiam alia quælibet curva geometrica, ſemper inveniri poſſit manifeſtum eſt. Quoniam tantum recta FH ducenda eſt, quæ curvam in adſumpto puncto F tangat (p. 84).

[Fig. 70.]



[Fig. 70], & FN ipſi FH perpendicularis: unde NH & HL datæ erunt, ac proinde ratio quoque earum data.

At non æque liquet quo pacto ratio KL ad MN innoteſcat, quam tamen ſemper quoque reperiri poſſe ſic oſtendemus.

Sint rectæ KT, LV, perpendiculares ſuper KL, ſitque KT æqualis KM, & LV æqualis LN, & ducatur VX parallela LN, quæ occurrat ipſi KT in X. Quoniam ergo ſemper eadem eſt differentia duarum LK, NM, quæ duarum LN, KM, hoc eſt, quæ duarum LV, KT; eſt autem differentiæ ipſarum LV, KT æqualis XT, & XV ipſi LK; erit proinde NM æqualis duabus ſimul VX, XT, vel ei quo VX ipſam XT ſuperat. Atque adeo, ſi data fuerit ratio VX ad XT, data quoque erit ratio VX ad utramque ſimul VX, XT, vel ad exceſſum VX ſupra XT, hoc eſt, data erit ratio VX ſive LK ad NM.

De l'évolution des courbes.

Or, il faut savoir que puisque nous avons pris KT = KM et LV = LN, le lieu des points T, V sera une certaine ligne droite ou courbe donnée. Et si c'est une ligne droite, comme c'est le cas lorsque ABF est une section conique, et KL son axe, il est clair que le rapport VX : XT sera donné, étant donnée la position de la ligne VT qui est le lieu des points V, T, et qu'alors le dit rapport a toujours la même valeur quel que soit l'intervalle KL.

Mais lorsque le lieu est une autre ligne courbe, le rapport VX : XT sera différent selon que l'intervalle KL sera plus grand ou plus petit. Or, il faut examiner la valeur de ce rapport, lorsque nous nous figurons KL infiniment petite, puis que nous avons aussi supposé les points B et F fort proches l'un de l'autre. Pareillement il faut songer que les points V et T interceptent une partie absolument minime de la ligne courbe; d'où il s'ensuit que la droite VT coïncidera avec celle qui touche la courbe en T. Soit donc TY cette tangente: elle peut être construite puisque la courbe sur laquelle se trouvent les points T et V est géométrique [1]). Le rapport YK : KT est donc donné, et par conséquent aussi VX : XT, d'où nous avons montré qu'on peut tirer le rapport LK : NM.

On trouve la nature de la ligne passant par les points T et V en prenant un certain point S sur la droite KL et en appelant SK x et KT y. Car puisque la courbe ABF est donnée et que BM est sa normale, on trouvera ainsi par la méthode des tangentes enseignée par Descartes [2]) la grandeur de la ligne KM que l'on égalera à KT ou y: par cette équation la nature de la courbe TV, à laquelle il faut ensuite mener une tangente, apparaîtra. Mais tout deviendra plus clair par l'exemple suivant.

Soit ABF [Fig. 72] la paraboloïde rectifiée plus haut, savoir celle dont les cubes des perpendiculaires sur la droite SK sont entre eux comme les carrés des abscisses situées sur elle, et qu'on demande de trouver la courbe CDE par l'évolution de laquelle la paraboloïde SBF est décrite.

Premièrement on trouve aisément le rapport BO : BP parce que nous savons que la tangente en B à la paraboloïde peut être construite en prenant SH = $\frac{1}{2}$SK. Comme BM est normale à cette tangente, les lignes MH et HK sont données, et par conséquent aussi leur rapport qui est égal à OB : BP.

---

[1]) Voir sur la construction des tangentes aux courbes géométriques les p. 442—448 du T. XIV, notamment la note 6 de la p. 446 sur l'algorithme de Hudde, et la note 3 de la p. 442, où le lecteur est renvoyé à la „Regula" de la p. 315 du T. IV contenue dans la lettre de Huygens à J. de Witt du 25 février 1663.

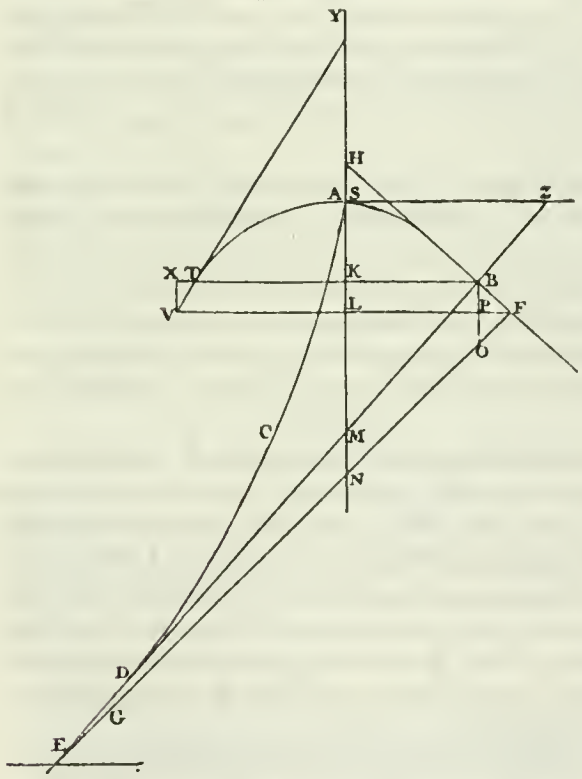
[2]) Dans le second livre de la „Géométrie" (éd. Adam et Tannery, T. VI, p. 413—424); voir la p. 17 du T. XI et la note 10 de la p. 65 du T. XII.

Sciendum eſt autem, quoniam KT ipſi KM, & LV ipſi LN, æquales ſumptæ ſunt, locum punctorum T, V, fore lineam quandam vel rectam vel curvam datam, ut mox oſtendetur. Et ſiquidem ſit linea recta; ut contingit ſi ABF coni ſectio fuerit, & KL axis ejus; conſtat rationem VX ad XT datam fore, data poſitione ipſius lineæ VT, quæ locus eſt punctorum V, T; ſemperque eandem tunc haberi dictam rationem, qualecunque fuerit intervallum KL. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE. (p. 85).

At ſi locus alia linea curva fuerit, diverſa erit ratio VX ad XT, prout majus minusve fuerit intervallum KL. Inquirendum eſt autem quænam futura ſit iſta ratio, cum KL infinite parvum imaginamur, quoniam & puncta B, F, proxima invicem poſuimus. Similiter itaque & puncta V, T, lineæ curvæ minimam particulam intercipere intelligendum eſt; unde recta VT, cum ea quæ in T curvam contingit, coincidet. Sit ergo tangens illa TY; poteſt enim duci quoniam curva, ad quam ſunt puncta T, V, geometrica eſt [1]). Ratio igitur YK ad KT data erit, adeoque & VX ad XT. ex qua etiam rationem LK ad NM dari oſtendimus.

Quænam vero ſit linea ad quam ſunt puncta T, V, invenitur ponendo certum punctum S in recta KL, & vocando SK, x; KT, y. Nam quia data eſt curva ABF, eique BM ad angulos rectos ducta, invenietur inde quantitas lineæ KM, per methodum tangentium à Carteſio traditam [2]), quæ ipſi KT, ſive y æquabitur, & ex ea æquatione, natura curvæ TV innoteſcet, ad quam deinde tangens ducenda eſt. Sed clariora omnia fient ſequenti exemplo.

[Fig. 72.]



Sit ABF [Fig. 72] paraboloides illa, cui ſuperius rectam æqualem invenimus; in qua nempe cubi perpendicularium in rectam SK, ſint inter ſe ſicut quadrata ex ipſa SK abſciſſarum. Et oporteat invenire curvam CDE cujus evolutione paraboloides SBF deſcribatur.

Hic primum ratio BO ad BP facile invenitur, quia tangentem paraboloidis in puncto B duci ſcimus, ſumpta SH æquali $\frac{1}{2}$ SK. Cui tangenti cum BM ad angulos rectos inſiſtat, dantur jam lineæ MH, HK, ac proinde earum inter ſe ratio, quæ eſt eadem quæ OB ad BP.

De l'évolution des courbes.

Pour calculer ensuite le rapport de BP ou KL à MN tirons normalement à KL les droites KT et LV égales respectivement à KM et LN dont la dernière sera la plus grande des deux; et soit VX parallèle à LK. Puisqu'alors KL + LN — KM [1]) = MN — où l'on peut aussi de XV + VL ou XV + XK retrancher KT, ce qui donne le reste VX + XT — on aura VX + XT = MN; partant le rapport KL : MN sera égal à VX : VX + XT. Et pour trouver la valeur de ce rapport lorsque l'intervalle KL est extrêmement petit, il faut suivant ce qui a été dit plus haut chercher quel est le lieu ou la ligne des points T, V. Appelons à cet effet a le latus rectum de la paraboloïde et soit SK = x, KT = y.

Comme KH, KB et KM sont alors proportionnelles et que HK = $\frac{3}{2}x$, tandis que d'après la nature de la paraboloïde KB = $\sqrt[3]{ax^2}$, KM ou KT deviendra égale à $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2x}$. Donc $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2x} = y$, partant $\frac{8}{27}a^2x = y^3$. D'où il apparaît que le lieu des points T, V est cette paraboloïde que les géomètres appellent cubique. On y mènera une tangente au point T en prenant SY = 2SK, et en joignant Y et T par une droite. Le rapport VX : VX + XT, que nous avons dit être égal à KL : MN, sera maintenant celui de YK à YK + KT. Or, ce dernier rapport est donné, par conséquent aussi le rapport KL : MN. Mais il a été démontré que le rapport OB : PB est également connu. Comme le rapport BD : DM est composé des deux rapports en question, ainsi que cela est apparu plus haut, le rapport BD : DM sera lui aussi connu; et, par division, on connaîtra le rapport BM : MD et par conséquent aussi le point D de la courbe DE.

Or, c'est ainsi qu'on parviendra à la construction la plus courte. KT ou KM a été appelée y. On aura donc MH = $y + \frac{3}{2}x$. Et MH : HK, ou OB : BP, = $y + \frac{3}{2}x : \frac{3}{2}x$, ou en doublant les termes = $2y + 3x : 3x$. Ensuite, parce que YK = $3x$, on aura YK : YK + KT, ou YK : KL + MN d'après ce qui a été dit plus haut, = $3x : 3x + y$. Mais nous avons dit que le rapport BD : DM est composé des rapports OB : BP et KL : MN. Le rapport BD : DM sera donc composé des rapports $2y + 3x : 3x$ et $3x : 3x + y$, et sera par conséquent égal à $2y + 3x : 3x + y$; et, par division, on aura BM : MD = $y : 3x + y$.

Soit SZ perpendiculaire à SK et que MB prolongée la coupe en Z. Comme le rapport BM : MD a été trouvé égal à $y : y + 3x$, c. à. d. à MK : MK + 3 KS, et qu'à ce dernier rapport est égal le rapport MB : MB + 3BZ. on aura par conséquent MB : MD = MB : MB + 3BZ. D'où il appert que MD doit être prise égale à MB + 3BZ. Et de la même manière on pourra trouver un nombre quelconque de points de la courbe CDE. Un arc quelconque de cette courbe tel que DS sera égal à la droite DB qui est normale à la paraboloïde SAB. Il est certain que la courbe trouvée est géométrique et, si nous le voulons, nous pouvons exprimer par une équation la relation de tous ses points à ceux de l'axe SK.

De la même manière, si nous faisons cette recherche pour la paraboloïde ou parabole cubique [Fig. 73] dont les cubes des ordonnées perpendiculaires à l'arc sont

Ut autem ratio BP, ſive KL ad MN innoteſcat, ponantur ad KL perpendiculares rectæ KT, LV, æquales ſingulis KM, LN, ſitque VX parallela LK. Jam quia ex duabus ſimul KL, LN, auferendo KM, relinquitur MN [1]); hoc eſt, auferendo ex duabus XV, VL, ſive XV, XK, ipſam KT; hinc autem relinqui apparet VX & XT: erunt igitur hæ duæ VX, XT ipſi MN æquales, ac proinde ratio KL ad MN eadem quæ VX ad duas ſimul VX, XT. Ut autem hæc ratio innoteſcat cum intervallum KL eſt minimum; oportet ſecundum prædicta inquirere quis ſit locus, ſive linea ad quam ſunt puncta T, V. Quod ut fiat ſit latus rectum paraboloidis ABF ∞ a; SK ∞ x; KT ∞ y. De linearum curvarum evolutione.

Quia igitur proportionales ſunt KH, KB, KM, eſtque HK ∞ | $\frac{1}{2}x$: KB ex natura (*p.* 86). paraboloidis æqualis R. cub. axx: fiet KM, hoc eſt KT ∞ $\frac{2}{3}$ R. cub. aax ∞ y, ac proinde $\frac{8}{27}$ aax ∞ y^3. Unde patet locum punctorum T, V, eſſe paraboloidem illam, quam cubicam vocant geometræ. Cui proinde ad T tangens ducetur, ſumptâ SY duplâ ipſius SK, junctâque YT. Et jam quidem ratio VX ad duas ſimul VX, XT, quam diximus eandem eſſe ac KL ad MN, erit ea quæ YK ad utramque ſimul YK, KT. Hæc autem ratio data eſt, ergo & ratio KL ad MN. Sed & rationem OB ad PB datam eſſe oſtenſum eſt. Ergo, cum ex duabus hiſce componatur ratio BD ad DM, ut ſupra patuit, dabitur & hæc; & dividendo, ratio BM ad MD; adeoque & punctum D in curva DE.

Ad conſtructionem autem breviſſimam hoc pacto hic perveniemus. KT ſive KM dicta ſuit y. Itaque MH erit $y + \frac{3}{2}x$. Et MH ad HK, ſive OB ad BP, ut $y + \frac{3}{2}x$ ad $\frac{3}{2}x$. ſive, ſumptis omnium duplis, ut $2y + 3x$ ad $3x$. Deinde quia YK ∞ $3x$, erit YK ad YK + KT, ſive per prædicta, KL ad MN, ut $3x$ ad $3x + y$. Atqui ex rationibus OB ad BP, & KL ad MN, componi diximus rationem BD ad DM. Ergo ratio BD ad DM erit compoſita ex rationibus $2y + 3x$ ad $3x$, & $3x$ ad $3x + y$; ideoque erit ea quæ $2y + 3x$ ad $3x + y$. & dividendo, ratio BM ad MD, eadem quæ y ad $3x + y$.

Sit SZ perpendicularis ad SK, eique occurrat MB producta in Z. | Quia ergo ratio (*p.* 87). BM ad MD inventa eſt ea quæ y ad $y + 3x$, hoc eſt quæ MK ad MK + 3 KS. Sicut autem MK ad MK + 3 KS, ita MB ad MB + 3 BZ; erit proinde MB ad MD ut MB ad MB + 3 BZ. Unde liquet MD æqualem ſumendam ipſi MB + 3 BZ. Atque ita quotlibet puncta curvæ CDE invenire licebit. Cujus curvæ portio quælibet ut DS, rectæ DB, quæ paraboloidi SAB ad angulos rectos occurrit, æqualis erit. Conſtat autem geometricam eſſe, & ſi velimus, poſſumus æquatione aliqua relationem exprimere punctorum omnium ipſius ad puncta axis SK.

Simili modo autem, ſi inquiramus in paraboloide illa ſive parabola cubica [Fig. 73], in qua cubi ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut portiones axis abſciſſæ,

---

[1]) Note manuscrite de Huygens: „Supponitur hic rectam LN majorem esse quam KM. quod melius fuerat antea probari, etsi verum est". 's Gravesande donne cette preuve dans son édition de 1724. Le lecteur vérifiera aisément que dans la courbe considérée la sous-normale est d'autant plus grande que le point considéré de la courbe est plus éloigné du sommet.

De l'évolution des courbes.

entre eux comme les abſciſſes qui ſont ſituées ſur lui, nous trouverons que la courbe par l'évolution de laquelle elle eſt décrite et qui eſt par conſéquent rectifiable, eſt déterminée par points par une conſtruction nullement plus difficile. En effet, ſoit SAB cette parabole cubique, SM ſon axe (or, c'eſt improprement qu'on parle d'un axe dans le cas de cette courbe, puiſque ſa forme eſt telle que, lorſqu'on tire SZ perpendiculairement à SM, SZ a des parties ſemblables de la courbe ſituées de part et d'autre). Tirons par un point B quelconque pris ſur la paraboloïde la droite BD qui lui ſoit normale et coupe l'axe en M, la droite SZ en Z. Prenons enſuite BD $= \frac{1}{2}$BM $+ \frac{3}{2}$ BZ. D ſera alors un des points de la courbe cherchée RD ou RI par l'évolution de laquelle, après qu'on y a encore ajouté une certaine droite RA, la paraboloïde SAB ſera décrite. Or, il y a ici, ce qui mérite d'être remarqué, et ce qui arrive auſſi dans le cas de certaines autres paraboloïdes de ce genre, deux évolutions de ſens oppoſés, dont l'une et l'autre ſe fait à partir du point déterminé A; de ſorte que par l'évolution de ARD prolongée juſqu'à l'infini la branche infinie ABF de la paraboloïde eſt décrite, mais par l'évolution de ARI qui s'étend également juſqu'à l'infini, ſeulement l'arc AS. Quant au point A, on le détermine en prenant SP de telle grandeur que ſon rapport au latus rectum de la paraboloïde ſoit égal à celui de l'unité à $\sqrt[8]{91125}$ (lequel nombre eſt le cube de 45) et en tirant l'ordonnée correſpondante PA. En partant de là, on trouvera enſuite le point R, extrémité commune des deux courbes RD et RI, comme tous les autres points de ces courbes, c.à.d. comme le point D a été trouvé tout-à-l'heure.

Enfin, quelle que ſoit dans la famille des paraboloïdes la courbe SAB, nous avons trouvé qu'on peut toujours avec la même facilité trouver par points une autre courbe par l'évolution de laquelle elle peut être décrite et qui eſt par conſéquent rectifiable. Nous repréſentons donc dans la table qui ſuit, et qui peut s'étendre juſqu'où l'on voudra, la conſtruction univerſelle.

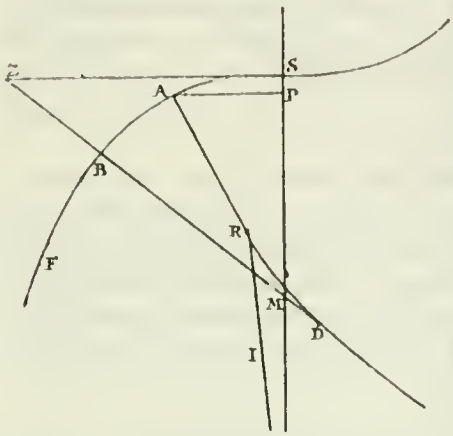
$$\text{Si} \left\{\begin{array}{l} ax = y^2 \\ a^2x = y^3 \\ ax^2 = y^3 \\ ax^3 = y^4 \\ a^3x = y^4 \end{array}\right., \text{ on aura } \left\{\begin{array}{c} \text{BM} + 2\text{BZ} \\ \frac{1}{2}\text{BM} + \frac{3}{2}\text{BZ} \\ 2\text{BM} + 3\text{BZ} \\ 3\text{BM} + 4\text{BZ} \\ \frac{1}{3}\text{BM} + \frac{4}{3}\text{BZ} \end{array}\right\} = \text{BD}.$$

Soit SB [Fig. 74] une parabole ou paraboloïde à ſommet S, et SK l'axe (ou bien une perpendiculaire à l'axe) auquel ſoient rapportés par une équation les points de la paraboloïde. Nous ſuppoſons toujours SK tiré du côté concave, et SZ perpendiculaire à lui. Etant poſée maintenant SK $= x$, BK $= y$, laquelle eſt la perpendiculaire à SK à partir d'un point quelconque, et le latus rectum de la courbe $= a$, la première colonne de la table, celle de gauche, explique la nature de chaque paraboloïde par ſon

inveniemus curvam cujus evolutione deſcribitur, quæque proinde rectæ lineæ æquari poterit, nihilo difficiliori conſtructione per puncta determinari. Nam ſi fuerit illa SAB; axis SM; (dicitur autem improprie axis in hac curva, cum forma ejus ſit ejusmodi, ut ductâ SZ, quæ ſecet SM ad angulos rectos, ea portiones ſimiles curvæ habeat ad partes oppoſitas;) agatur per punctum quodlibet B, in paraboloide ſumptum, recta BD, quæ curvam ad angulos rectos ſecet, axique ejus occurrat in M, rectæ vero SZ in Z. Deinde ſumatur BD æqualis dimidiæ BM, unà cum ſesquialtera BZ. Eritque D unum è punctis curvæ quæſitæ RD vel RI, cujus evolutione, juncta tamen recta quadam RA, deſcribetur paraboloides SAB. Sunt autem hic, quod notatu dignum eſt, quodque in aliis etiam nonnullis harum paraboloidum contingit, duæ evolutiones in partes contrarias, quarum utraque à puncto certo A initium capit; ita ut evolutione ipſius ARD, in infinitum porro continuatæ, deſcribatur paraboloidis pars infinita ABF; evolutione autem totius ARI, ſimiliter in infinitum extenſæ, tantum particula AS. Punctum autem A definitur, ſumptâ SP quæ ſit ad | latus rectum paraboloidis, ſicut unitas ad radicem quadrato-quadraticam numeri 91125, (is cubus eſt ex 45) applicatâque ordinatim PA. Unde porro punctum R, confinium duarum curvarum RD, RI, invenitur ſicut cætera omnia harum curvarum, hoc eſt, ſicut punctum D modo inventum fuit. (p. 88).

De linearum curvarum evolutione.

[Fig. 73.]



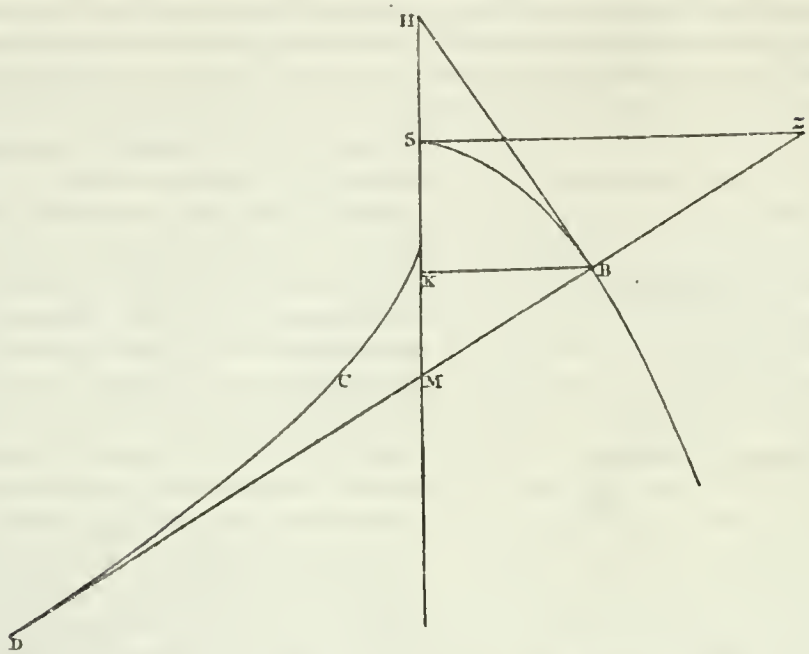
Denique, quæcunque fuerit ex paraboloidum genere curva SAB, ſemper æque facile curvam aliam, cujus evolutione ipſa deſcribatur, quæque propterea rectæ adæquari poſſit, per puncta inveniri comperimus. Atque adeo conſtructionem univerſalem ſequenti tabella exhibemus, quæ quousque libuerit extendi poterit.

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} ax \infty y^2 \\ a^2x \infty y^3 \\ ax^2 \infty y^3 \\ ax^3 \infty y^4 \\ a^3x \infty y^4 \end{array}\right. \quad \text{Erit} \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{BM} + 2\mathrm{BZ} \\ \frac{1}{2}\mathrm{BM} + \frac{3}{2}\mathrm{BZ} \\ 2\mathrm{BM} + 3\mathrm{BZ} \\ 3\mathrm{BM} + 4\mathrm{BZ} \\ \frac{1}{3}\mathrm{BM} + \frac{4}{3}\mathrm{BZ} \end{array}\right\} \infty \mathrm{BD}.$$

Sit SB [Fig. 74] parabola, vel paraboloidum aliqua, cujus vertex S; recta SK vel axis, vel axi perpendicularis, ad quam referuntur æquatione puncta paraboloidis; & ipſa quidem SK ſemper ad partem cavam ducta intelligitur; cui perpendicularis SZ. Ponendo jam SK ∞ x; BK ∞ y, quæ à puncto quovis curvæ perpendicularis eſt ipſi SK; & latere recto curvæ ∞ a; prior pars tabellæ, quæ ad ſiniſtram eſt, naturam

De l'évolution des courbes.

[Fig. 74.]



équation. À ces équations correſpondent dans la colonne droite les longueurs de la ligne BD laquelle placée normalement ſur la courbe SB fournira le point D de la courbe cherchée CD. Par exemple, ſi SB eſt la parabole qui provient de la ſection du cône, nous ſavons que ſon équation eſt la première de la table, ſavoir $ax = y^2$, à laquelle correſpond dans l'autre colonne BM + 2 BZ = BD. D'où eſt connue la longueur de la ligne BD, et par conſéquent auſſi la méthode de trouver un nombre quelconque de points de la courbe CD. Il a été démontré plus haut que dans ce cas-ci cette développée eſt une paraboloïde, ſavoir celle dont l'équation eſt la troiſième de cette table.

Or, la table eſt conſtruite de cette manière qu'on donne à BM pour coëfficient l'expoſant de x dans l'équation, et à BZ celui de y, et qu'on diviſe enſuite la ſomme des deux termes par l'expoſant de a [1]).

Outre ces lignes paraboloïdiques nous en avons trouvé d'autres d'où l'on déduit des courbes rectifiables par une conſtruction à peu près ſemblable. Elles reſſemblent à des hyperboles en ceci qu'elles ont des aſymptotes qui toutefois font toujours entre elles un angle droit. Nous conſidérons comme la première d'entre elles l'hyperbole ordinaire qui provient de la ſection du cône.

Pour expliquer la nature des autres, ſoient PS et KS [Fig. 75] les aſymptotes de la courbe AB, comprenant entre elles un angle droit, et tirons à partir d'un point

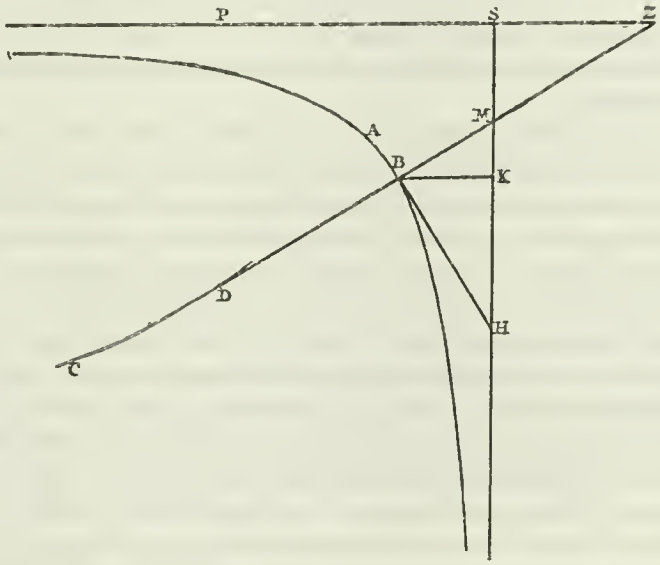
ſingularum paraboloidum ſingulis æquationibus explicat. Quibus reſpondent in parte dextra quantitates lineæ BD, quæ ſi curvæ SB inſiſtat ad angulos rectos, exhibitura ſit punctum D | in curva quæſita CD. Exempli gratia, ſi SB eſt parabola quæ ex coni ſectione ſit, ei ſcimus convenire æquationem tabellæ primam, $ax \infty y^2$; cui reſpondet ab altera parte BM + 2BZ ∞ BD. Unde longitudo lineæ BD cognoſcitur, adeoque inventio quotlibet punctorum curvæ CD. Quam quidem, hoc caſu, paraboloidem eſſe ſupra demonſtratum fuit, eam nempe, cujus æquatio tertia eſt hujus tabellæ. De linearum curvarum evolutione. (p. 89).

Conſtruitur autem tabella hoc pacto, ut BM ſumatur multiplex ſecundum numerum qui eſt exponens poteſtatis x in æquatione; BZ vero, multiplex ſecundum exponentem poteſtatis y; ex his autem utrisque compoſitæ accipiatur pars denominata ab exponente poteſtatis a [1]).

Præter haſce autem paraboloides lineas, alias item invenimus, à quibus, non abſimili conſtructione, deducuntur curvæ rectis comparabiles. Aſſimilantur autem hyperbolis, eo quod aſymptotos ſuas habent, ſed tantum angulum rectum conſtituentes. Et harum primam quidem ſtatuimus hyperbolam ipſam, quæ eſt è coni ſectione.

Reliquarum vero naturam ut explicemus; ſunto PS, SK [Fig. 75], aſymptoti curvæ AB, rectum angulum comprehendentes, & à curvæ puncto quolibet B ducatur

[Fig. 75.]



[1]) L'équation de la „paraboloïde" ou parabole de degré supérieur étant $y^a = kx^b$, où k est une droite à la puissance $a-b$, — c'est la notation dont nous nous sommes servis dans les Tomes précédents; voir la note 2 de la p. 147 du T. XVII —, on trouve en effet $BD = \frac{b.BM + a.BZ}{a - b}$.

De l'évolution des courbes.

quelconque B de la courbe la droite BK parallèle à PS. Soit SK $= x$ et KB $= y$. Dans le cas où AB eſt une hyperbole nous ſavons que le rectangle des lignes SK et KB, c.à.d. le rectangle xy, eſt toujours égal au même carré que nous pouvons appeler a^2.

L'hyperboloïde qui la ſuit ſera celle pour laquelle le ſolide exprimé par la multiplication de la ligne SK par la hauteur KB, c. à. d. le ſolide x^2y, eſt égal à un certain cube que nous pouvons déſigner par a^3. Il exiſte encore d'autres hyperboloïdes en nombre infini du même genre; la table ſuivante exprime la propriété de chacune d'elles par ſon équation, et en même temps la méthode de conſtruction de la courbe DC par l'évolution de laquelle elle eſt produite.

$$\text{Si}\ \begin{cases} xy = a^2 \\ x^2y = a^3 \\ xy^2 = a^3 \\ x^3y = a^4 \\ xy^3 = a^4 \end{cases},\ \text{on aura}\ \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{BM} + \frac{1}{2}\mathrm{BZ} \\ \frac{2}{3}\mathrm{BM} + \frac{1}{3}\mathrm{BZ} \\ \frac{1}{3}\mathrm{BM} + \frac{2}{3}\mathrm{BZ} \\ \frac{3}{4}\mathrm{BM} + \frac{1}{4}\mathrm{BZ} \\ \frac{1}{4}\mathrm{BM} + \frac{3}{4}\mathrm{BZ} \end{cases} = \mathrm{BD}.$$

La droite DBMZ eſt normale, comme auparavant, à la courbe AB et coupe les aſymptotes SK et SP en M et Z. Si par exemple la courbe propoſée eſt l'hyperbole AB dont l'équation eſt $xy = a^2$, il faut prendre BD $= \frac{1}{2}$BM $+ \frac{1}{2}$BZ, comme la table l'indique; le point D ſe trouvera alors ſur la courbe cherchée DC, dont on pourra trouver d'autres points en nombre quelconque de la même manière et dont chaque partie peut être égalée à une ligne droite. Et cette courbe DC eſt la même que celle dont nous avons exprimé plus haut par une équation la relation à l'axe de l'hyperbole. Or, la conſtruction de cette table eſt entièrement la même que celle de la table précédente [1]).

Au reſte, puiſqu'il faut, tant pour la conſtruction de ces courbes que pour celles qui proviennent des paraboloïdes, tirer les lignes DBZ coupant au point donné B les courbes AB ou leurs tangentes à angles droits, nous dirons en général comment on trouve ces tangentes. À cet effet il faut conſidérer dans l'équation qui exprime la nature de chaque courbe — ces équations ſont données dans les deux tables précédentes — quels ſont les expoſants de x et de y et prendre SK : KH = expoſant de x : expoſant de y. Une droite qui joint les points H et B touchera alors la courbe au point B. Dans le cas de la troiſième hyperboloïde par exemple, dont l'équation eſt $xy^2 = a^3$, comme l'expoſant de x eſt 1 et celui de y 2, il faut que SK : KH = 1 : 2 [2]). Ceux qui ſe ſont appliqués à l'art analytique connaiſſent la démonſtration de cette propoſition : ils ont commencé depuis longtemps à conſidérer ces lignes et ont meſuré les lieux plans et ſolides non ſeulement de ces paraboloïdes, mais auſſi de quelques eſpaces s'étendant juſqu'à l'infini compris entre les hyperboloïdes et leurs aſymptotes. C'eſt ce que nous pourrions exécuter nous auſſi d'après une méthode facile et univerſelle, la démonſtration étant dérivée de la ſeule propriété des tangentes [3]). Mais ces choſes ne ſont pas de ce lieu.

---

[1]) L'équation de l'hyperbole de degré ſupérieur étant $x^by^a = k$, où k est une droite à la puissance

BK parallela PS, ſitque SK ∞ x; KB ∞ y. Si igitur hyperbola ſit AB, ſcimus rectangulum linearum SK, KB, hoc eſt, rectangulum xy ſemper eidem quadrato æquale eſſe, quod vocetur aa. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Proxima vero hyperboloidum erit, in qua ſolidum ex quadrato | lineæ SK, in altitudinem KB ductum, hoc eſt, ſolidum xxy, cubo certo æquabitur, qui vocetur a^3. (p. 90). Atque ita innumeræ aliæ hujus generis hyperboloides exiſtunt, quarum proprietatem ſequens tabella ſingulis æquationibus exhibet, ſimulque rationem conſtruendi curvam DC, cujus evolutione quæque generetur.

$$\text{Si}\ \begin{cases} xy \infty a^2 \\ x^2y \infty a^3 \\ xy^2 \infty a^3 \\ x^3y \infty a^4 \\ xy^3 \infty a^4 \end{cases} \text{Erit}\ \begin{cases} \frac{1}{2}\text{BM} + \frac{1}{2}\text{BZ} \\ \frac{2}{3}\text{BM} + \frac{1}{3}\text{BZ} \\ \frac{1}{3}\text{BM} + \frac{2}{3}\text{BZ} \\ \frac{3}{4}\text{BM} + \frac{1}{4}\text{BZ} \\ \frac{1}{4}\text{BM} + \frac{3}{4}\text{BZ} \end{cases} \infty\ \text{BD}.$$

Recta DBMZ curvam AB, ut antea quoque, ſecat ad angulos rectos, occurritque aſymptotis SK, SP, in M & Z. Si igitur exempli gratia hyperbola fuerit AB, cujus æquatio eſt $xy \infty a^2$, ſumetur BD ∞ $\frac{1}{2}$BM + $\frac{1}{2}$BZ, quemadmodum tabella præcipit. Eritque punctum D in curva DC quæſita, cujus alia quotlibet puncta ſic inveniri poterunt, & portio ejus quælibet rectæ lineæ adæquari. Et hæc quidem eadem illa eſt curva, cujus relationem ad axem hyperbolæ ſuperius æquatione expreſſimus. Conſtructio autem tabellæ hujus plane eadem eſt quæ ſuperioris [1]).

Cæterum, quoniam tum ad harum curvarum, tum ad earum quæ ex paraboloidibus naſcuntur conſtructionem, ducendæ ſunt lineæ DBZ, quæ ad datum punctum B ſecent curvas AB, ſive ipſarum tangentes BH, ad angulos rectos; dicemus in univerſum quomodo hæ tangentes inveniantur. In æquatione itaque, quæ cujusque curvæ naturam explicat, quales æquationes duabus tabellis præcedentibus exponuntur, conſiderare oportet quæ ſint exponentes poteſtatum x & y, & facere ut, ſicut exponens poteſtatis x ad exponentem poteſtatis y, ita ſit SK ad KH [2]). Juncta enim HB curvam in B continget. Velut in tertia hyperboloide, cujus æquatio eſt $xy^2 \infty a^3$: quia exponens poteſtatis x eſt 1, poteſtatis autem y exponens 2; oportet eſſe ut 1 ad 2 ita SK ad KH. Horum autem demonſtrationem noverunt analyticæ artis periti, qui jam pridem omnes has lineas contemplari cœperunt; & non ſolum paraboloidum iſtarum, ſed & ſpatiorum quorundam infinitorum, inter hyperboloides & aſymptotos interjectorum, plana ſolidaque dimenſi ſunt. Quod quidem & nos, facili atque univerſali methodo, expedire poſſemus, ex ſola tangentium proprietate ſumpta demonſtratione [3]). Sed illa non ſunt hujus loci.

$a + b$, on trouve en effet BD $= \dfrac{b.\text{BM} + a.\text{BZ}}{a + b}$.

[2]) Comparez la note 1 de la p. 232 qui précède. D'après la „Regula" citée dans cette note, la soustangente de la courbe $x^b y^a - k = 0$ (KH dans la Fig. 74 du texte) devient $\frac{a}{b}x$ (où x est la droite SK). Donc SK : KH $= b : a$.

[3]) Voir les p. 197—198 et 288—293 (datant de 1657) du T. XIV.

QUATRIÈME PARTIE

DE L'HORLOGE À PENDULE.

Du centre d'oſcillation.

Le très ſavant Merſenne m'a jadis propoſé, comme à beaucoup d'autres, lorſque j'étais encore preſqu'enfant, la recherche des centres d'oſcillation ou d'agitation [1]. C'était alors un problème célèbre entre les géomètres de ce temps ainſi que je le conclus des lettres qu'il m'écrivait et auſſi des écrits de Deſcartes publiés depuis peu, leſquels contiennent la réponſe aux lettres de Merſenne ſur ce ſujet. Il demandait que je trouvaſſe ces centres dans les ſecteurs de cercle, ſuſpendus tant de l'angle que du milieu de l'arc, et oſcillant latéralement, ainſi que dans les ſegments de cercle et dans les triangles, ſuſpendus tantôt du ſommet, tantôt du milieu de la baſe. Ce problème revient à trouver un pendule ſimple — conſiſtant en un poids attaché à un fil — de longueur telle qu'il exécute ſes oſcillations dans le même temps qu'une des figures ſuſpendues dont nous avons parlé. Il me promettait en même temps une grande et enviable récompenſe de mon ouvrage ſi par haſard j'arrivais à ſatiſfaire à ſa demande. Mais il n'obtint alors de perſonne ce qu'il déſirait. Car quant à moi, comme je ne trouvai rien qui m'ouvrît le premier chemin à cette contemplation, repouſſé pour ainſi dire à l'entrée même, je m'abſtins alors d'une plus longue inveſtigation; et ceux qui eſpéraient avoir réuſſi, hommes illuſtres comme Deſcartes [2], Honoré Fabry [3] et d'autres [4], n'atteignirent point le but, excepté dans quelques cas des plus faciles où cependant ils n'ont donné, à mon avis, aucune démonſtration valable. J'eſpère que cela deviendra manifeſte par comparaiſon avec ce que nous enſeignerons ici, ſi par haſard quelqu'un compare ce qui a été publié par eux avec notre préſente théorie, que j'eſtime repoſer d'une part ſur des principes plus certains et que j'ai d'autre part trouvée entièrement conforme aux expériences. L'occaſion de reprendre ces recherches nous fut offerte par la manière de mettre au point les pendules de notre automate en leur appliquant, outre le poids inférieur, un autre poids mobile comme cela a été expliqué dans la deſcription de l'horloge. Reprenant ainſi la queſtion ſous de meilleurs auſpices et depuis le commencement, j'ai enfin triomphé de toutes les difficultés et réſolu non ſeulement les problèmes de Merſenne, mais auſſi d'autres plus

---

[1]) Voir les p. 349 et suiv. du T. XVI.

[2]) Voir sur la règle erronée de 1646 de Descartes pour trouver le centre d'agitation la p. 352 du T. XVI.

HOROLOGII OSCILLATORII (*p.* 91).

Pars Quarta.

De centro Oſcillationis.

Centrorum Oſcillationis, ſeu Agitationis, inveſtigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliiſque multis, doctiſſimus Merſennus propoſuit [1]), celebre admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex litteris ejus ad me datis colligo, nec non ex Carteſii haud pridem editis, quibus ad Merſennianas ſuper his rebus reſponſum continetur. Poſtulabat autem centra illa ut invenirem in circuli ſectoribus, tam ab angulo quam à medio arcu ſuſpenſis, atque in latus agitatis, item in circuli ſegmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media baſi pendentibus. Quod eo redit, ut pendulum ſimplex, hoc eſt, pondus filo appenſum reperiatur ea longitudine, ut oſcillationes faciat temporum eorundem ac figuræ iſtæ, uti dictum eſt, ſuſpenſæ. Simul vero pretium operæ, ſi forte quæſitis ſatisfeciſſem, magnum ſane & invidioſum pollicebatur. Sed a nemine id quod deſiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperirem quo vel primus aditus ad contemplationem eam pateſceret; velut à limine repulſus, longiori inveſtigatione tunc quidem abſtinui. Qui vero rem ſeſe confeciſſe ſperabant viri inſignes, Carteſius [2]), Honoratus Fabrius [3]), aliique [4]), nequaquam ſcopum attigerunt, niſi in paucis quibuſdam facilioribus, ſed quorum tamen demonſtrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifeſtum fore ſpero, ſi quis forte quæ ab illis tradita ſunt, cum noſtris hiſce contulerit; quæ quidem & certioribus principiis demonſtrata arbitror, & experimentis prorſus convenientia reperi. Occaſio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati noſtri temperandorum ratione oblata eſt, dum pondus mobile, præter id quod in imo eſt, illis applico, ut in deſcriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auſpiciis atque à prima origine rem exorſus, tandem difficultates omnes ſuperavi, nec tantum problematum Merſennianorum ſolutionem, ſed alia quoque

---

3) Voir les p. 52 et suiv. de l'Avertissement qui précède.

4) Voir sur de Roberval les p. 352 et 490 du T. XVI, sur lord Brouncker la p. 375 du T. XVI et la p. 306 (note 1) qui suit.

C. de Waard écrit (p. XLVIII de sa „Note sur la Vie de Mersenne"): „c'est avec Mersenne que Roberval et Cavendish s'appliquent peu après [1642] à la recherche du centre de percussion des différents corps".

DU CENTRE D'OSCILLATION.

difficiles que ceux-là; j'ai même enfin trouvé une méthode générale pour chercher la place de ce centre dans les lignes, les surfaces et les corps solides [1]). D'où j'ai retiré — outre le plaisir de trouver ce qui avait été longuement recherché par autrui et d'apprendre à connaître dans ces matières les lois et décrets de la nature — l'avantage de savoir désormais mettre au point l'horloge d'après une méthode facile et sûre. Un deuxième résultat qui me semble plus important c'est que je puis, en me basant sur cette théorie, donner une définition très exacte d'une longueur déterminée et restant invariable dans le cours des siècles; on la trouvera à la fin de cette partie.

DÉFINITIONS.

I.

Appelons pendule une figure quelconque douée de pesanteur, que ce soit une ligne, une surface ou un corps solide, suspendue de telle manière qu'elle peut par la force de sa gravité continuer son mouvement réciproque autour d'un point ou plutôt autour d'un axe supposé parallèle à l'horizon.

II.

Donnons à cet axe horizontal autour duquel se fait par hypothèse le mouvement du pendule, le nom d'axe d'oscillation.

III.

Appelons pendule simple celui qui est censé consister en un fil, ou ligne inflexible, dépourvu de pesanteur, et portant en bas un poids qui y est attaché; poids dont la gravité doit être considérée comme recueillie pour ainsi dire en un seul point.

IV.

Appelons pendule composé celui qui consiste en plusieurs poids gardant des distances invariables tant entre elles que de l'axe d'oscillation. Toute figure suspendue pesante de forme quelconque peut donc être appelée un pendule composé, puisqu'elle est divisible par la pensée en un nombre quelconque de parties.

V.

Appelons pendules isochrones ceux dont les oscillations, par des arcs semblables, sont exécutés dans des temps égaux.

VI.

Appelons plan d'oscillation le plan perpendiculaire à l'axe d'oscillation qui est censé passer par le centre de gravité de la figure suspendue.

illis difficiliora reperi, & | viam denique, qua in lineis, superficiebus, solidisque corpo- (p. 92).
ribus certa ratione centrum illud investigare liceret [1]). Unde quidem, præter voluptatem DE CENTRO OSCILLATIONIS
inveniendi quæ multum ab aliis quæsita fuerant, cognoscendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Accessit autem hoc quoque, quod pluris faciendum arbitror, ut certæ, sæculisque omnibus duraturæ, mensuræ definitionem absolutissimam per hæc tradere possem; qualis est ea quæ ad finem horum adjecta reperietur.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum dicatur figura quælibet gravitate prædita, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, ita suspensa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis suæ continuare possit.

II.

Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oscillationis.

III.

Pendulum simplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, constare intelligitur, ima sui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, censenda est.

IV.

Pendulum verò compositum, quod pluribus ponderibus constat, immutabiles distantias servantibus, tum inter se, tum ab axe Oscillationis. Hinc figura quælibet suspensa, ac gravitate prædita, pendulum compositum dici potest, quatenus cogitatu in partes quotlibet est divisibilis.

V.

Pendula isochrona vocentur, quorum Oscillationes, per arcus similes, æqualibus temporibus peraguntur.

VI. (p. 93).

Planum Oscillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figuræ suspensæ duci intelligitur, ad axem oscillationis rectum.

---

[1]) Voir sur les méthodes successivement employées par Huygens les p. 361—373 du T. XVI.

Du centre d'oscillation.

VII.

Appelons ligne du centre une droite perpendiculaire à l'axe d'oſcillation et paſſant par le centre de gravité de la figure.

VIII.

Appelons ligne verticale une droite tirée de l'axe d'oſcillation, dans le plan d'oſcillation, perpendiculairement au plan de l'horizon.

IX.

Appelons centre d'oſcillation ou d'agitation d'une figure quelconque un point ſitué ſur la ligne du centre et diſtant de l'axe d'oſcillation d'une longueur égale à celle du pendule ſimple iſochrone avec la figure.

X.

Appelons axe de gravité une droite quelconque paſſant par le centre de gravité de la figure.

XI.

Qu'une figure plane ou une ligne ſituée dans un plan ſoit dite oſciller „in planum" (exécuter une oſcillation plane) lorſque l'axe d'oſcillation eſt ſitué dans le même plan que la figure ou la ligne.

XII.

Que la figure ou la ligne plane ſoit dite oſciller „in latus" (exécuter une oſcillation latérale) lorſque l'axe d'oſcillation eſt perpendiculaire à ſon plan.

XIII.

Lorſque nous dirons que des poids ſont multipliés par des lignes droites, ceci doit être entendu comme ſuit: ce ſont les nombres ou les lignes qui expriment les quantités des poids et leurs rapports mutuels qui ſont ainſi multipliés [1]).

HYPOTHÈSES.

I.

Nous ſuppoſons que lorſqu'un nombre quelconque de poids commencent à ſe mouvoir par leur propre gravité, le centre commun de gravité ne peut s'élever à une hauteur ſupérieure à celle où il ſe trouvait au début du mouvement [2]).

---

[1]) Comparez la p. 342 du T. XVI.

De centro oscillationis

VII.

Linea centri, recta quæ per centrum gravitatis figuræ ducitur, ad axem oſcillationis perpendicularis.

VIII.

Linea perpendiculi, recta in plano oſcillationis, ducta ab axe oſcillationis, ad horizontis planum perpendicularis.

IX.

Centrum oſcillationis vel agitationis figuræ cujuſlibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oſcillationis diſtans, quanta eſt longitudo penduli ſimplicis quod figuræ iſochronum ſit.

X.

Axis gravitatis, linea quævis recta, per centrum gravitatis figuræ tranſiens.

XI.

Figura plana, vel linea in plano ſita, in planum agitari dicatur, cum axis oſcillationis in eodem cum figura lineave eſt plano.

XII.

Eædem vero in latus agitari dicantur, cum axis oſcillationis ad figuræ lineæve planum rectus eſt.

XIII.

Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita eſt intelligendum, ac ſi numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter ſe mutuam exprimentes, ita ducantur [1]).

HYPOTHESES.

I.

Si pondera quotlibet, vi gravitatis ſuæ, moveri incipiant; non poſſe centrum gravitatis ex ipſis compoſitæ altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, aſcendere [2]).

---

[2]) Comparez sur les Hyp. I et II la p. 357 du T. XVI et les p. 38—39 de l'Avertissement qui précède.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Il faut dans ces choſes conſidérer la hauteur ſuivant la diſtance d'un plan horizontal et admettre que les corps peſants tâchent de deſcendre ſur ce plan en ſuivant des droites verticales, c.à.d. perpendiculaires à lui. Ce qui eſt ou expreſſément ſuppoſé par tous ceux qui ont traité du centre de gravité ou bien doit être ſuppléé par les lecteurs, puiſque ſans cela la conſidération d'un centre de peſanteur n'a pas de ſens.

Or, pour que notre hypothèſe ne faſſe ſcrupule à perſonne, nous montrerons qu'elle ne ſignifie que ce que nul n'a jamais nié, ſavoir que les corps graves ne montent pas d'eux-mêmes. Car premièrement, ſi nous nous propoſons un ſeul corps grave, il eſt hors de doute que celui-ci ne peut s'élever par la ſeule force de ſa gravité: nous entendons qu'il s'élève lorſque ſon centre de gravité monte. Mais la même choſe doit néceſſairement être admiſe pour un nombre quelconque de poids attachés l'un à l'autre par des lignes inflexibles, puiſque rien n'empêche de les conſidérer comme un ſeul poids. Par conſéquent le centre commun de gravité de ceux-ci auſſi ne pourra monter de lui-même.

Que ſi nous conſidérons un nombre quelconque de poids non attachés les uns aux autres, nous ſavons que ceux-là auſſi poſſèdent un centre commun de gravité. Je dis que c'eſt la hauteur de ce centre qui doit être conſidérée comme celle de la gravité compoſée, puiſque tous les poids peuvent être amenés à ſe trouver à cette hauteur-là ſans qu'il faille appeler à l'aide aucune autre puiſſance que celle qui ſe trouve dans les poids eux-mêmes: il ſuffit de les joindre arbitrairement par des lignes inflexibles et de les mouvoir autour du centre de gravité, ce à quoi il n'eſt beſoin d'aucune force ou puiſſance déterminée. C'eſt pourquoi, de même qu'il ne peut pas arriver que des poids placés dans le même plan horizontal s'élèvent tous également, par la force de la gravité, au-deſſus de ce plan, de même auſſi le centre de gravité d'un nombre quelconque de poids, diſpoſés de quelque façon que ce ſoit, ne peut atteindre une plus grande hauteur que celle qu'il a. Or, c'eſt de la manière ſuivante qu'on peut démontrer que des poids quelconques peuvent être amenés ſans l'application d'aucune force dans le plan horizontal paſſant par leur centre commun de gravité.

Soient [Fig. 76] les poids A, B et C, de poſition donnée; et ſoit D leur centre commun de gravité. Suppoſons mené par lui le plan horizontal dont EF ſoit une ſection droite. Que DA, DB, DC ſoient des lignes inflexibles joignant les poids entre eux d'une manière invariable. Mettons maintenant les poids en mouvement juſqu'à ce que A ſe trouve en E dans le plan EF. Toutes les verges ayant tourné du même angle, B ſera maintenant en G et C en H.

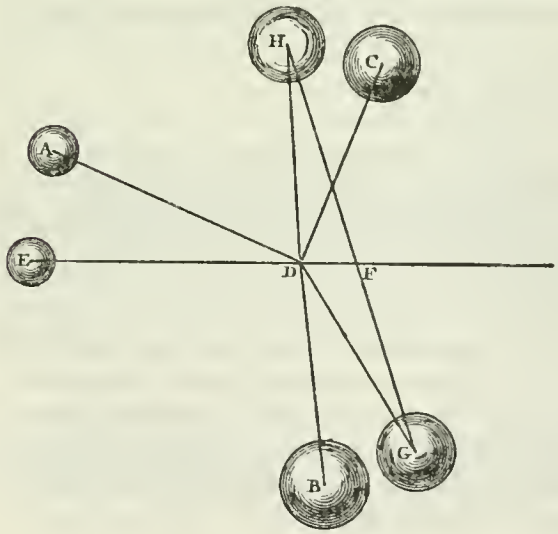
Suppoſons enſuite B en C joints par la verge HG coupant le plan EF en F, où ſe

Altitudo autem in his ſecundum diſtantiam à plano horizontali conſideratur, gravia- (*p.* 94).
que ponuntur ad hoc planum, ſecundum rectas ipſi perpendiculares, deſcendere co- DE CENTRO
nari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expreſſe, OSCILLATIONIS
vel à legentibus ſupplendum eſt, cum absque eo centri gravitatis conſideratio locum non habeat.

Ipſa vero hypotheſis noſtra quominus ſcrupulum moveat, nihil aliud ſibi velle eam oſtendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe ſurſum non ferri. Nam primo, ſi unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis ſuæ altius aſcendere non poſſe extra dubium eſt. aſcendere autem tunc intelligitur ſcilicet, cum ejus centrum gravitatis aſcendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter ſe per lineas inflexiles conjunctis, concedi neceſſe eſt, quoniam nihil vetat ipſa tanquam unum aliquod conſiderari. Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro aſcendere poterit.

Quod ſi jam pondera quotlibet non inter ſe connexa ponantnr, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis eſſe ſcimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ajo & gravitatis ex omnibus compoſitæ altitudinem cenſeri debere; ſiquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci poſſunt, nullâ aliâ accerſitâ potentiâ quam quæ ipſis ponderibus ineſt, ſed tantum lineis inflexilibus ea pro lubitu conjungendo, ac circa gravitatis centrum movendo; ad quod nulla vi neque potentia determinata opus eſt. Quare, ſicut fieri non poteſt ut pondera quædam, in plano eodem horizontali poſita, ſupra illud planum, vi gravitatis ſuæ, omnia æqualiter attollantur; ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque diſpoſitorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum tranſiens, perduci poſſe, ſic oſtendetur.

[Fig. 76.]



Sint pondera A, B, C [Fig. 76], poſitione data, quorum commune gravitatis centrum ſit D. per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus ſectio recta EF. Sint jam lineæ inflexiles DA, DB, DC, quæ pondera ſibi invariabiliter connectant; quæ porro moveantur, donec A ſit in plano EF ad E. Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G, & C in H.

Rurſus jam B & C connecti intelligantur virgâ HG, quæ ſecet planum

Du centre d'oscillation.

trouvera aussi nécessairement le centre de gravité de l'ensemble de ces deux poids, puisque D est celui des trois corps placés en E, G et H et que celui du corps E se trouve aussi dans le plan EDF. Les poids H et G sont maintenant de nouveau mis en mouvement autour du point F comme autour d'un axe et amenés sans aucune force à se trouver simultanément dans le plan EF, de sorte qu'il apparaît que les trois poids, qui étaient d'abord en A, B et C ont été transportés précisément à la hauteur de leur centre de gravité D par leur propre équilibre. C.Q.F.D. La démonstration est la même pour un nombre quelconque d'autres poids.

Or, l'hypothèse que nous avons faite s'applique aussi aux corps liquides. Par elle non seulement tout ce qu'Archimède a des corps flottants peut être démontré, mais aussi beaucoup d'autres théorèmes de mécanique. Et véritablement, si les inventeurs de nouvelles machines qui s'efforcent vainement d'obtenir le mouvement perpétuel, savaient faire usage de cette hypothèse, ils decouvriraient aisément eux-mêmes leurs erreurs et comprendraient que ce mouvement ne peut aucunement être obtenu par des moyens mécaniques [1]).

II.

Nous supposons que, la résistance de l'air et tout autre empêchement manifeste étant absents, comme nous voulons que cela soit entendu dans les démonstrations qui suivent, le centre de gravité du pendule oscillant parcoure des arcs égaux en descendant et en montant [2]).

Ceci a été démontré pour le pendule simple dans la Prop. IX de la Chute des Corps pesants. Mais l'expérience fait voir que la même chose est vraie pour le pendule composé, de sorte que, quelle que soit la forme du pendule, il est trouvé également capable de rester en mouvement sinon en tant qu'il est plus ou moins empêché par la rencontre de l'air.

PROPOSITION I.

Lorsqu'un nombre quelconque de poids se trouvent du même côté d'un plan et qu'on mène à partir du centre de gravité de chacun d'eux une perpendiculaire à lui, la somme des produits de chaque perpendiculaire par le poids correspondant sera égale à celui de la perpendiculaire menée du centre de gravité de tous les poids au plan considéré, par la somme de ceux-ci.

Considérons [Fig. 77] les poids A, B, C situés du même côté d'un plan dont DF est une section droite et menons à ce plan à partir des différents poids les perpendiculaires AD, BE et CF. Que le point G soit le centre de gravité de tous les poids A, B, C; tirons à partir de lui la normale GH au même plan. Je dis que la somme des produits obtenus en multipliant chaque poids par sa perpendiculaire est égale au produit de la droite GH par la somme des poids A, B, C.

EF in F; ubi neceſſario quoque erit centrum gravitatis bino|rum iſtorum ponderum (*p. 95*).
connexorum, cum trium, in E, G, H, poſitorum, centrum gravitatis ſit D, & ejus De centro oscillationis
quod eſt in E, centrum gravitatis ſit quoque in plano EDF. Moventur igitur rurſus pondera H, G, ſuper puncto F, velut axe, absque vi ulla, ac ſimul utraque ad planum EF adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipſam ſui centri gravitatis D altitudinem, ſuo ipſorum æquilibrio, tranſlata appareat. quod erat oſtendendum. Eademque de quotcunque aliis eſt demonſtratio.

Hæc autem hypotheſis noſtra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non ſolum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonſtrari poſſunt, ſed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et ſanè, ſi hac eadem uti ſcirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile ſuos ipſi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haudquaquam poſſibilem eſſe [1]).

II.

Remoto aëris, alioque omni impedimento manifeſto, quemadmodum in ſequentibus demonſtrationibus id intelligi volumus, centrum gravitatis penduli agitati, æquales arcus deſcendendo ac aſcendendo percurrere [2]).

De pendulo ſimplici hoc demonſtratum eſt propoſitione 9 de Deſcenſu gravium. Idem vero & de compoſito tenendum eſſe declarat experientia; ſiquidem, quæcunque fuerit penduli figura, | æque apta continuando motui reperitur, niſi in quantum plus (*p. 96*).
minusve aëris objectu impeditur.

PROPOSITIO I.

Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani exiſtentibus, ſi à ſingulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ ſingulæ in ſua pondera ductæ, tantundem ſimul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.

Sint pondera A, B, C [Fig. 77], ſita ad eandem partem plani, cujus ſectio recta DF, inque ipſum à ſingulis ponderibus ducantur perpendiculares AD, BE, CF. Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C, à quo ducatur perpendicularis in idem planum GH. Dico ſummam productorum, quæ fiunt à ſingulis ponderibus in ſuas perpendiculares, æquari producto ab recta GH in omnia pondera A, B, C.

---

[1]) Comparez la p. 243 (et notamment la note 7 de cette page) du T. XVII. Voir aussi plus loin dans le présent Tome la partie intitulée „La Conservation des Forces".

[2]) Voir la note 2 de la p. 247 qui précède.

Du centre d'oscillation.

En effet, ſuppoſons toutes les perpendiculaires provenant des différents points prolongées de l'autre côté du plan DF et ſoient DK, EL et FM chacune égale à HG; que chacune de ces lignes repréſente une verge inflexible parallèle à l'horizon, et ſuppoſons placés en K, L, M des corps graves tels que chacun d'eux faſſe équilibre, par rapport à l'interſection avec le plan DEF, avec le corps grave oppoſé A, B ou C. L'enſemble des corps K, L, M ſera donc en équilibre avec celui des corps A, B, C. Mais on aura: AD : DK = poids K: poids A, et par conſéquent DA multipliée par la grandeur A ſera égale à DK ou GH multipliée par K. Pareillement EB multipliée par B ſera égale à EL ou GH multipliée par L; et FC multipliée par C ſera égale à FM ou GH multipliée par M. Par conſéquent la ſomme des produits AD × A, BE × B, CF × F ſera égale à celle de GH par chacun des poids K, L, M. Mais comme K, L, M ſont en équilibre avec A, B, C ſéparément, ils ſeront auſſi en équilibre avec les mêmes poids A, B, C ſuſpendus en leur centre de gravité. Il s'enſuit, puiſque la diſtance GH eſt égale à chacune des diſtances DK, EL, FH, que la ſomme des grandeurs A, B, C eſt néceſſairement égale à celle de K, L, M. Par conſéquent la ſomme des produits de GH par chacun des poids A, B, C ſera auſſi égale aux produits DA × A + EB × B + FC × C. C.Q.F.D.

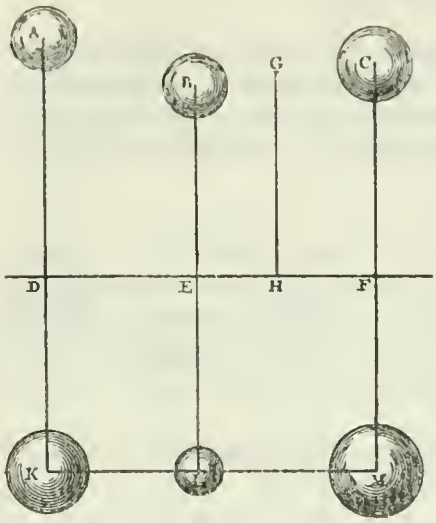
Et quoique dans la démonſtration les droites AK, BL, CM aient été conſidérées comme horizontales et le plan comme vertical, il eſt clair que ſi tous les éléments ſont placés dans une autre poſition quelconque l'égalité des produits ſubſiſte, toutes les droites étant les mêmes qu'auparavant. La propoſition eſt donc établie.

PROPOSITION II.

Les mêmes choſes qu'auparavant étant poſées et tous les poids A, B, C [*Fig.* 77] *étant égaux, je dis que la ſomme de toutes les perpendiculaires* AD, BE, CF *eſt égale à la perpendiculaire* GH, *émanant du centre de gravité, multipliée par le nombre des poids.*

En effet, comme la ſomme des produits de chaque poids par la perpendiculaire correſpondante eſt égale au produit de GH par l'enſemble des poids, et qu'ici, à cauſe de l'égalité des poids, cette ſomme de produits eſt égale au produit d'un ſeul poids par la ſomme de toutes les perpendiculaires, et que de plus le produit de GH par l'enſemble des poids eſt égal à celui d'un ſeul poids par la droite GH priſe autant de fois qu'il y a de poids, il apparaît que la ſomme des perpendiculaires eſt néceſſairement égale à GH multipliée par le nombre des poids. C.Q.F.D.

[Fig. 77.]



Intelligantur enim perpendiculares, à singulis ponderibus eductæ, continuari in alteram partem plani DF, sintque singulæ DK, EL, FM, ipsi HG æquales; omnesque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas; & ponantur in K, L, M, gravitates ejusmodi, quæ singulæ cum sibi oppositis A, B, C, æquilibrium faciant ad intersectionem plani DEF. Omnes igitur K, L, M, æquiponderabunt omnibus A, B, C. Erit autem, sicut longitudo AD ad DK, ita pondus K ad pondus A, ac proinde DA ducta in magnitudinem A, æquabitur DK, sive GH, ductæ in K. Similiter EB in B æquabitur EL, sive GH, in L; & FC in C æquabitur FM, sive GH, in M. Ergo summa productorum ex AD in A, BE in B, CF in F, æquabitur summæ productorum ex GH in omnes K, L, M. Quum autem K, L, M, æquiponderent ipsis A, B, C, etiam iisdem A, B, C, ex centro ipsorum gravitatis G suspensis, æquiponderabunt. Unde, cum distantia GH æqualis sit singulis DK, EL, FM, necesse est magnitudines A, B, C, simul sumptas, æquari ipsis K, L, M. Itaque & summa productorum ex GH in omnes A, B, C, æquabitur productis ex DA in A, EB in B, & FC in C. quod erat demonstrandum.

De centro oscillationis

(p. 97).

Etsi vero in demonstratione positæ fuerint rectæ AK, BL, CM, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum; patet, si omnia simul in alium quemlibet situm transponantur, eandem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes sint eædem quæ prius. Quare constat propositum.

PROPOSITIO II.

Positis quæ prius, si pondera omnia A, B, C [Fig. 77], *sint æqualia; dico summam omnium perpendicularium* AD, BE, CF, *æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ*, GH, *multiplici secundum ponderum numerum.*

Quum enim summa productorum, à ponderibus singulis in suas perpendiculares, æquetur producto ex GH in pondera omnia; sitque hìc, propter ponderum æqualitatem, summa illa productorum æqualis producto ex uno pondere in summam omnium perpendicularium; itemque productum ex GH in pondera omnia, idem quod productum ex pondere uno in GH, multiplicem secundum ponderum numerum: patet summam perpendicularium necessario jam æquari ipsi GH, multiplici secundum ponderum numerum. quod erat demonstrandum.

Du centre d'oscillation.

PROPOSITION III.

Si un certain nombre de grandeurs descendent toutes, ou montent toutes, quoique suivant des distances verticales différentes, leurs changements de niveau multipliés chacun par la grandeur correspondante, donneront une somme de produits égale au changement de niveau du centre commun de gravité de ces grandeurs multiplié par leur somme.

Soient données [Fig. 78] les grandeurs A, B, C qui descendent de A, B, C en D, E, F, ou montent de D, E, F en A, B, C. Et que leur centre commun de gravité, au moment où elles sont en A, B, C, soit à la même hauteur que le point G; mais que ce centre soit à la hauteur du point H lorqu'elles sont en D, E, F. Je dis que la somme des produits de la hauteur AD par A, BE par B, CF par C, est égale au produit de GH par l'ensemble de A, B, C.

En effet, considérons un plan horizontal à section droite MP. Puissent AD, BE, CF et GH prolongées le couper en M, N, O, P.

* Prop. 1. de cette Partie.

Puisqu'alors $AM \times A + BN \times B + CO \times C = GP\ (A + B + C)$*), et que de même $DM \times A + EN \times B + FO \times C = HP\ (A + B + C)$, il s'ensuit que la différence des premiers produits d'avec les deuxièmes est égale à $GH\ (A + B + C)$. Or, il est manifeste que la dite différence est égale à $AD \times A + BE \times B + CF \times C$. Cette dernière somme sera donc aussi égale à $GH\ (A + B + C)$. C.Q.F.D.

PROPOSITION IV.

Si un pendule composé de plusieurs poids et commençant son mouvement considéré à partir du repos, a exécuté une partie quelconque de son oscillation entière et qu'on se figure qu'à partir de ce moment, le lien commun étant rompu, chacun de ses poids tourne sa vitesse acquise vers le haut et s'élève à la plus grande hauteur possible, par ce fait le centre commun de gravité remontera à la hauteur qu'il avait avant le commencement de l'oscillation.

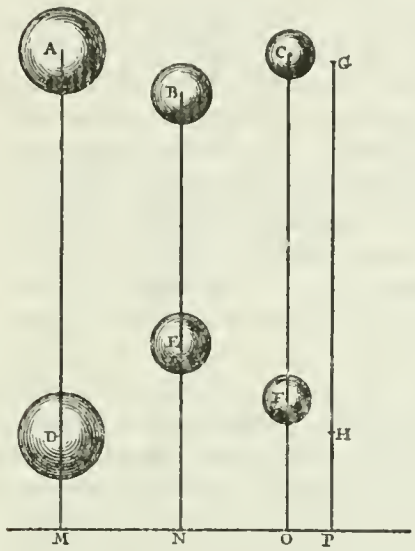
Que le pendule [Fig. 79] soit composé de poids en nombre quelconque A, B, C, attachés à une verge ou surface impondérable, et qu'il soit suspendu à un axe passant par le point D perpendiculairement au plan qui est vu ici. Que le centre de gravité des poids A, B, C, soit aussi situé dans ce même plan, et que la ligne du centre DE fasse un angle EDF avec la ligne perpendiculaire DF, bien entendu lorsque le pen-

PROPOSITIO III.

De centro oscillationis

Si magnitudines quædam descendant omnes, vel ascendant, licet inæqualibus intervallis; altitudines descensus vel ascensus cujusque, in ipsam magnitudinem ductæ, efficient summam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudine descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines.

[Fig. 78.]



Sunto magnitudines A, B, C [Fig. 78], quæ (*p.* 98). ex A, B, C, descendant in D, E, F; vel ex D, E, F, ascendant in A, B, C. Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum sunt in A, B, C, eadem altitudine cum puncto G; cum vero sunt in D, E, F, eadem altitudine cum puncto H. Dico summam productorum ex altitudine AD in A, BE in B, CF in C, æquari producto ex GH in omnes A, B, C.

Intelligatur enim planum horizontale cujus sectio recta MP, atque in ipsum incidant productæ AD, BE, CF & GH, in M, N, O, P.

Quia igitur summa productorum ex AM in A, BN in B, CO in C, æqualis est facto ex GP in omnes A, B, C*. Similiterque summa productorum ex DM in A, EN in B, FO in C, æqualis facto ex HP in omnes A, B, C; sequitur & excessum priorum productorum supra posteriora, æquari facto ex GH in omnes magnitudines A, B, C. Dictum vero excessum æquari manifestum est productis ex AD in A, BE in B, CF in C. Ergo hæc simul etiam æqualia erunt producto ex GH in omnes A, B, C. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

PROPOSITIO IV.

Si pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

Sit pendulum [Fig. 79] compositum ex ponderibus quotlibet A, B, C, virgæ, vel (*p.* 99). superficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque suspensum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conspicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E, ponderum A, B, C, positum sit; lineaque centri DE, inclinetur ad lineam perpendiculi DF, angulo EDF: attracto, nimirum,

DU CENTRE D'OSCILLATION.

dule a été écarté de ſa poſition d'équilibre juſque là. Suppoſons maintenant qu'on lui permette de ſuivre ſon mouvement à partir de cette poſition et qu'il exécute une partie quelconque de ſon oſcillation, de ſorte que les poids A, B, C arrivent en G, H, K. Qu'on ſe figure que chacun des poids, le lien commun étant rompu, tourne alors ſa viteſſe vers le haut (ce qui peut arriver par la rencontre de certains plans inclinés) et s'élève à la plus grande hauteur poſſible, juſqu'en L, M ou N. Soit le point P le centre de gravité de tous les poids lorſqu'ils auront atteint ces poſitions. Je dis que ce point eſt à la même hauteur que le point E.

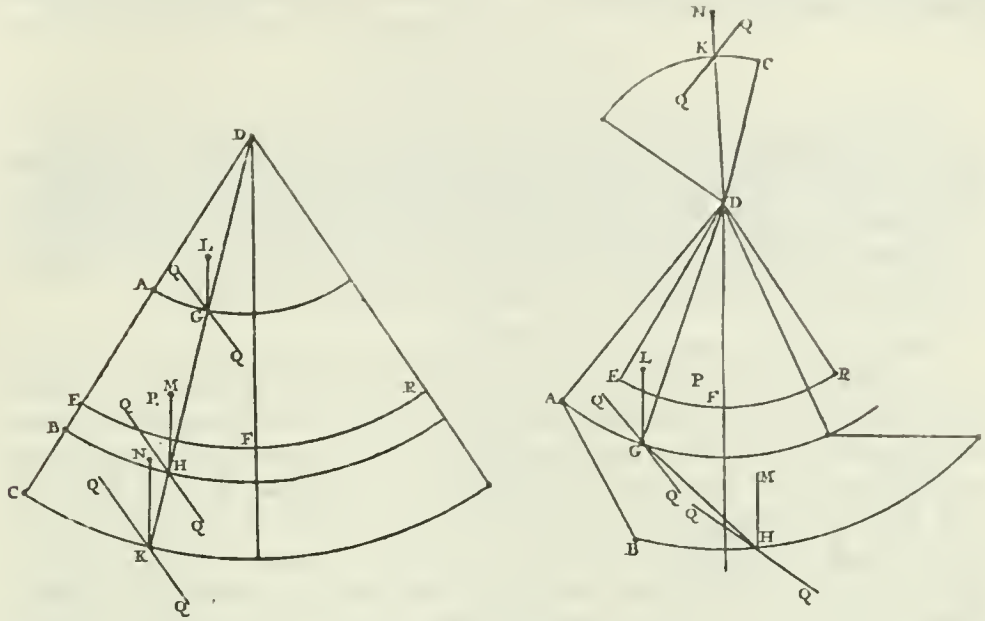
Car il eſt d'abord certain que P n'eſt pas plus haut que E, d'après la première de nos hypothèſes. Mais nous montrerons comme ſuit qu'il n'eſt pas non plus ſitué à une moindre hauteur. En effet, ſoit d'abord, ſi cela eſt poſſible, P ſitué plus bas que E et ſuppoſons que les poids redeſcendent en tombant des mêmes hauteurs auxquelles ils ſont parvenus en montant, ſavoir LG, MH, NK. D'où il eſt clair qu'ils atteindront les mêmes viteſſes qu'ils avaient en commençant leur aſcenſion *), c.à.d. celles qu'ils avaient acquiſes par le mouvement du pendule de CBAD en KHGD. Par conſéquent, ſi on les rapporte maintenant avec les dites viteſſes à la verge ou ſurface qui les ſoutenait, qu'ils s'y attachent ſimultanément et continuent le mouvement ſuivant les arcs commencés — ce qui arrivera ſi, avant d'atteindre la verge, ils rebondiſſent, comme on peut ſe le figurer, des plans inclinés QQ —, le pendule ainſi reſtitué abſoudra la partie reſtante de ſon oſcillation de la même manière que s'il eût continué ſon mouvement ſans aucune interruption. De ſorte que le centre de gravité E du pendule parcourt en deſcendant et en montant des arcs égaux EF, FR et ſe trouve donc en R à la même hauteur qu'en E. Mais nous avons poſé que E ſerait plus élevé que F, centre de gravité des poids ſitués en L, M, N. Par conſéquent R ſera auſſi plus élevé que P: le centre de gravité des poids qui ſont tombés de L, M, N ſe ſerait donc élevé à une hauteur ſupérieure à celle dont il était deſcendu, ce qui eſt abſurde *). Le centre de gravité P n'eſt donc pas ſitué plus bas que

* Prop. 4 de la 2ième Partie.

* Hypoth. 1 de cette Partie.

[Fig. 79.]

De centro oscillationis



eo usque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oscillationis conficere, ita ut pondera A, B, C, perveniant in G, H, K. Unde, relicto deinceps communi vinculo, singula intelligantur acquisitas celeritates sursum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, fieri poterit,) & quousque possunt ascendere, nempe in L, M, N. Quo ubi pervenerint, sit centrum gravitatis omnium punctum P. Dico hoc pari altitudine esse cum puncto E.

Nam primum quidem, constat P non altius esse quam E, ex prima sumptarum hypothesium. Sed nec humilius fore sic ostendemus. Sit enim, si potest, P humilius quam E, & intelligantur pondera ex iisdem, ad qua ascenderunt, altitudinibus recidere, quæ sunt LG, MH, NK. Unde quidem easdem celeritates ipsis acquiri constat, quas habebant ad ascendendum ad istas altitudines *, hoc est, eas ipsas quas acquisierant motu penduli ex CBAD in KHGD. Quare, si cum dictis celeritatibus ad virgam superficiemve, cui innexa fuere, nunc referantur, eique simul adhærescant, motumque secundum inceptos arcus continuent; quod fiet, si priusquam virgam attingant, à planis inclinatis QQ repercussa intelli|gantur; absolvet, hoc modo restitutum pendulum, oscillationis partem reliquam, æquè ac si absque ulla interruptione motum continuasset. Ita ut centrum gravitatis penduli, E, arcus æquales EF, FR, descendendo ac ascendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E esse altius quam P centrum gravitatis ponderum in L, M, N, positorum. Ergo & R altius erit quam P: adeoque ponderum ex L, M, N, delapsorum centrum gravitatis, altius, quam unde descenderat, ascendisset. quod est absurdum *.

* Propos. 4. part. 2.

(p. 100).

* Hypoth. 1. huj.

Du centre d'oscillation.

E. Mais il n'était pas non plus situé à une plus grande hauteur. Il faut donc qu'il soit situé à la même hauteur. C.Q.F.D.

PROPOSITION V.

Etant donné un pendule composé d'un nombre quelconque de poids, si chacun des poids est multiplié par le carré de sa distance à l'axe d'oscillation et que la somme des produits est divisée par le produit de la somme des poids par la distance du centre commun de gravité de tous les poids au même axe d'oscillation, il en résultera la longueur du pendule simple isochrone avec le pendule composé, en d'autres termes la distance entre l'axe et le centre d'oscillation du pendule composé[1]).

Soient [Fig. 80] les poids A, B, C qui composent le pendule (et dont on ne considère ni la figure ni la grandeur mais seulement la gravité) suspendus à l'axe passant par le point D et supposé perpendiculaire au plan qui est vu ici. Que leur centre commun de gravité E se trouve aussi dans ce plan; car peu importe que les poids soient en des plans divers. Appelons d la distance du point E de l'axe, savoir la droite ED. Soit de même e la distance AD du poids A, f celle de BD et g celle de CD. Or, on trouve, en multipliant chaque point par le carré de sa distance, la somme des produits $ae^2 + bf^2 + cg^2$. D'autre part, lorsqu'on multiplie la somme des poids par la distance du centre de gravité commun, le produit sera $ad + bd + cd$*). D'où résulte, en divisant le premier produit par le deuxième,

* Prop. 1. de cette Partie.

$$\frac{ae^2 + bf^2 + cg^2}{ad + bd + cd}.$$

Si l'on égale à cette longueur celle du pendule simple FG, qui sera désignée par x, je dis qu'il sera isochrone avec le pendule composé donné.

Supposons en effet le pendule FG et la ligne du centre DE écartés du même angle de la ligne perpendiculaire, le premier de FH et le deuxième de DK, et qu'étant

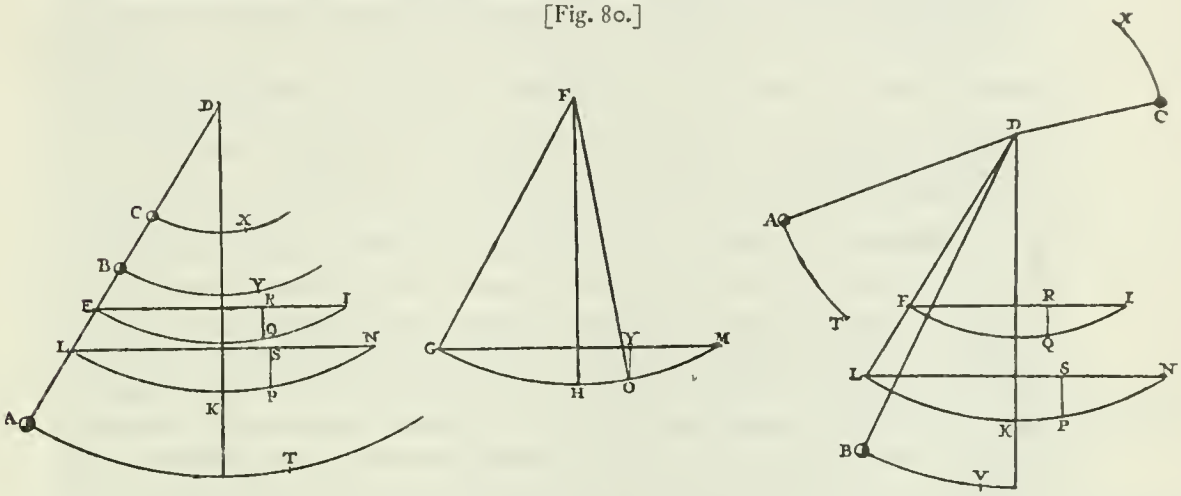
[1]) Comparez sur la formule fondamentale des Prop. V et VI la p. 33 de l'Avertissement qui précède, et le quatrième alinéa de la p. 471 du T. XVI.

Non igitur centrum gravitatis P humilius eſt quam E. Sed nec altius erat. Ergo æque altum ſit neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum. De centro oscillationis

PROPOSITIO V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet compoſito, ſi ſingula ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe oſcillationis, & ſumma productorum dividatur per id quod ſit ducendo ponderum ſummam, in diſtantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oſcillationis; orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni, ſive diſtantia inter axem & centrum oſcillationis ipſius penduli compoſiti [1]).

[Fig. 80.]



Sint [Fig. 80] pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, ſed gravitas tantum conſideretur), A, B, C, ſuſpenſa ab axe, qui per punctum D, ad planum quod conſpicitur, rectus intelligitur. In quo plano ſit quoque eorum centrum commune gravitatis E; nam pondera in diverſis eſſe nihil refert. Diſtantia puncti E ab axe, nempe recta ED, vocetur *d*. Item ponderis A diſtantia AD, ſit *e*; BD, *f*; CD, *g*. Ducendo itaque ſingula pondera in quadrata ſuarum diſtantiarum, (*p.* 101). erit productorum ſumma $aee + bff + cgg$. Et rurſus, ducendo ſummam ponderum in diſtantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd$*. Unde, * Prop. 1. huj. productum prius per hoc dividendo, habebitur

$$\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}.$$

Cui longitudini ſi æqualis ſtatuatur longitudo penduli ſimplicis FG, quæ etiam *x* vocabitur; dico hoc illi compoſito iſochronum eſſe.

Ponantur enim tum pendulum FG, tum linea centri DE, æqualibus angulis à linea perpendiculi remota, illud ab FH, hæc ab DK, atque inde dimiſſa librari, & in recta

DU CENTRE D'OSCILLATION.

abandonnés à eux-mêmes ils commencent leur oscillation à partir de là, et que sur la ligne DE DL soit prise égale à FG. Par conséquent le poids G du pendule FG parcourra en une oscillation entière l'arc GM que la ligne perpendiculaire FH coupera en deux parties égales; et le point L parcourra l'arc LN, semblable et égal à l'autre, que DK divisera par le milieu. De même le centre de gravité E parcourra l'arc semblable EI. Que si nous démontrons, après avoir pris sur les arcs GM, NL des points quelconques qui les divisent de la même manière, tels que O et P, que la vitesse du poids G en O est la même que celle du point L en P, il en résultera que les deux arcs sont parcourus en des temps égaux et que par conséquent le pendule FG est isochrone avec le pendule composé de A, B, C. Or, cela sera démontré comme suit.

Soit d'abord, si cela est possible, la vitesse du point L, lorsqu'il est parvenu jusqu'en P, plus grande que celle du poids G en O. Or, il est constant que quand le point L parcourt l'arc LP, le centre de gravité E parcourt en même temps l'arc semblable EQ. Soient tirées vers le haut à partir des points Q, P, O des perpendiculaires qui rencontrent les cordes des arcs EI, LN, GM en R, S, Y. Désignons SP par y. Partant, vu que LD ou x est à ED ou d comme SP ou y est à RQ, RQ sera égale à $\frac{dy}{x}$. Or, puisque le poids G a en O la vitesse nécessaire pour remonter à la hauteur d'où il est descendu, savoir par l'arc OM ou par la perpendiculaire OY égale à PS, le point L aura, en parvenant à P, une plus grande vitesse qu'il ne lui faut pour monter de PS. Mais tandis que L se déplace jusqu'en P, le poids A, B, C parcourront en même temps des arcs semblables à LP, savoir AT, BV, CX. Et la vitesse du point L en P est à celle du poids A en T, lorsqu'ils sont retenus par le même lien, comme la distance DL est à DA. Mais comme le carré de la vitesse du point L en P est au carré de la vitesse du point A en T, ainsi est la hauteur à laquelle il est possible de monter avec cette vitesse-là à celle où il est possible de monter avec cette vitesse-ci*). Par conséquent aussi, comme le carré de la distance DL, c.à.d. x^2, est au carré de la distance DA, savoir e^2, ainsi est la hauteur où il est possible de monter avec la vitesse du point L parvenu en P (hauteur dont nous avons dit qu'elle est supérieure à PS ou y) à la hauteur qui peut être atteinte avec la vitesse que le poids A possède en T, bien entendu si ce poids, après être parvenu jusqu'en T, pouvait quitter le pendule et diriger séparément son mouvement vers le haut. Cette hauteur sera donc supérieure à $\frac{e^2y}{x^2}$.

* Prop. 3 & 4 de la 2ième Partie.

Pour la même raison la hauteur à laquelle s'élèverait le poids B avec la vitesse acquise par le trajet de l'arc BV serait plus grande que $\frac{f^2y}{x^2}$. Et la hauteur à laquelle s'élèverait le poids C avec la vitesse acquise en parcourant l'arc CX serait plus grande que $\frac{g^2y}{x^2}$. Par conséquent, chacune de ces hauteurs étant multipliée par le poids cor-

DE ſumatur DL æqualis FG. Itaque pondus G penduli FG, integra oſcillatione arcum GM percurret, quem linea perpendiculi FH medium ſecabit. punctum vero L arcum illi ſimilem & æqualem LN, quem medium dividet DK. Itemque centrum gravitatis E, percurret ſimilem arcum EI. Quod ſi in arcubus GM, NL, ſumptis punctis quibuſlibet, ſimiliter ipſos dividentibus, ut O & P, eadem celeritas eſſe oſtendatur ponderis G in O, & puncti L in P; conſtabit inde æqualibus temporibus utrosque arcus percurri, ac proinde pendulum FG, pendulo compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe. Oſtendetur autem hoc modo. De centro oscillationis

Sit primo, ſi poteſt, major celeritas puncti L, ubi in P pervenit, quam ponderis G in O. Conſtat autem, dum punctum L percurrit arcum LP, ſimul centrum gravitatis E percurrere arcum ſimilem EQ. Ducantur à punctis Q, P, O, perpendiculares ſurſum, quæ occurrant ſubtenſis arcuum EI, LN, GM, in R, S, Y. & SP vocetur y. Unde, cum ſit ut LD, x, ad ED, d, ita SP, y, ad RQ; erit RQ æqualis $\frac{dy}{x}$. Jam quia pondus G eam celeritatem habet in O, qua valet ad eandem unde deſcendit altitudinem aſcendere, nempe per arcum OM, vel perpendicularem OY ipſi PS æqualem; punctum igitur L, ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua aſcenditur ad altitudinem PS. Dum vero L tranſit in P, ſimul pondera A, B, C, ſimiles arcus percurrunt ipſi LP, nimirum AT, BV, CX. Eſtque puncti L celeritas in P, ad celeritatem ponderis A in T, quum vinculo eodem contineantur, ſicut diſtantia DL ad DA. Sed ut quadratum celeritatis puncti L, quam habet in P, ad quadratum celeritatis puncti A in T, ita eſt altitudo ad quam illa celeritate aſcendi poteſt, ad altitudinem quò hac celeritate aſcendi poteſt *. Ergo etiam, ut quadratum diſtantiæ DL, quod eſt xx, ad quadratum diſtantiæ DA, quod eſt ee, ita eſt altitudo quo aſcenditur celeritate puncti L, quum eſt in P, (quæ altitudo major dicta eſt quam PS ſive y,) ad altitudinem quo aſcenditur celeritate ponderis A in T; ſi nempe poſtquam in T pervenit, relicto pendulo, | ſeorſim motum ſuum ſurſum converteret. Quæ proinde (*p.* 102). altitudo major erit quam $\frac{eey}{xx}$.

* Prop. 3 & 4. part 2.

Eadem ratione, erit altitudo ad quam aſcenderet pondus B, celeritate acquiſita per arcum BV, major quam $\frac{ffy}{xx}$. Et altitudo ad quam aſcenderet pondus C, celeritate acquiſita per arcum CX, major quam $\frac{ggy}{xx}$. Unde, ductis ſingulis altitudinibus iſtis in

DU CENTRE D'OSCILLATION.

respondant, la somme des produits sera supérieure à $\frac{ae^2y + bf^2y + cg^2y}{x^2}$. Nous en conclurons que cette somme est aussi plus grande que $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Car puisque la longueur x a été posée égale à $\frac{ae^2 + bf^2 + cg^2}{ad + bd + cd}$, on aura $adx + bdx + cdx = ae^2 + bf^2 + cg^2$. En tout étant multiplié par y et divisé par x^2, on aura $\frac{ady + bdy + cdy}{x} = \frac{ae^2y + bf^2y + cg^2y}{x^2}$. D'où résulte ce que nous avons dit. Or, cette somme de produits est égale à celle qui s'obtient en multipliant la hauteur à laquelle monte le centre commun de gravité des poids A, B, C par la somme $a + b + c$ de ces poids, bien entendu dans le cas où, comme nous l'avons dit, chacun de ces poids s'élève séparément à la plus grande hauteur possible. Mais le quantité $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ s'obtient aussi comme produit de la descente du centre de gravité des mêmes poids (laquelle descente est RQ ou $\frac{dy}{x}$, comme il a été trouvé plus haut) par la même somme des poids $a + b + c$. Par conséquent, comme il a été démontré que le produit obtenu d'abord est plus grand que ce deuxième, il s'ensuit que l'ascension du centre de gravité des poids A, B, C, lorsque, parvenus en T, V, X, après avoir quitté le pendule, ils dirigent chacun à part les vitesses acquises vers le haut, sera plus grande que la descente du même centre de gravité pendant le mouvement qui les amène de A, B, C en T, V, X. Ce qui est absurde, puisque la dite ascension doit être égale à la descente, d'après la proposition précédente.

Si l'on dit que la vitesse du point L, quand il sera parvenu en P, est plus petite que celle du poids G parvenu jusqu'en O, nous démontrerons de la même manière que l'ascension possible du centre de gravité des poids A, B, C est plus petite que la descente, ce qui encore une fois ne s'accorde pas avec la proposition précédente. Reste donc que la vitesse du point L transporté jusqu'en P est la même que celle du poids G en O. D'où il résulte, comme nous l'avons dit plus haut, que le pendule simple FG est isochrone avec le pendule composé de A, B, C.

PROPOSITION VI.

Etant donné un pendule composé d'un nombre quelconque de poids égaux, si la somme des carrés des distances des poids à l'axe d'oscillation est divisée par la distance du centre de gravité commun du même axe d'oscillation, cette dernière distance étant multipliée par le nombre des poids, il en résultera la longueur du pendule simple isochrone avec le pendule composé [1]).

Soient posées les mêmes choses qu'auparavant, mais qu'on se figure tous les poids

ſua pondera, erit ſumma productorum major quam $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. quæ proinde major quoque probatur quam $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Nam quia poſita eſt longitudo x æqualis $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$; erit $adx + bdx + cdx$ æquale $aee + bff + cgg$. Et ductis omnibus in y, & dividendo per xx, erit $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ æquale $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. Unde quod dictum eſt conſequitur. Eſt autem ſumma iſta productorum æqualis ei, quod ſit ducendo altitudinem, ad quam aſcendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in ſummam ipſorum ponderum, $a + b + c$; ſi nempe ſingula, uti dictum, ſeorſim quousque poſſunt moveantur. Quantitas vero $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ producitur ex deſcenſu centri gravitatis eorundem ponderum, (qui deſcenſus eſt RQ, ſive $\frac{dy}{x}$, ut ſupra inventum fuit,) in eandem quoque ponderum ſummam $a + b + c$. Ergo quum prius productum altero hoc majus oſtenſum fuerit, ſequitur aſcenſum centri gravitatis ponderum A, B, C, ſi, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, ſingula celeritates acquiſitas ſurſum convertant, majorem fore ejusdem centri gravitatis deſcenſu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod eſt abſurdum, cum dictus aſcenſus deſcenſui æqualis eſſe debeat, per antecedentem. De centro oscillationis

Eodem modo, ſi dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem eſſe celeritate ponderis G quum in O pervenerit; oſtendemus aſcenſum poſſibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem eſſe quam deſcenſum, quod eidem propoſitioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem ſit celeritas puncti L, ad P tranſlati, quæ ponderis G in O. Unde, ut ſuperius dictum, ſequitur pendulum ſimplex FG compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe.

PROPOSITIO VI.

Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus compoſito; ſi ſumma quadratorum factorum à diſtantiis, quibus unumquodque pondus abeſt ab axe oſcillationis, ap|plicetur ad diſtantiam centri gravitatis communis ab eodem oſcillationis axe, (*p.* 103). *multiplicem ſecundum ipſorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni*[1]).

Sint poſita eadem quæ prius, ſed pondera omnia inter ſe æqualia intelligantur, &

[1]) Voir la note 1 de la p. 258 qui précède.

Du centre d'oscillation.

égaux et que chacun d'eux ſoit appelé a. Qu'ici auſſi il ne leur ſoit attribué aucune grandeur, mais qu'ils ſoient conſidérés quant à la dimenſion comme extrêmement petits.

La longueur du pendule ſimple iſochrone ſera donc d'après la propoſition précédente $\frac{ae^2 + af^2 + ag^2}{ad + ad + ad}$. Ou bien, puiſque le numérateur et le dénominateur ont le facteur commun a, la même longueur ſera exprimée par $\frac{e^2 + f^2 + g^2}{3d}$. Cette formule repréſente la ſomme des carrés des diſtances des poids à l'axe d'oſcillation, diviſée par la diſtance du centre de gravité de tous ces poids au même axe d'oſcillation, cette dernière diſtance étant multipliée par le nombre des poids qui eſt ici de trois. En effet, on voit aiſément que ce nombre, par lequel il faut multiplier la diſtance d, correſpond néceſſairement au nombre des poids. La propoſition eſt donc prouvée.

Que ſi les poids égaux ſont attachés l'un à l'autre par une ſeule ligne droite ſuſpendue à ſon extrémité ſupérieure, il eſt établi que la diſtance à l'axe d'oſcillation de leur centre commun de gravité, multipliée par le nombre des poids, eſt égale à la ſomme des diſtances de tous les poids du même axe d'oſcillation *); par conſéquent, dans ce cas, on aura auſſi la longueur du pendule ſimple iſochrone avec le pendule compoſé, en diviſant la ſomme des carrés des diſtances de tous les poids à l'axe d'oſcillation par la ſomme de ces mêmes diſtances.

* Prop. 2. de cette Partie.

DÉFINITION XIV.

S'il y a dans le même plan une figure et une ligne droite qui la touche extérieurement, qu'on aſtreint une autre droite perpendiculaire à ce plan à ſe mouvoir de manière à couper toujours le contour de la figure, de ſorte que cette droite décrit une certaine ſurface, et qu'on coupe enſuite cette dernière par un plan paſſant par la dite tangente et incliné par rapport au plan de la figure donnée; nous déſignerons le ſolide compris entre les deux plans et la partie de la ſurface décrite interceptée par ces plans, par l'expreſſion Onglet[1]*) coupé ſur cette figure comme baſe.*

Soit, dans la figure ci-ajoutée [Fig. 81], ABEC la figure plane donnée, MD la tangente, EF la génératrice paſſant par ſon contour; et l'onglet le corps compris entre les plans ABEC et MFG et la partie de la ſurface décrite par la droite EF.

[1]) Voir la note 3 de la p. 499 du T. XVI.

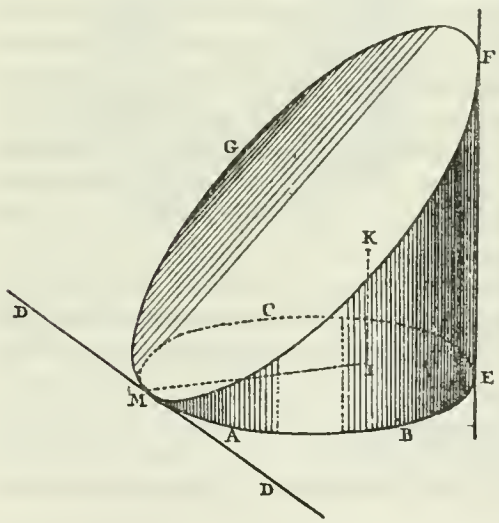
ſingula dicantur a. Rurſus vero nulla eorum magnitudo conſideretur, ſed pro minimis habeantur, quantum ad extenſionem. De centro oscillationis

Itaque penduli ſimplicis iſochroni longitudo, per propoſitionem antecedentem, erit $\frac{aee + aff + agg}{ad + ad + ad}$. Vel, quia quantitas diviſa ac dividens utraque per a dividitur, fiet nunc eadem longitudo, $\frac{ee + ff + gg}{3d}$. Quo ſignificatur ſumma quadratorum à diſtantiis ponderum ab axe oſcillationis, applicata ad diſtantiam centri gravitatis omnium ab eodem oſcillationis axe, multiplicem ſecundum numerum ipſorum ponderum, qui hic eſt 3. facile enim perſpicitur numerum hunc, in quem ducitur diſtantia d, reſpondere neceſſario ipſi ponderum numero. Quare conſtat propoſitum.

Quod ſi pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta ſint, atque ex termino ejus ſuperiore ſuſpenſa; conſtat diſtantiam centri gravitatis, ex omnibus compoſitæ, ab axe oſcillationis, multiplicem ſecundum ponderum numerum, æquari ſummæ diſtantiarum omnium ponderum ab eodem oſcillationis axe*; ac proinde, hoc caſu, habebitur quoque longitudo penduli ſimplicis, compoſito iſochroni, ſi ſumma quadratorum à diſtantiis ponderum ſingulorum ab axe oſcillationis, dividatur per ſummam earundem omnium diſtantiarum. * Prop. 2. huj.

DEFINITIO XIV.

[Fig. 81.]



Si fuerint in eodem plano, figura quædam, & linea recta quæ ipſam extrinſecus tangat; & per ambitum figuræ alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, ſuperficiemque quandam deſcribat, quæ deinde ſecetur plano per dictam tangentem ducto & ad dictæ figuræ planum inclinato; ſolidum comprehenſum à duobus planis iſtis, & parte ſuperficiei deſcriptæ, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus[1]) *ſuper figura illa, tanquam baſi, abſciſſus.*

In ſchemate adjecto [Fig. 81], eſt ABEC figura data; recta ea tangens MD; (*p.* 104). quæ vero per ambitum ejus circumfertur, EF; cuneus autem figura ſolida planis ABEC, MFG, & parte ſuperficiei, à recta EF deſcriptæ, comprehenſa.

Du centre d'oscillation.

DEFINITION XV.

Appelons Subcentrique de l'onglet la diſtance entre la droite par laquelle paſſe le plan qui limite l'onglet et le pied ſur la baſe de l'onglet du perpendiculaire provenant de ſon centre de gravité.

Dans la même figure [Fig. 81], K étant le centre de gravité de l'onglet, la droite KI la perpendiculaire ſur ſa baſe ABEC, et IM une perpendiculaire ſur MD, IM ſera la droite que nous appelons ſubcentrique.

PROPOSITION VII.

L'onglet coupé ſur une figure plane quelconque par un plan incliné d'un angle demi-droit eſt égal au ſolide qui s'obtient par la multiplication de cette figure par une hauteur égale à la diſtance qui ſépare le centre de gravité de la figure plane de la droite par laquelle paſſe le plan qui limite l'onglet [1]).

Soit [Fig. 82] un onglet ABD coupé ſur la figure plane ACB par un plan incliné d'un angle demi-droit et paſſant par EE, tangente à la figure ACB ſituée dans ſon plan. Soit F le centre de gravité de la figure et FA une perpendiculaire abaiſſée de ce centre ſur la droite EE. Je dis que l'onglet ACB eſt égal au ſolide obtenu par la multiplication de la figure ACB par une hauteur égale à FA.

En effet, ſuppoſons la figure ACB diviſée en particules égales extrêmement petites et ſoit G une d'elles. Il eſt certain que ſi chacune d'elles eſt multipliée par ſa diſtance à la droite EE, la ſomme des produits ſera égale à celle qui eſt obtenue par la multiplication de la droite AF par l'enſemble des particules *), c.à.d. à celle qui réſulte de la multiplication de la figure ACB par une hauteur égale à AF. Mais chacune des particules telles que G, multipliée par ſa diſtance GH, eſt égale à un très petit parallélépipède ou priſme tel que GK élevé ſur elle et ſe terminant à la ſurface oblique AD; car leurs hauteurs ſont égales aux diſtances GH à cauſe de l'inclinaiſon d'un angle demi-droit des plans AD et ACB l'un par rapport à l'autre. Et il eſt clair que l'onglet ABD entier eſt formé par ces parallélépipèdes. L'onglet lui-même ſera donc égal au ſolide conſtruit ſur la baſe ACB et ayant une hauteur égale à la droite FA. C.Q.F.D.

* Prop. 1. de cette Partie.

PROPOSITION VIII.

Si une ligne droite touche une figure plane, que la figure eſt ſuppoſée diviſée en

---

[1]) Comparez la proposition un peu plus générale (l'angle d'inclinaison qui est ici de 45° étant quelconque) de la p. 499 (dernier alinéa) du T. XVI.

DEFINITIO XV.

De centro oscillationis

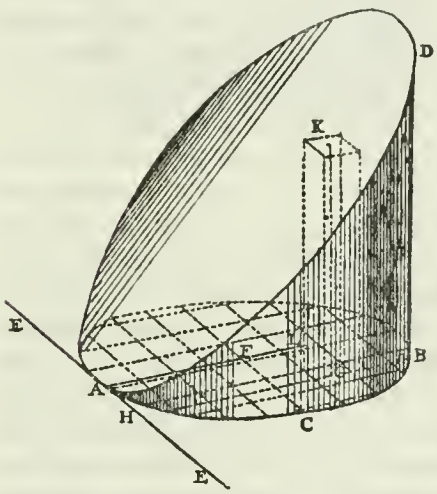
Diſtantia inter rectam, per quam cuneus abſciſſus eſt, & punctum baſeos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei Subcentrica.

Nempe in figura eadem [Fig. 81], ſi K ſit centrum gravitatis cunei, recta vero KI ad baſin ejus ABEC perpendicularis ducta ſit, & rurſus IM perpendicularis ad MD; erit IM, quam ſubcentricam dicimus.

PROPOSITIO VII.

Cuneus ſuper plana figura qualibet abſciſſus, plano inclinato ad angulum ſemirectum, æqualis eſt ſolido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem diſtantiæ centri gravitatis figuræ, ab recta per quam abſciſſus eſt cuneus [1]).

[Fig. 82.]



Sit, ſuper figura plana ACB [Fig. 82], cuneus ABD abſciſſus plano ad angulum ſemirectum inclinato, ac transeunte per EE, rectam tangentem figuram ACB, inque ejus plano ſitam. Centrum vero gravitatis figuræ ſit F, unde in rectam EE ducta ſit perpendicularis FA. Dico cuneum ACB æqualem eſſe ſolido, quod fit ducendo figuram ACB in altitudinem ipſi FA æqualem.

Intelligatur enim figura ACB diviſa in particulas minimas æquales quarum una G. Itaque (*p.* 105). conſtat, ſi harum ſingulæ ducantur in diſtantiam ſuam ab recta EE, ſummam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam AF in particulas omnes *, hoc eſt, ei quod fit ducendo figuram ipſam ACB, in altitudinem æqualem AF. Atqui particulæ ſingulæ ut G, in diſtantias ſuas GH ductæ, æquales ſunt parallelepipedis, vel prismatibus minimis, ſuper ipſas erectis, atque ad ſuperficiem obliquam AD terminatis, quale eſt GK; quia horum altitudines ipſis diſtantiis GH æquantur, propter angulum ſemirectum inclinationis planorum AD & ACB. Patetque ex his parallelepipedis totum cuneum ABD componi. Ergo & cuneus ipſe æquabitur ſolido ſuper baſi ACB, altitudinem habenti rectæ FA æqualem. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 1. huj.

PROPOSITIO VIII.

Si figuram planam linea recta tangat, diviſaque intelligatur figura in particulas

Du centre d'oscillation.

des particules très petites égales entre elles et que de chaque particule une perpendiculaire eſt abaiſſée ſur cette droite, la ſomme des carrés de toutes ces perpendiculaires ſera égale à un certain rectangle multiplié par le nombre des particules; lequel rectangle a pour côtés la diſtance du centre de gravité de la figure à la ligne droite et la ſubcentrique de l'onglet qui eſt coupé ſur la figure donnée par un plan paſſant par cette droite [1]).

En effet, toutes les autres choſes étant poſées comme dans la conſtruction précédente, ſoit LA [Fig. 82] la ſubcentrique de l'onglet ABD par rapport à la droite EE. Il s'agit donc de démontrer que la ſomme des carrés des diſtances de toutes les particules de la figure ACB eſt égale au rectangle formé par FA et LA, multiplié par le nombre des particules.

Or, il apparaît par la démonſtration précédente que les hauteurs des différents parallélépipèdes telles que GK ſont égales aux diſtances des particules qui conſtituent leurs baſes, telles que G, de la droite AE. C'eſt pourquoi, ſi l'on multiplie le parallélépipède GK par la diſtance GH, c'eſt comme ſi l'on multipliait la particule G par le carré de la diſtance GH. Et la même choſe eſt vraie pour tous les autres parallélépipèdes. Mais la ſomme des produits de tous les parallélépipèdes chacun par ſa diſtance de la droite AE eſt égale au produit de l'onglet ABD par la diſtance LA *), puiſque l'onglet a ſon centre de gravité au-deſſus du point L. Par conſéquent la ſomme des produits de chacune des particules G par le carré de ſa diſtance à la droite AE ſera égale au produit de l'onglet ABD par la droite LA, en d'autres termes au produit de la figure ACB par le rectangle de côtés FA et LA. Car l'onglet ABD eſt égal au produit de la figure ACB par la droite FA *). Derechef, comme la figure ACB eſt égale au produit d'une particule G par le nombre des particules, il s'enſuit que le dit produit de la figure ACB par le rectangle conſtruit ſur FA et LA eſt égal à celui de la particule G par le rectangle conſtruit ſur FA et LA, multiplié par le nombre des particules G. À ce produit ſera donc auſſi égal la dite ſomme des produits de chaque particule G par le carré de ſa diſtance à la droite AE, ou bien le produit d'une ſeule particule G par la ſomme de tous ces carrés. Partant, lorſqu'on omet d'un côté et de l'autre la multiplication par la particule G, il eſt néceſſaire que la dite ſomme des carrés ſoit égale au rectangle à côtés FA et LA multiplié par le nombre des particules dans leſquelles la figure ACB eſt diviſée par hypothèſe. C.Q.F.D.

* Prop. I de cette Partie.

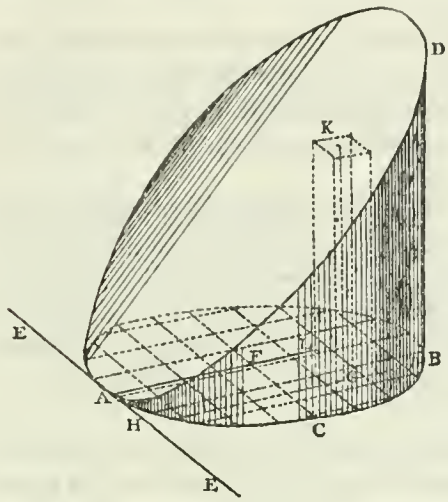
* Prop. précéd.

---

[1]) La démonstration qui suit fait voir que Huygens entend parler, comme dans la Prop. VII, d'un onglet limité par un plan incliné à 45°, quoique la subcentrique d'un onglet (ou d'un tronc) soit indépendante de la grandeur de l'inclinaison du plan limitant; comparez l'avant-dernier alinéa de la note 2 de la p. 458 du T. XVI. La Prop. VIII est un cas particulier du

minimas æquales, atque à ſingulis ad rectam illam perpendiculares ductæ: erunt omnium harum quadrata, ſimul ſumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici ſecundum ipſarum particularum numerum; quod nempe rectangulum fit à diſtantia centri gravitatis figuræ ab eadem recta, & à ſubcentrica cunei, qui per illam ſuper figura abſcinditur [1]). De centro oscillationis

[Fig. 82.]



Poſitis enim cæteris omnibus quæ in conſtructione præcedenti, ſit LA [Fig. 82] cunei ABD ſubcentrica in rectam EE. Oportet igitur oſtendere, ſummam quadratorum omnium à diſtantiis particularum | figuræ ACB (*p.* 106). æquari rectangulo ab FA, LA, multiplici ſecundum particularum numerum.

Et conſtat quidem ex demonſtratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum ſingulorum, ut GK, æquales eſſe diſtantiis particularum, quæ ipſorum baſes ſunt, ut G, ab recta AE. Quare, ſi jam parallelepipedum GK ducamus in diſtantiam GH, perinde eſt ac ſi particula G ducatur in quadratum diſtantiæ GH. Eodemque modo ſe res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in diſtantias ſuas ab recta AE, æquantur ſimul producto ex cuneo ABD in diſtantiam LA *, quia cuneus gravitat ſuper puncto L. Ergo etiam ſumma productorum à particulis ſingulis G, in quadrata ſuarum diſtantiarum ab recta AE, æquabitur producto ex cuneo ABD in rectam LA, hoc eſt, producto ex figura ACB in rectangulum ab FA, LA. Nam cuneus ABD, æqualis eſt producto ex figura ACB in rectam FA *. Rurſus quia figura ACB æqualis eſt producto ex particula una G, in numerum ipſarum particularum; ſequitur, dictum productum ex figura ACB in rectangulum FA, LA, æquari producto ex particula G in rectangulum ab FA, LA, multiplici ſecundum numerum particularum G. Cui proinde etiam æqualis erit dicta ſumma productorum, à particulis ſingulis G in quadrata ſuarum diſtantiarum ab recta AE, ſive à particula una G in ſummam omnium horum quadratorum. Quare, omiſſa utrinque multiplicatione in particulam G, neceſſe eſt ſummam eandem quadratorum æquari rectangulo ab FA, LA, multiplici ſecundum numerum particularum in quas figura ACB diviſa intelligitur. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. præced.

Lemme de la p. 503 du T. XVI, savoir celui où la droite DEK de la Fig. 65 de cette page touche la courbe ABC, de sorte que le tronc se réduit à un onglet.

Du centre d'oscillation.

PROPOSITION IX.

Etant donnée une figure plane et dans le même plan une droite coupant la figure ou ne la coupant pas, sur laquelle sont abaissées des perpendiculaires de toutes les très petites particules égales dans lesquelles la figure est divisée par hypothèse, trouver la somme des carrés de toutes ces perpendiculaires, ou bien un plan qui, multiplié par le nombre des particules, soit égal à la dite somme des carrés [1]).

Soit donnée [Fig. 83] la figure plane ABC et dans le même plan la droite ED, et la figure ayant été divisée par la pensée en de très petites particules égales, supposons abaissées sur la droite ED des perpendiculaires de toutes ces particules, comme l'est FK de la particule F. Qu'il faille trouver la somme des carrés de toutes ces perpendiculaires.

Soit AL une tangente à la figure, parallèle à la droite donné ED et toute hors de la figure. Elle peut toucher la figure soit du même côté où est ED soit du côté opposé. Soit la droite GA, coupant ED en E, la distance du centre de gravité de la figure à la droite AL, et HA la subcentrique de l'onglet coupé sur la figure par un plan passant par la droite AL. Je dis que la somme cherchée des carrés est égale à la somme du rectangle AGH et du carré EG, multipliés par le nombre des particules dans lesquelles la figure est supposée divisée.

En effet, puisse FK, prolongée s'il en est besoin, couper la tangente AL au point L. On peut alors en premier lieu, dans le cas où la droite ED est distante de la figure et que la tangente AL a été menée du même côté de la figure, démontrer la proposition comme suit. La somme de tous les FK^2 est égale à un nombre égal de KL^2 plus un nombre double de rectangles KLF plus autant de LF^2. Mais la somme des KL^2 est égale à celle des EA^2. Et il est certain que l'ensemble des rectangles KLF est égal à autant de fois le rectangle EAG, puisque la somme des FL est égale à autant de fois la droite GA*). Enfin les LF^2 sont égaux à un nombre égal de rectangles HAG †),

* Prop. 2 de cette Partie.
† Prop. précéd.

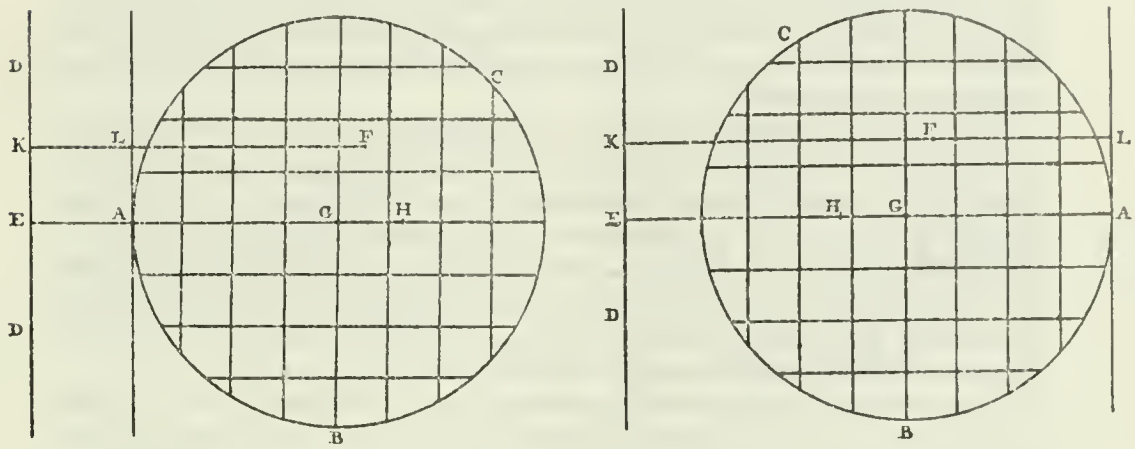
[1]) Voir la note 1 de la p. 546 du T. XVI.

PROPOSITIO IX.

De centro oscillationis

Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel secet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis singulis minimis & æqualibus, in quas figura divisa intelligitur; invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus; sive planum, cujus multiplex, secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit[1]).

[Fig. 83.]



Sit data figura plana ABC [Fig. 83], & in eodem plano recta ED; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, intelligantur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam ED, sicut à particula F ducta est FK. Oporteatque invenire | (*p.* 107). summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus.

Sit datæ ED parallela recta AL, quæ figuram tangat, ac tota extra eam posita sit. Potest autem figuram vel ab eadem parte ex qua est ED, vel à parte opposita contingere. Distantia vero centri gravitatis figuræ ab recta AL sit recta GA, secans ED in E; & subcentrica cunei, super figura abscissi plano per rectam AL, sit HA. Dico summam quadratorum quæsitam æquari rectangulo AGH una cum quadrato EG, multiplicibus secundum particularum numerum, in quas figura divisa intelligitur.

Occurrat enim FK, si opus est producta, tangenti AL in L puncto. Itaque primum, eo casu quo recta ED à figura distat, & tangens AL ad eandem figuræ partem ducta est, sic propositum ostendetur. Summa omnium quadratorum FK æquatur totidem quadratis KL, una cum bis totidem rectangulis KLF, & totidem insuper quadratis LF. Sed quadrata KL æquantur totidem quadratis EA. Et rectangula KLF æqualia esse constat totidem rectangulis EAG, quia omnes FL æquales totidem GA *. Et * Prop. 2. huj. denique quadrata LF æquantur totidem rectangulis HAG *, hoc est, totidem quadratis * Prop. præced.

Du centre d'oscillation.

en d'autres termes à autant de AG^2 plus autant de rectangles AGH. Par conséquent l'ensemble des FK^2 sera égal à un nombre égal de EA^2 plus autant de fois le double du rectangle EAG plus autant de AG^2 et de rectangles AGH. Mais trois de ces grandeurs, savoir $EA^2 + 2\,EAG + AG^2$, constituent le carré EG^2. Il appert donc que l'ensemble des KF^2 est égal à un nombre égal de EG^2 plus autant de fois le rectangle AGH. C.Q.F.D.

Dans tous les autres cas, l'ensemble des carrés FK^2 [Fig. 84] est égal à celui des KL^2 moins deux fois le même nombre de rectangles KLF plus autant de fois LF^2, en d'autres termes à un même nombre de EA^2 moins autant de fois le double du rectangle EAG plus autant de AG^2 et de rectangles AGH. Mais l'expression $EA^2 + AG^2 - 2\,EAG$ est toujours égale à EG^2. Par conséquent dans ces cas aussi la somme des FK^2 sera égale à celle des EG^2 plus un nombre égal de rectangles AGH. La proposition est donc établie.

Il s'ensuit que le rectangle AGH a la même grandeur, que AH soit la subcentrique de l'onglet limité par un plan passant par la première tangente parallèle à AL ou bien celle d'un onglet limité par un plan passant par la deuxième tangente. Par conséquent la longueur AG du premier cas est à AG du second cas, comme HG du second à HG du premier. Mais le rapport des droites AG entre elles est égal à celui des onglets limités dans l'un et l'autre cas par un plan passant par une des tangentes AL, comme cela résulte de la Prop. VII de la présente Partie. GH a donc aussi à GH un rapport inverse à celui des onglets correspondants.

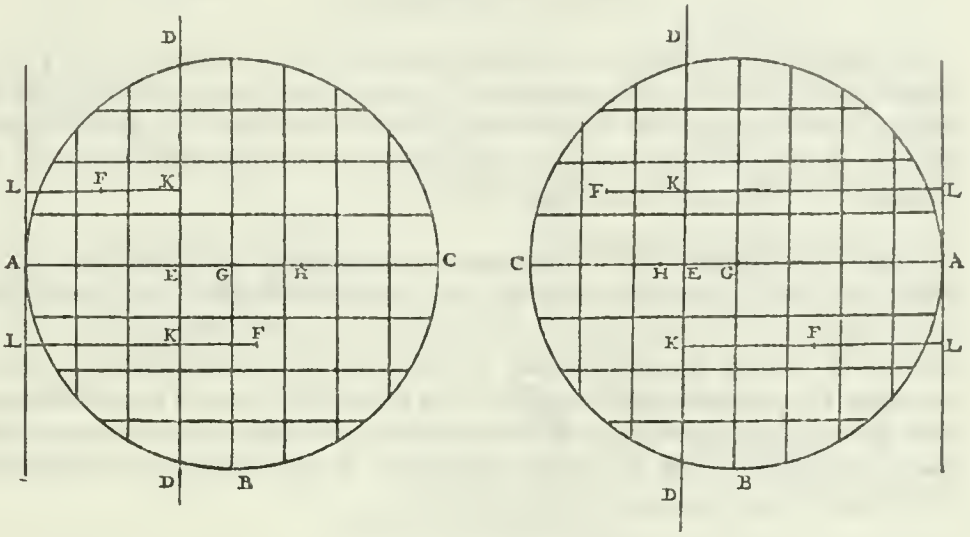
Il apparaît aussi que, le centre de gravité G de la figure plane étant donné ainsi que la subcentrique de l'onglet limité par un plan passant par l'une des deux tangentes parallèles AL, la subcentrique de l'onglet limité par un plan passant par l'autre tangente AL est également connue.

PROPOSITION X.

Etant posées les mêmes choses que dans le cas de la proposition précédente, si la droite ED [*Fig.* 85] *passe par* G, *centre de gravité de la figure* ABC, *la somme des*

AG cum totidem rectangulis AGH. Ergo quadrata omnia FK æqualia erunt totidem quadratis EA, cum totidem duplis rectangulis EAG, atque insuper totidem quadratis AG cum totidem rectangulis AGH. Atqui tria ista; nempe quadratum EA cum duplo rectangulo EAG & quadrato AG; faciunt quadratum EG. Ergo apparet quadrata omnia FK æquari totidem quadratis EG, una cum totidem rectangulis AGH. Quod erat ostendendum. De centro oscillationis

[Fig. 84.]



Porro in reliquis omnibus casibus, quadrata omnia FK [Fig. 84] æquantur totidem quadratis KL, minus bis totidem rectangulis KLF, plus totidem quadratis LF; hoc est, totidem quadratis EA, minus totidem duplis rectangulis EAG, plus totidem quadratis AG, cum toti|dem rectangulis AGH. Atqui, omnibus hisce casibus, fit quadratum EA, plus quadrato AG, minus duplo rectangulo EAG, æquale quadrato EG. Ergo rursus quadrato omnia FK æqualia erunt totidem quadratis EG, una cum totidem rectangulis AGH. Quare constat propositum. (*p.* 108).

Hinc sequitur, rectangulum AGH eadem magnitudine esse, utriusvis cunei subcentrica fuerit AH; hoc est, sive per hanc, sive per illam tangentium parallelarum AL abscissi. Itaque AG unius casus ad AG alterius, ut HG hujus ad HG illius. Sicut autem rectæ AG inter se, ita in utroque casu cunei per AL abscissi, ut colligitur ex prop. 7. huj. Ergo ita quoque reciproce GH ad GH.

Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G, & subcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum AL abscissi, dari quoque cunei, per tangentem alteram AL abscissi, subcentricam.

PROPOSITIO X.

Positis quæ in propositione præcedenti; si data recta ED [Fig. 85] *transeat per* G,

Du centre d'oscillation.

carrés des diſtances à la droite ED *des particules dans leſquelles la figure eſt ſuppoſée diviſée ſera égale au ſeul rectangle* AGH, *multiplié par le nombre des particules* [1]).

Ceci eſt évident, puiſque dans ce cas le carré EG^2 eſt nul.

PROPOSITION XI.

Les mêmes choſes étant derechef poſées que dans le cas de l'avant-dernière propoſition, DE [*Fig.* 86] *étant un axe de ſymétrie de la figure plane* ABC, VG *la diſtance du centre de gravité de la demi-figure* DAD *à la droite* ED, *et* GX *la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur cette demi-figure par un plan paſſant par* ED, *le rectangle* XGV *ſera égal au rectangle* AGH [2]).

En effet, le rectangle XGV, multiplié par le nombre des particules de la figure DAD, eſt égal à la ſomme des carrés des perpendiculaires abaiſſées ſur la droite ED des particules de cette demi-figure *). Par conſéquent le même rectangle XGV, multiplié par le nombre des particules de la figure entière ABC, ſera égal à la ſomme des carrés des perpendiculaires abaiſſées ſur la droite ED de toutes les particules de cette figure, c.à.d. au rectangle AGH multiplié par le même nombre de particules, comme cela réſulte de la propoſition précédente. D'où s'enſuit que les rectangles XGV et AGH ſont égaux entre eux. C.Q.F.D.

* Prop. 8 de cette Partie.

PROPOSITION XII.

Etant donnés dans un plan un nombre quelconque de points, ſi de leur centre de gravité on décrit un cercle de grandeur quelconque et qu'on tire à partir de tous les

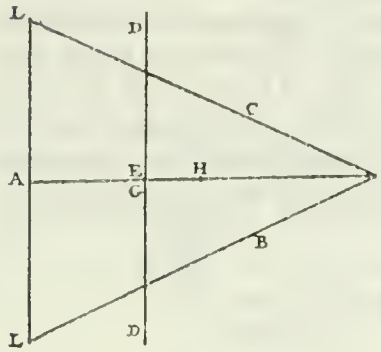
---

[1]) Voir les notes 5 et 6 de la p. 547 du T. XVI.
[2]) Voir la note 2 de la p. 549 du T. XVI.

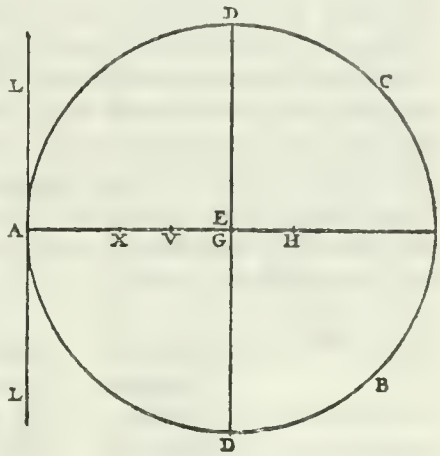
centrum gravitatis figuræ ABC; *erit ſumma quadratorum à diſtantiis particularum, in quas figura | diviſa intelligitur, ab recta* ED, *æqualis rectangulo ſoli* AGH, *multiplici ſecundum ipſarum particularum numerum* [1]). De centro oscillationis (*p.* 109).

Hoc enim manifeſtum eſt, quum nullum tunc ſit quadratum EG.

[Fig. 85.]



[Fig. 86.]



PROPOSITIO XI.

Poſitis rurſus cæteris ut in præcedentium penultima; ſi DE [Fig. 86] *ſit axis figuræ planæ* ABC, *in duas æquales ſimilesque portiones eam dividens, ſitque inſuper* VG *diſtantia centri gravitatis dimidiæ figuræ* DAD *ab recta* ED, *cunei vero, ſuper ipſam abſciſſi per ipſam* ED, *ſubcentrica* GX; *erit rectangulum* XGV *æquale rectangulo* AGH [2]).

Eſt enim rectangulum XGV, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ DAD, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejusdem figuræ dimidiæ in rectam ED cadentium *. Ac proinde idem rectangulum XGV, multiplex ſecundum numerum particularum totius figuræ ABC, æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam ED demiſſarum; hoc eſt, rectangulo AGH multiplici ſecundum eundem particularum numerum, ut conſtat ex propoſ. præcedenti. Unde ſequitur rectangula XGV, AGH inter ſe æqualia eſſe. quod erat demonſtrandum. * Prop. 8. huj.

PROPOSITIO XII.

Datis in plano punctis quotlibet; ſi ex centro gravitatis eorum circulus quilibet deſcribatur; ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli

DU CENTRE D'OSCILLATION.

points donnés à un point quelconque ſitué ſur la circonférence de ce cercle des lignes droites, la ſomme des carrés de toutes ces droites ſera toujours égale à un même plan[1]).

Soient A B C D [Fig. 87] les points donnés, et E leur centre de gravité ou bien celui de grandeurs égales ſuſpendues à eux. Qu'un cercle de grandeur quelconque F*f* ſoit décrit du centre E, et un point quelconque tel que F étant pris ſur ſa circonférence, qu'on le relie par les droites AF, BF, CF, DF aux points donnés. Je dis que l'enſemble des carrés de toutes ces droites eſt égal à un certain plan, toujours le même, où que le point F ſoit placé ſur la circonférence.

En effet, ſoient tirées les droites GH, GK formant un angle droit et pour chacune deſquelles les points donnés ſoient ſitués d'un même côté. Abaiſſons ſur ces deux droites de chacun des points donnés les perpendiculaires AL, AK; BM, BO; CN, CP; DH, DQ; et ſur l'une quelconque d'elles GH ou GK, les perpendiculaires ER, FS provenant du centre de gravité E et du point F. Enſuite auſſi les perpendiculaires AV, BX, CY, DZ des points donnés ſur FS; et ſoit FT une perpendiculaire ſur ER. Soit maintenant

$$\begin{array}{lll} AL = a & AK = e & \text{le rayon } EF = z \\ BM = b & BO = f & GS = x \\ CN = c & CP = g & \\ DH = d & DQ = h & \end{array}$$

Or, comme E eſt le centre de gravité des points A, B, C, D, ſi l'on prend la ſomme des perpendiculaires AL, BM, CN, DH et qu'on la diviſe en autant de parties qu'il y a de points donnés, ER ſera égale à une de ces parties*). De même, la ſomme des perpendiculaires AK, BO, CP, DQ ayant été diviſée en autant de parties, la perpendiculaire tirée de E ſur la droite GK, ou bien la droite RG, ſera égale à l'une d'elles*). Par conſéquent, ſi la ſomme de toutes les perpendiculaires AL, BM, CN, DH ou $a + b + c + d$ eſt appelée l, m celle de AK, BO, CP, DQ ou $e + f + g + h$ et $\mathfrak{g}$ le nombre des points donnés, on aura $ER = \frac{l}{\mathfrak{g}}$ et $RG = \frac{m}{\mathfrak{g}}$.

* Prop. 2 de cette Partie.

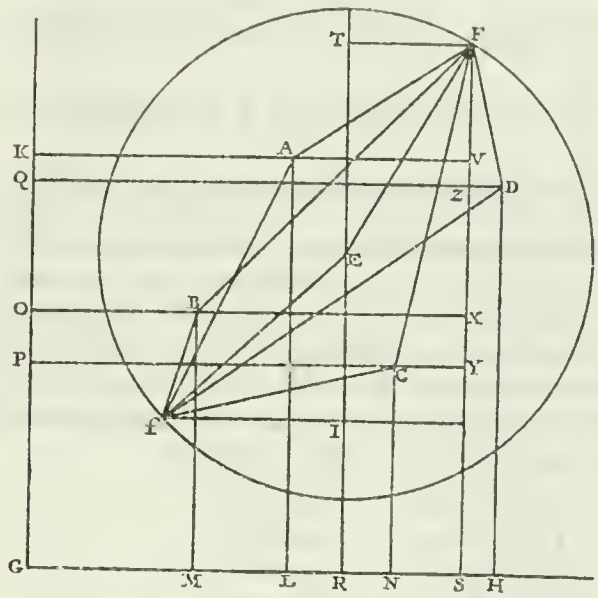
* Prop. 2 de cette Partie.

[1]) Voir sur cette Proposition qu'on trouve chez Pappus la p. 34 de l'Avertissement qui précède.

illius | circumferentia lineæ rectæ; erit ſumma quadratorum ab omnibus ſemper eidem plano æqualis [1]). (*p.* 110).

De centro oscillationis

[Fig. 87.]



Sint data puncta ABCD [Fig. 87]: centrumque gravitatis eorum, ſive magnitudinum æqualium ab ipſis ſuſpenſarum, ſit E; & centro E deſcribatur circulus quilibet F*f*, in cujus circumferentia ſumpto puncto aliquo, ut F, ducantur ad id, à datis punctis, rectæ AF, BF, CF, DF. Dico earum omnium quadrata, ſimul ſumpta, æqualia eſſe plano cuidam dato, ſemperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F ſumptum fuerit.

Ducantur enim rectæ GH, GK, angulum rectum conſtituentes, & quarum unicuique omnia data puncta ſint poſita ad eandem partem. Et à ſingulis in utramque harum perpendiculares agantur AL, AK; BM, BO; CN, CP; DH, DQ. A centro autem gravitatis E, & à puncto F, in alterutram duarum, GH vel GK, perpendiculares ER, FS. Et item, à datis punctis, in ipſam FS perpendiculares AV, BX, CY, DZ. Et FT perpendicularis in ipſam ER. Porro ſit jam

AL ∞ a	AK ∞ e	radius EF ∞ z
BM ∞ b	BO ∞ f	GS ∞ x
CN ∞ c	CP ∞ g	
DH ∞ d	DQ ∞ h	

Quia autem E eſt centrum gravitatis punctorum A, B, C, D; ſi addantur in unum perpendiculares AL, BM, CN, DH, compoſitaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot ſunt data puncta; earum partium uni æqualis erit ER *. Similiterque, diviſâ in toti|dem partes ſummâ perpendicularium AK, BO, CP, DQ, earum uni æqualis (*p.* 111). erit perpendicularis, ducta ex E in rectam GK, ſive ipſa RG *. Itaque, ſi ſumma omnium AL, BM, CN, DH, ſive $a + b + c + d$ vocetur l: ſumma vero omnium, AK, BO, CP, DQ, ſive $e + f + g + h$, vocetur m: & numerus, datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur θ, erit ER ∞ $\frac{l}{\theta}$; & RG ∞ $\frac{m}{\theta}$. Cumque GS ſit x,

* Prop. 2. huj.

* Prop. 2. huj.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Et comme GS $= x$, on aura RS ou FT $= x - \frac{m}{\theta}$ ou bien $\frac{m}{\theta} - x$ si GR > GS; dans l'un et l'autre cas FT $= x^2 - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{m^2}{\theta^2}$. Cette quantité étant soustraite de FE² ou z^2, il restera le carré de TE $= z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}$. Et par conséquent TE $= \sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}$. Or, nous avions ER $= \frac{l}{\theta}$. Par conséquent TR $= \frac{l}{\theta} \pm \sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}$. Appelons cette longueur TR y pour être courts. Formons maintenant la somme de tous les carrés de FA, FB, FC, FD. AF² = AV² + VF². Or, AV est la différence de VK et de AK ou de SG et de AK; par conséquent AV $= x - e$ ou $e - x$ et AV² $= x^2 - 2\,ex + e^2$. Mais VF est égale à la différence de FS et de VS ou de FS et de AL; par conséquent VF $= y - a$ ou $a - y$, et VF² $= y^2 - 2\,ay + a^2$. Prenant la somme de AV² et de VF² on obtient FA² $= x^2 - 2\,ex + e^2 + y^2 - 2\,ay + a^2$. On trouvera de la même manière les carrés des autres droites FB, FC, FD. Tout étant disposé par ordre on aura ceci:

$$\begin{aligned}
FA^2 &= x^2 - 2\,ex + e^2 + y^2 - 2\,ay + a^2.\\
FB^2 &= x^2 - 2\,fx + f^2 + y^2 - 2\,by + b^2.\\
FC^2 &= x^2 - 2\,gx + g^2 + y^2 - 2\,cy + c^2.\\
FD^2 &= x^2 - 2\,hx + h^2 + y^2 - 2\,dy + d^2.
\end{aligned}$$

La somme de ces carrés, si nous posons $e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = n^2$ et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k^2$, sera $\theta x^2 - 2\,mx + n^2 + \theta y^2 - 2\,ly + k^2$, puisque θ était le nombre des points donnés, donc aussi le nombre des carrés, et que nous avions posé $e + f + g + h = m$ et $a + b + c + d = l$.

Or, si dans cette somme, savoir dans les termes $2\,\theta y$ et $2\,ly$, on substitue à y l'expression qui fut désignée par cette lettre, c.à.d.

$$\frac{l}{\theta} \pm \sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}, \text{ on obtiendra}$$

$$\theta y^2 = \frac{l^2}{\theta^2} + 2\,l\sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}} + \theta z^2 - \theta x^2 + 2\,xm - \frac{m^2}{\theta}$$

et $$-2\,ly = -2\frac{l^2}{\theta} - 2\,l\sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}};$$

ou bien $$\theta y^2 = \frac{l^2}{\theta} - 2\,l\sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}} + \theta z^2 - \theta x^2 + 2\,xm - \frac{m^2}{\theta}$$

et $$-2\,ly = -2\frac{l^2}{\theta} + 2\,l\sqrt{z^2 - x^2 + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}.$$

erit RS ſive FT ∞ $x - \frac{m}{\theta}$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, ſi GR major quam GS; & ſemper quadratum FT ∞ $xx - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{mm}{\theta\theta}$. quo ablato ab quadrato FE ∞ zz, relinquetur quadratum TE ∞ $zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}$. Et proinde TE ∞ $\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. Erat autem ER ∞ $\frac{l}{\theta}$. Itaque TR ∞ $\frac{l}{\theta}$ + vel $-\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. quæ TR, brevitatis gratia, dicatur y. Colligamus jam porro ſummam quadratorum omnium FA, FB, FC, FD. Quadratum AF æquatur quadratis AV, VF. Eſt autem AV æqualis differentiæ duarum VK, AK, ſive duarum SG, AK; ac proinde AV ∞ $x - e$ vel $e - x$; & qu. AV ∞ $xx - 2ex + ee$. VF vero æqualis eſt differentiæ duarum FS, VS ſive duarum FS, AL; ac proinde VF ∞ $y - a$ vel $a - y$; & qu. VF ∞ $yy - 2ay + aa$. Additisque quadratis AV, VF, fit quadratum FA ∞ $xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum FB, FC, FD; atque omnia ordine diſpoſita erunt hæc; De centro oscillationis

qu. FA ∞ $xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$.
qu. FB ∞ $xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb$.
qu. FC ∞ $xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc$.
qu. FD ∞ $xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd$.

Horum vero ſumma, ſi ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh \infty nn$; & quadrata $aa + bb + cc + dd \infty kk$; erit iſta, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem θ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, poſitumque fuerat $e + f + g + h \infty m$, & $a + b + c + d \infty l$.

In iſta vero ſumma, ſi in terminis θyy & $2ly$, pro y, ponatur id cujus loco poſitum erat, nempe $\frac{l}{\theta}$ + vel $-\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$

fiet $+\theta yy \infty \frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$.

& $-2ly \infty -2\frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

vel $+\theta yy \infty \frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$.

& $-2ly \infty -2\frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Par conſéquent dans l'un et l'autre cas on aura pour

$$\theta y^2 - 2\,ly : -\frac{l^2}{\theta} + \theta z^2 - \theta x^2 + 2\,xm - \frac{m^2}{\theta}.$$

En y ajoutant les autres quantités compriſes dans la ſomme ſuſdite, $\theta x^2 - 2\,xm + n^2 + k^2$, la ſomme totale, qui eſt celle des carrés de FA, FB, FC, FD, deviendra égale à $\theta z^2 + n^2 + k^2 - \frac{m^2 - l^2}{\theta}$. Ce qui eſt apparemment un plan déterminé puiſque toutes ces quantités ſont connues; il eſt donc manifeſte qu'on trouve toujours la même valeur où que le point F ſoit pris ſur la circonférence. C.Q.F.D.

Que ſi les points donnés ont par hypothèſe des poids divers, commenſurables entre eux, comme lorſque le point A pèſe 2, B 3, C 4 et D 7; qu'après avoir trouvé leur centre de gravité on décrit de nouveau un cercle, à un point de la circonférence duquel on relie les points donnés par des lignes droites; et qu'on multiplie le carré de chacune de ces droites par le nombre qui exprime le poids du point correſpondant, de ſorte qu'on prend deux fois le carré de AF, trois fois celui de BF, quatre fois celui de CF et ſept fois celui de DF; je dis qu'alors auſſi la ſomme totale ſera égale à un eſpace donné, toujours le même, où que le point ait été pris ſur la circonférence. Ceci reſſort de la démonſtration précédente, ſi nous nous figurons les points comme multiples ſelon les nombres de la peſanteur attribuée à chacun d'eux, comme s'il y avait en A deux points réunis, en B trois, en C quatre, en D ſept tous également peſants.

PROPOSITION XIII.

Lorſqu'une figure plane ou une ligne qui eſt dans un plan eſt ſuſpendue diverſement de points pris dans ce plan et également diſtants de ſon centre de gravité, cette figure ou ligne eſt iſochrone à elle-même dans le cas où ſon oſcillation eſt latérale [1]).

Soit [Fig. 88] une figure plane, ou une ligne ſituée dans le plan ABC, dont D déſigne le centre de gravité. Décrivons de ce centre dans le même plan une circonférence de cercle ECF. Je dis que ſi une figure ſuſpendue en un point quelconque de cette circonférence tel que E, C ou G, oſcille latéralement, elle eſt iſochrone avec elle-même ou avec un même pendule ſimple.

Soit en premier lieu la figure ſuſpendue au point E. Lorſque celui-ci eſt ſitué en dehors de la figure, comme ici, il faut ſe figurer la ligne EH à laquelle la figure eſt ſuſpendue rigide et attachée à elle immuablement.

Suppoſons la figure ABC diviſée en de très petites particules égales, des centres de gravité de toutes leſquelles il faut tirer des droites au point E; il eſt manifeſte que

[1]) Voir le troisième alinéa de la p. 373 du T. XVI et la note 1 de la p. 276 qui précède.

Ac proinde, utroque casu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $-\frac{ll}{\theta} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$. De centro oscillationis

Quò appositis reliquis quantitatibus, summa prædi|cta contentis, $\theta xx - 2xm + nn + kk$, (*p.* 112).

fiet tota summa, nempe quadratorum FA, FB, FC, FD, $\infty\ \theta zz + nn + kk - \frac{mm - ll}{\theta}$.

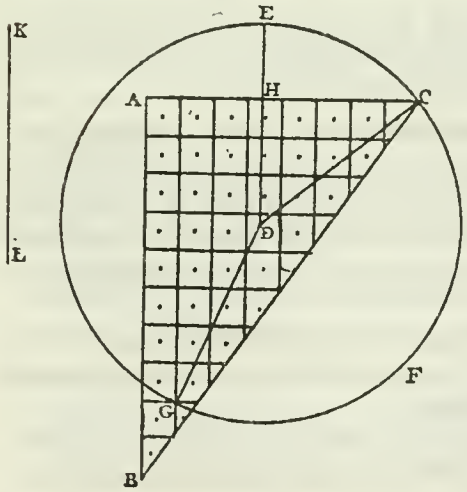
Quod apparet esse planum datum, cum hæ quantitates omnes datæ sint; semperque idem reperiri, ubicunque in circumferentia sumptum fuerit punctum F. quod erat demonstrandum.

Quod si puncta data diversas gravitates habere ponantur, invicem commensurabiles, ut si punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7, eorumque reperto gravitatis centro, circulus rursus describatur, ad cujus circumferentiæ punctum, à datis punctis rectæ ducantur, ac singularum quadrata multiplicia sumantur secundum numerum ponderis puncti sui; ut quadratum AF duplum, BF triplum, CF quadruplum, DF septuplum; dico rursus summam omnium æqualem fore spatio dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum fuerit. Patet enim hoc ex præcedenti demonstratione, si imaginemur puncta ipsa multiplicia secundum numeros attributæ cuique gravitatis; quasi nempe in A duo puncta conjuncta sint, in B tria, in C quatuor, in D septem, atque illa omnia æqualiter gravia.

PROPOSITIO XIII.

Si figura plana, vel linea in plano existens, aliter atque aliter suspendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis suæ distent; agitata motu in latus, sibi ipsi isochrona est[1]).

[Fig. 88]



Sit [Fig. 88] figura plana, vel linea in plano existens ABC, cujus centrum gravitatis D. quo eodem centro, circumferentia circuli in eodem plano describatur, ECF. Dico, si à quovis in illa puncto, ut E, C, vel G, suspensa figura agitetur in latus; sibi ipsi, sive eidem pendulo simplici, isochronam esse.

Sit prima suspensio ex E puncto, quando autem est extra figuram, ut hic, putandum est lineam EH, ex qua figura pendet, rigidam esse, atque immobiliter ipsi affixam.

Intelligatur figura ABC divisa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centris gravitatis, ad punctum E, rectæ ductæ sint; quas quidem manifestum est,

Du centre d'oscillation.

lorſque la figure oſcille latéralement toutes ces droites ſont perpendiculaires à l'axe d'oſcillation. Par conſéquent la ſomme des carrés de toutes ces perpendiculaires, diviſée par la droite ED multipliée par le nombre des particules dans leſquelles la figure eſt diviſée, conſtitue la longueur KL du pendule ſimple iſochrone avec la figure *). Mais lorſque la figure eſt ſuſpendue au point G, la longueur du pendule ſimple iſochrone eſt de nouveau trouvée en diviſant la ſomme des carrés des lignes qui relient les particules de la figure au point G par la droite GD multipliée par le nombre des particules *). Or, comme les points G et E ſe trouvent ſur une circonférence décrite du centre D, c.à.d. du centre de gravité de la figure ABC ou, ſi l'on veut, de celui de tous les centres des particules égales de la figure, la ſomme des carrés des lignes qui relient les dites particules au point G, ſera égale à la ſomme des carrés des lignes tirées des mêmes particules au point E *). Mais ces ſommes de carrés ſont, dans l'une et l'autre ſuſpenſion, appliquées à des grandeurs égales, ſavoir, dans le cas de la ſuſpenſion au point E, à la droite ED multipliée par le nombre de toutes les particules, et dans celui de la ſuſpenſion du point G, à la droite DG multipliée par le même nombre de particules. Il eſt donc évident que par cette dernière diviſion, ſavoir lorsque la ſuſpenſion eſt en G, la longueur du pendule iſochrone devient la même que dans le cas de la première ſuſpenſion, c.à.d. KL.

* Prop. 6 de cette Partie.

* Prop. 6 de cette Partie.

* Prop. précéd.

On démontrera de la même manière l'iſochroniſme avec le pendule KL lorſque la figure eſt ſuſpendue en C ou en un autre point quelconque de la circonférence ECF. La propoſition eſt donc établie.

PROPOSITION XIV.

Etant donnée une figure ſolide et une ligne droite de longueur indéterminée qui tombe en dehors de la figure ou bien qui la coupe, et la figure ayant été diviſée par la penſée en de très petites particules égales, à partir de chacune deſquelles on ſuppoſe des perpendiculaires abaiſſées ſur la dite droite, trouver la ſomme de tous leurs carrés, en d'autres termes trouver un plan dont la multiplication par le nombre des particules donne un produit égal à la dite ſomme des carrés [1]).

Soit donnée [Fig. 89] la figure ſolide ABCD et une ligne droite paſſant par le point E et ſuppoſée perpendiculaire au plan de cette page; cette ligne peut couper la figure ou tomber en entier hors d'elle. Étant ſuppoſé qu'à partir de chacune des très petites particules égales qui conſtituent le ſolide ABCD, telles que F, ſoit tirée une perpendiculaire ſur la droite donnée E, telle que FE, il faut maintenant trouver la ſomme de tous les FE^2.

Coupons la figure par le plan EAC paſſant par la dite ligne donnée et par le centre de gravité de la figure. Figurons-nous auſſi un deuxième plan paſſant par la même ligne donnée et par EG qui lui eſt perpendiculaire.

On ſait que le carré de chaque perpendiculaire abaiſſée d'une des dites particules ſur la ligne donnée paſſant par E, telle que FE, eſt égal à la ſomme des carrés des

quum moveatur figura motu in latus, esse ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, divisa per rectam ED, multiplicem secundum numerum particularum in quas figura divisa est, efficiunt longitudinem penduli simplicis, figuræ isochroni *, | quæ sit KL. Suspensâ autem figurâ ex puncto G, rursus longitudo penduli simplicis isochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punctum G, per rectam GD, multiplicem secundum earundem particularum numerum *. Quum igitur puncta G & E sint in circumferentia descripta centro D, quod est centrum gravitatis figuræ ABC, sive centrum gravitatis punctorum omnium, quæ centra sunt particularum figuræ æqualium; erit proinde summa quadratorum à lineis, quæ à dictis particulis ad punctum G ducuntur, æqualis summæ quadratorum à lineis quæ ab iisdem particulis ducuntur ad punctum E *. Hæ vero quadratorum summæ, utraque suspensione, applicantur ad magnitudines æquales: quippe, in suspensione ex E, ad rectam ED, multiplicem secundum numerum omnium particularum; in suspensione autem ex G, ad rectam DG, multiplicem secundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac posteriori, quum nempe suspensio est ex G, fieri longitudinem penduli isochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc est, eandem ipsi KL.

De centro oscillationis

(p. 113).

* Prop. 6. hui.

* Prop. 6. hui.

* Prop. præced.

Eodem modo, si ex C, vel alio quovis puncto circumferentiæ ECF, figura suspendatur, eidem pendulo KL isochrona esse probabitur. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Datâ figurâ solidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam transeat; divisâque | figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire summam omnium quæ ab ipsis fiunt quadratorum, sive planum, cujus multiplex secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit [1]).

(p. 114).

Sit data [Fig. 89] figura solida ABCD, & linea recta quæ, per punctum E transiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel secet figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à singulis particulis minimis æqualibus, solidum ABCD constituentibus, velut F, rectas duci perpendiculares in datam rectam per E, quemadmodum hic FE, oporteat omnium quadratorum FE summam invenire.

Secetur figura plano EAC, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque EG, quæ ipsi est ad angulos rectos.

Constat jam, quadratum rectæ cujusque, quæ à particula di|ctarum aliqua, ad lineam datam per E perpendicularis ducitur, sicut FE, æquari quadratis duarum FG, FH,

(p. 115).

[1]) Comparez le calcul des p. 473—474 du T. XVI de la longueur du pendule isochrone avec un ellipsoïde de révolution suspendu en un point situé sur le prolongement de son axe: on y trouve des figures auxiliaires analogues à celles dont il est question dans la Prop. XIV.

Du centre d'oscillation.

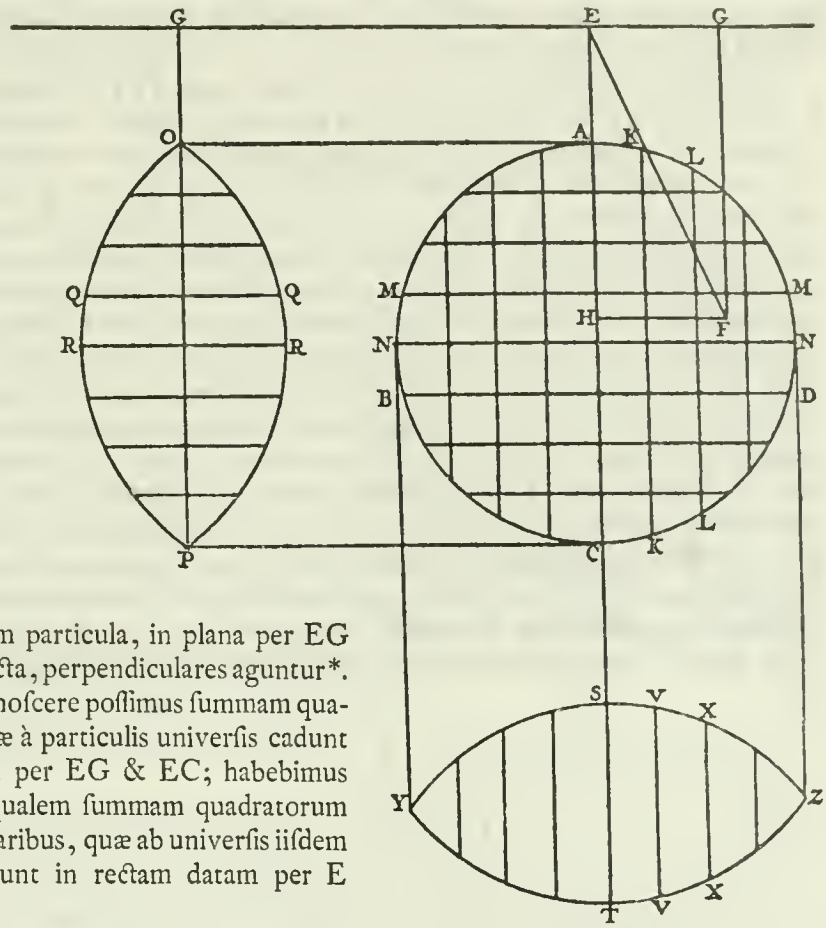
deux lignes FG et FH partant de la même particule et perpendiculaires respectivement aux plans mentionnés passant par EG et EC *). Par conséquent, si nous pouvons apprendre à connaître la somme des carrés de toutes les perpendiculaires menées des particules aux dits plans passant par EG et EC, nous aurons aussi, égale à l'ensemble de ces deux sommes, celle des carrés des perpendiculaires menées de toutes ces particules à la droite donnée passant par le point E.

* 47. du livre I d'Eucl.

Or, la première de ces deux sommes de carrés sera calculée comme suit. Considérons d'abord la figure plane OQP placée à côté de la figure solide ABCD, de la même hauteur qu'elle, et ainsi construite que lorsqu'on la coupe par les droites QQ, RR, correspondant aux plans MM, NN qui coupent la figure solide ABCD et parallèles à ces plans, le rapport de ces droites entre elles soit le même que celui de ces plans, bien entendu si l'on prend de part et d'autre les droites et les plans qui se correspondent. La ligne RR p.e. est à QQ, comme le plan NN à MM. Si l'on suppose donc la figure plane OQP divisée en autant de très petites particules égales qu'il y en a dans le solide ABCD, il y aura aussi dans chaque segment tel que QQRR de la figure plane un aussi grand nombre de particules qu'il y en a dans le segment correspondant MMNN de la figure solide; partant la somme des carrés des perpendiculaires abaissées de toutes les particules de la figure OQP sur le plan EG sera égal à la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur le même plan EG de toutes les particules de la figure solide. Mais cette première somme de carrés sera connue, lorsque sera donné dans la figure OQL et son onglet ce que nous avons dit dans la Prop. IX de

De centro oscillationis

[Fig. 89.]



quæ, ab eadem particula, in plana per EG & EC ante dicta, perpendiculares aguntur*. Quare, ſi cognoſcere poſſimus ſummam quadratorum, quæ à particulis univerſis cadunt in plana dicta per EG & EC; habebimus etiam huic æqualem ſummam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab univerſis iiſdem particulis cadunt in rectam datam per E punctum.

* 47. lib. 1. Eucl.

Illa vero prior quadratorum ſumma colligetur hoc modo. Ponatur primò figuram planam dari OQP, ad latus figuræ ſolidæ ABCD, ejuſdem cum ipſa altitudinis, quæque ſit ejuſmodi, ut ſecta lineis rectis QQ, RR, quæ reſpondeant planis figuram ſolidam ABCD ſecantibus MM, NN, & his parallelis; eadem ſit dictarum linearum inter ſe, quæ & planorum horum ratio, ſi nempe ſumantur utrinque quæ in ordine ſibi reſpondent. Ut ſi linea RR ſit ad QQ quemadmodum planum NN ad MM. Quod ſi igitur figura plana OQP, in totidem particulas minimas æquales diviſa intelligatur, quot intelliguntur in ſolido ABCD, erunt etiam in unoquoque ſegmento figuræ planæ, velut QQRR, tot numero particulæ, quot ſunt in figuræ ſolidæ ſegmento MM NN, iſti ſegmento reſpondente; ac proinde & ſumma quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ OQP in planum EG; æquabitur ſummæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ ſolidæ, in idem planum EG productis. Illa autem quadratorum ſumma data erit, ſi dentur in figura OQP, cuneoque

DU CENTRE D'OSCILLATION.

la préſente Partie être requis à ce but. Ces choſes étant données, la ſomme des carrés des perpendiculaires abaiſſées ſur le plan EG de toutes les particules du ſolide ABCD ſera donc auſſi connue.

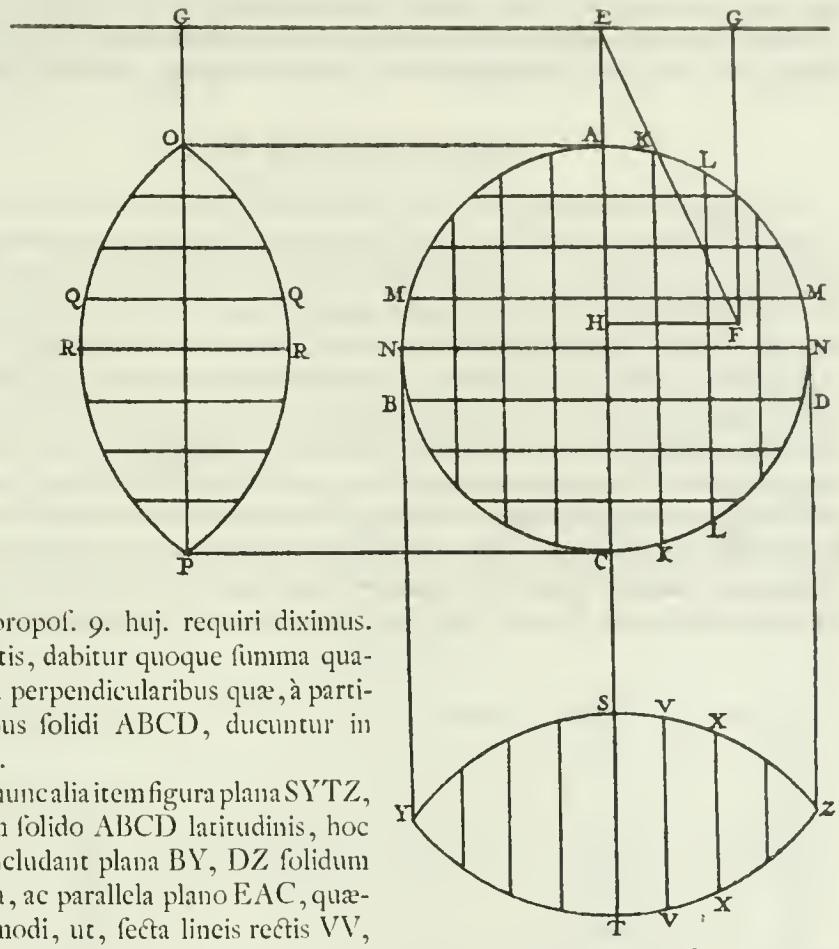
Conſidérons maintenant une deuxième figure plane SYTZ de même largeur que le ſolide ABCD, c.à.d. compriſe entre les plans tangents BY, DZ du ſolide, parallèle au plan EAC et ainſi conſtruite que lorsqu'elle eſt coupée par les lignes droites VV, XX, etc. correſpondant aux plans KK, LL, etc. qui coupent la figure ABCD et parallèles à ces plans, les rapports de ces lignes et des plans correſpondants ſoient égaux. Derechef la ſomme des carrés des perpendiculaires abaiſſées des particules de la figure SYTZ ſur la droite ST ſera égale à celle des carrés de toutes les perpendiculaires abaiſſées ſur le plan AC des particules du ſolide ABCD. Mais la ſomme des premiers carrés ſera donnée lorſque la diſtance du centre de gravité de la figure STYZ de la droite BY ou DZ eſt connue ainſi que la diſtance à une de ces mêmes droites du centre de gravité de l'onglet correſpondant limité par un plan paſſant par la même droite *). Ou bien, ſi la figure SYTZ a une forme ſymétrique et que ST repréſente ſon axe, la même ſomme des carrés ſera donnée ſi l'on connaît la diſtance à l'axe ST du centre de gravité de la demi-figure SZT ainſi que la diſtance à cet axe du centre de gravité de l'onglet coupé ſur la même demi-figure par un plan paſſant par l'axe *). Par conſéquent, ceci étant donné, on connaîtra auſſi la ſomme des carrés des perpendiculaires abaiſſées par hypothèſe ſur le plan EAC de toutes les particules du ſolide ABCD. Mais nous avons trouvé auparavant la ſomme des carrés de toutes les

* Prop. 9 de cette Partie.

* Prop. 11 de cette Partie.

[Fig. 89.]

De centro oscillationis



illius, quæ propoſ. 9. huj. requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque ſumma quadratorum, à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus ſolidi ABCD, ducuntur in planum EG.

Ponatur nunc alia item figura plana SYTZ, ejuſdem cum ſolido ABCD latitudinis, hoc eſt, quam includant plana BY, DZ ſolidum contingentia, ac parallela plano EAC, quæque ſit ejuſmodi, ut, ſecta lineis rectis VV, XX &c. quæ reſpondeant planis figuram ABCD ſecantibus, KK, LL, & his parallelis, faciat eandem inter ſe rationem linearum harum atque illorum planorum, ſi ſumantur quæ ſibi mutuo reſpondent. Itaque rurſus quadrata ſimul omnia perpendicularium, à particulis figuræ SYTZ in rectam ST cadentium, æqualia erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis ſolidi ABCD, ducuntur in planum AC. Illorum autem ſumma quadratorum data erit, ſi detur diſtantia centri gravitatis figuræ SYTZ ab recta BY vel DZ; nec non diſtantia indidem centri gravitatis cunei ſui abſciſſi plano per eandem rectam *. Vel, figura SYTZ ordinata exiſtente, ut ST ſit axis ejus, eadem quadratorum ſumma dabitur, ſi detur diſtantia centri gravitatis figuræ dimidiæ SZT ab axe ST, item centri gra|vitatis cunei, ſuper eadem dimidia figura, abſciſſi (*p.* 116). plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque ſumma quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus ſolidi ABCD, ductæ intelliguntur in planum

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

perpendiculaires abaiſſées ſur le plan EG. Nous connaîtrons donc auſſi l'enſemble de ces deux ſommes, c.à.d. d'après ce qui a été démontré plus haut, la ſomme des carrés des perpendiculaires abaiſſées de toutes les particules du ſolide ABCD ſur la ligne droite paſſant par E et perpendiculaire au plan de cette page. C'eſt ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XV.

Les mêmes choſes étant poſées, ſi le ſolide ABCD *eſt de telle nature que la figure plane* SYTZ [*Fig.* 89] *qui lui eſt proportionnelle, n'a pas une diſtance connue de ſon centre de gravité aux tangentes* BY *ou* DZ, *ou bien que la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur elle par un plan paſſant par ces mêmes droites* BY *ou* DZ *eſt inconnue, mais que dans la figure* OQP *placée à côté d'elle la diſtance* ΦP [*Fig.* 90] *du centre de gravité de la demi-figure* OPV *à l'axe* OP *eſt donnée; il ſera poſſible en partant de là de trouver la ſomme des carrés des diſtances des particules du ſolide* ABCD *au plan* EC. *Mais il faut que toutes les ſections* NN, MM *ſoient des plans ſemblables et que le plan* EC *paſſe par les centres de gravité d'eux tous; il en eſt ainſi dans le cas du priſme, de la pyramide, du cône, des conoïdes et de beaucoup d'autres figures. Il eſt encore néceſſaire que l'on connaiſſe les diſtances du centre de gravité de ces plans à des tangentes parallèles à l'axe d'oſcillation ainſi que les ſubcentriques des onglets coupés ſur eux par des plans paſſant par les mêmes tangentes* [1]).

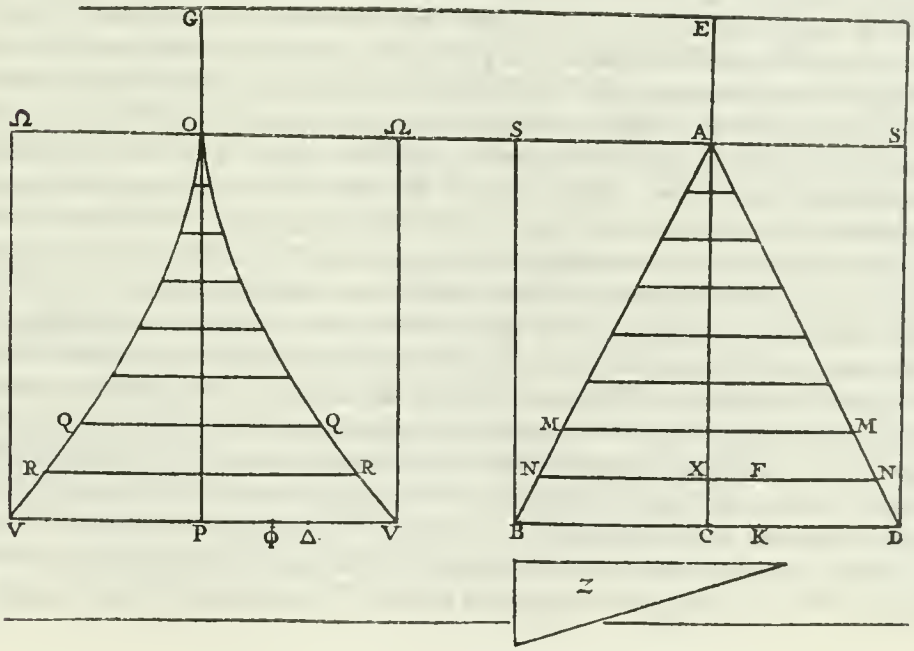
[1]) En 1665 Huygens, dans le calcul de la longueur du pendule isochrone avec un segment d'hyperboloïde de révolution se servit déjà de cette Proposition, ou plutôt de la forme spéciale qu'elle prend lorsque le corps considéré est de révolution. Voir les p. 371—373 et 554—555 du T. XVI.

EAC. Invenimus autem & ſummam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per EG ductis. Ergo & aggregatum utriuſque ſummæ habebitur, hoc eſt, per ſuperius oſtenſa, ſumma quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus ſolidi ABCD, cadunt in rectam datam per E tranſeuntem, & ad paginæ hujus planum erectam. quod erat faciendum. DE CENTRO OSCILLATIONIS

PROPOSITIO XV.

Iisdem poſitis, ſi ſolidum ABCD [Fig. 89] *ſit ejusmodi, ut figura plana* SYTZ, *ipſi proportionalis, non habeat notam diſtantiam centri gravitatis à tangentibus* BY *vel* DZ, *vel, ut ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per eaſdem* BY *vel* DZ, *ignoretur; in figura tamen proportionali, quæ à latere eſt,* OQP, *detur diſtantia* ΦP [Fig. 90], *qua centrum gravitatis figuræ dimidiæ* OPV *abeſt ab axe* OP; *licebit hinc invenire ſummam quadratorum à diſtantiis particularum ſolidi* ABCD *à plano* EC. *Oportet autem ut ſectiones omnes,* NN, MM, *ſint plana ſimilia; utque per omnium centra gravitatis tranſeat planum* EC; *quemadmodum in prismate, pyramide, cono, conoidibus, multisque aliis figuris contingit. Atque eorum planorum diſtantias centri gravitatis, ſuper tangentibus axi oſcillationis parallelis, datas eſſe neceſſe eſt; uti & ſubcentricas cuneorum, qui ſuper ipſis abſcinduntur, ductis planis per easdem tangentes* [1]).

[Fig. 90.]



DU CENTRE D'OSCILLATION.

Par exemple, si BD [Fig. 90] est la plus grande des dites sections, et qu'on considère en B une droite parallèle à l'axe E, c.à.d. perpendiculaire au plan qu'on voit ici, il faut que l'on connaisse la distance BD du centre de gravité de la section à la dite ligne en B, laquelle soit BC; et de même la subcentrique de l'onglet coupé sur la section BD par le plan passant par la même ligne en B, laquelle subcentrique soit BK.

Car, ces choses étant données et PV étant divisée en deux parties égales en Δ, si l'on fait que comme Δ P est à P Φ, ainsi soit le rectangle BCK à un certain espace Z; je dis que celui-ci, multiplié par le nombre des particules du solide ABCD, est égal à la somme cherchée des carrés des distances des mêmes particules au plan EC.

En effet, il est certain que la somme des carrés des distances des particules de la section plane BD au plan EC passant par son centre de gravité, ou bien celle des carrés des distances au même plan des particules solides du segment BNND, est égale au rectangle BCK multiplié par le nombre des dites particules *). Pareillement, si NX est la distance du centre de gravité de la section plane NN à la droite que nous supposons passer par N parallèlement à l'axe E, et que NF représente la subcentrique de l'onglet coupé sur cette section par un plan passant par la même droite; les carrés des distances au plan EC des particules planes de la section NN, ou bien les carrés des distances au même plan des particules solides du segment NMMN, seront égaux au rectangle NXF multiplié par le nombre des particules de la section NN ou du segment NMMN. Or, BD est divisée en C et K, de la même manière que NN l'est en X et F. Par conséquent le rectangle BCK est au rectangle NXF comme BD^2 est à NN^2.

* Prop. 10 de cette Partie.

Nous savons que le nombre des particules de la section BD est à celui des particules de la section NN comme ces sections sont entre elles, c.à.d. comme BD^2 est à NN^2. Par conséquent le rectangle BCK, multiplié par le nombre des particules de la section BD, est au rectangle NXF multiplié par le nombre des particules de la section NN, comme BD^4 est à NN^4, en d'autres termes, comme VV^2 est à RR^2 dans la figure proportionnelle. Par conséquent la première somme des carrés des distances des particules du segment BNND au plan EC est à la deuxième somme des carrés des distances des particules du segment NMMN comme VV^2 est à RR^2. Et l'on démontrera de la même manière que les sommes des carrés des distances des particules dans les autres segments du solide ABCD sont entre elles dans le rapport des carrés des droites de la figure OVV qui correspondent à la base de chaque segment. C'est pourquoi la somme des carrés des distances au plan EC des particules de tous les segments du solide ABCD sera à la somme des carrés des distances des particules d'un nombre égal de segments égaux au plus grand segment, c.à.d. des segments du cylindre ou prisme BDSS, ayant la même base et la même hauteur que le solide ABCD, comme la somme des carrés des droites VV, RR, QQ, etc. est à un nombre égal de carrés de droites toutes égales à la plus grande VV, c.à.d. comme le solide OVV de révolution autour de l'axe OP est au cylindre VVΩΩ ayant la même base et la même hauteur. Or, il est clair que ce rapport du solide OVV au cylindre VVΩΩ se compose

Veluti, ſi maxima dictarum ſectionum ſit BD, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc eſt, erecta ad planum quod hic conſpicitur, oportet datam eſſe diſtantiam centri gr. ſectionis BD à dicta linea in B, quæ ſit BC, itemque ſubcentricam cunei, ſuper ſectione BD abſciſſi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ ſubcentrica ſit BK. De centro oscillationis

Etenim his datis, diviſâque PV biſariam in Δ, ſi fiat ſicut ΔP ad | PΦ, ita rectangulum BCK ad ſpatium quoddam Z; dico hoc ipſum, multiplex per numerum particularum ſolidi ABCD, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum, à diſtantiis earundem particularum à plano EC. (p. 117).

Quadrata enim à diſtantiis particularum planæ ſectionis BD, à plano EC, quod per centrum gravitatis ſuæ tranſit; ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti BNND à plano eodem, æquari conſtat rectangulo BCK, multiplici per numerum dictarum particularum *. Similiter, ſi planæ ſectionis NN diſtantia centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi E parallela, ſit NX; ſubcentrica vero cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per eandem rectam, ſit NF; erunt quadrata à diſtantiis particularum planarum ſectionis NN à plano EC, ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti NMMN, à plano eodem, æqualia rectangulo NXF, multiplici per numerum particularum ipſarum ſectionis NN, vel ſegmenti NMMN. Eſt autem BD diviſa ſimiliter in C & K, atque NN in X & F. Ergo rectangulum BCK ad rectangulum NXF, ſicut quadratum BD ad quadratum NN. * Prop. 10. huj.

Eſt autem & numerus particularum ſectionis BD, ad numerum particularum ſectionis NN, ſicut ſectiones ipſæ; hoc eſt, ſicut quadratum BD ad quadratum NN. Itaque rectangulum BCK, multiplex per numerum particularum ſectionis BD, ad rectangulum NXF, multiplex per numerum particularum ſectionis NN, dupli|catam habebit rationem quadrati BD ad quadratum NN; hoc eſt, eam quam quadratum VV ad quadratum RR, in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti BNND à plano EC, ad ſummam alteram quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti NMMN, ut qu. VV ad qu. RR. Eademque ratione oſtendetur, ſummas quadratorum à diſtantiis particularum in reliquis ſegmentis ſolidi ABCD, eſſe inter ſe in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura OVV, quæ baſi cujusque ſegmenti reſpondent. Quare ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum omnium ſegmentorum ſolidi ABCD à plano EC, erit ad ſummam quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmentorum totidem, maximo ſegmento æqualium, hoc eſt, cylindri vel prismatis BDSS, eandem cum ſolido ABCD baſin altitudinemque habentis, ſicut quadrata omnia rectarum VV, RR, QQ, &c. ad quadrata totidem maximo VV æqualia, hoc eſt, ſicut ſolidum rotundum OVV circa axem OP, ad cylindrum VVΩΩ, qui baſin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem ſolidi OVV ad cylindrum VVΩΩ, componi conſtat ex ratione planorum quorum (p. 118).

DU CENTRE D'OSCILLATION.

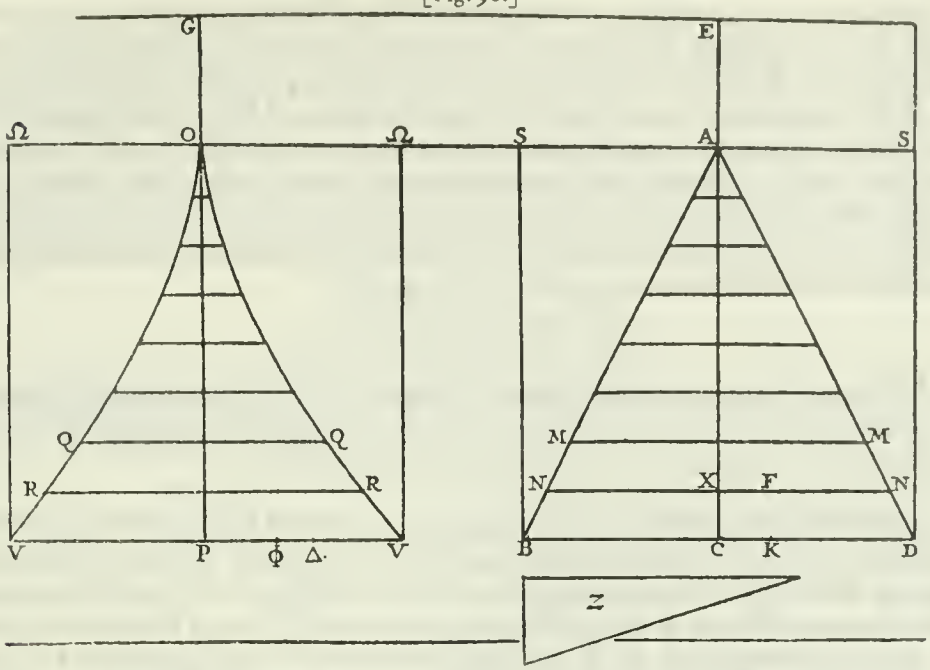
de la raiſon des plans par la rotation deſquels ils ſont engendrés, c.à.d. celle du plan OPV au rectangle PΩ, et de la raiſon des diſtances à l'axe OP des centres de gravité de ces plans, c.à.d. de celle de PΦ à PΔ. Et la première de ces raiſons, ſavoir celle du plan OPV au rectangle PΩ, eſt la même que celle du ſolide ABCD au cylindre ou priſme BDSS, c.à.d. la même que celle du nombre des particules du ſolide ABCD à celui des particules du cylindre ou priſme BDSS. Et l'autre raiſon, celle de PΦ à PΔ eſt la même, par conſtruction, que celle de l'eſpace Z au rectangle BCK. La dite ſomme des carrés des diſtances de toutes les particules du ſolide ABCD au plan EC a donc à la ſomme des carrés des diſtances de toutes les particules du cylindre ou priſme BDSS à ce même plan un rapport compoſé de la raiſon du nombre des particules du ſolide ABCD à celui des particules du cylindre ou priſme BDSS et de la raiſon de l'eſpace Z au rectangle BCK, en d'autres termes un rapport égal à celui du rectangle Z multiplié par le nombre des particules du ſolide ABCD au rectangle BCK multiplié par le nombre des particules du cylindre ou priſme BDSS. Mais la quatrième de ces grandeurs eſt égale à la deuxième, c.à.d. le rectangle BCK multiplié par le nombre des particules du cylindre ou priſme BDSS eſt égal à la ſomme des carrés des diſtances des particules de ce même priſme ou cylindre BDSS au plan EC, puiſque ce rectangle BCK, multiplié par le nombre des particules du ſegment BNND, eſt égal à la ſomme des carrés des diſtances des particules de ce ſegment au plan EC *). Par conſéquent le troiſième terme de la proportion ſera auſſi égal au premier; c.à.d. le plan Z, multiplié par le nombre des particules du ſolide ABCD, ſera égal à la ſomme des carrés des diſtances des particules du même ſolide ABCD au plan EC *). C.Q.F.D.

* Prop. 10 de cette Partie.

* Prop. 14 du livre 5 d'Eucl.

[Fig. 90.]

De centro oscillationis



converſione generantur, hoc eſt, ex ratione plani OPV, ad rectangulum PΩ, & ex ratione diſtantiarum quibus horum planorum centra gravitatis abſunt ab axe OP; hoc eſt, & ex ratione PΦ ad PΔ. Et prior quidem harum rationum, nempe plani OPV ad rectangulum PΩ, eadem eſt quæ ſolidi ABCD ad cylindrum vel prisma BDSS, hoc eſt, eadem quæ numeri particularum ſolidi ABCD, ad numerum particularum cylindri vel prismatis BDSS. Altera vero ratio, nempe PΦ ad PΔ, eſt eadem, ex conſtructione, quæ ſpatii Z ad rectangulum BCK. Habebit itaque dicta ſumma quadratorum, à diſtantiis omnium particularum ſolidi ABCD à plano EC, ad ſummam quadratorum, à diſtantiis omnium particularum cylindri vel prismatis BDSS ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum ſolidi ABCD, ad nnmerum particularum cylindri vel prismatis BDSS, & ex ratione ſpatii Z ad rectangulum BCK: hoc eſt, rationem quam habet rectangulum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi ABCD, ad rectangulum BCK, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis BDSS. Atqui quarta harum magnitudinum æqualis eſt ſecundæ; nempe rectangulum BCK, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis BDSS, æquale ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ejusdem prismatis vel cylindri BDSS à plano EC; ſiquidem rectangulum idem BCK, multiplex | per numerum par- (*p.* 119).
ticularum ſegmenti BNND, æquatur quadratis diſtantiarum particularum ejusdem ſegmenti à plano EC *. Ergo & tertia primæ æquabitur, nempe planum Z, multiplex * Prop. 10. huj.
per numerum particularum ſolidi ABCD, ſummæ quadratorum, à diſtantiis particu- * Prop. 14. lib. 5. Eucl.
larum ſolidi ejusdem ABCD à plano EC *. quod erat demonſtrandum.

Du centre d'oscillation.

Il faut encore remarquer que lorſque le ſolide ABD eſt de révolution autour de l'axe AC, le rectangle BCK devient toujours égal au quart de BC^2, puiſque la ſubcentrique BK de l'onglet coupé ſur le cercle BD par un plan paſſant par la tangente en B eſt égale à $\frac{5}{4}$ fois le rayon BC [1]). Par conſéquent, ſi PV eſt priſe égale à BC, il s'enſuit, ſi l'on veut que $P\Delta$ ſoit à $P\Phi$ comme le rectangle BCK, c.à.d. le quart du carré de BC ou bien $P\Delta^2$, eſt à un autre plan Z, que ce dernier ſera égal au rectangle $\Delta P\Phi$. Il s'enſuit donc auſſi que ce rectangle $\Delta P\Phi$, multiplié par le nombre des particules du ſolide ABD, ſera égal à la ſomme cherchée des carrés de toutes les perpendiculaires abaiſſées de ces particules ſur le plan EC.

PROPOSITION XVI.

Lorſqu'une figure quelconque, ligne, ſurface ou ſolide, eſt diverſement ſuſpendue et oſcille autour d'axes parallèles les uns aux autres et également diſtants du centre de gravité de la figure, celle-ci eſt iſochrone avec elle-même [2]).

Conſidérons une grandeur quelconque [Fig. 91] dont E ſoit le centre de gravité; qu'elle ſoit d'abord ſuſpendue à un axe paſſant par le point F et perpendiculaire au plan de cette page. Ce dernier ſera donc le plan d'oſcillation. Si l'on décrit dans ce plan du centre E, avec le rayon EF, la circonférence FHG et qu'ayant pris ſur elle un point quelconque tel que H, on ſuppoſe en ſecond lieu que la grandeur ſoit ſuſpendue à un axe paſſant par ce point et oſcille autour de lui, le plan d'oſcillation demeurant le même, je dis qu'elle ſera iſochrone avec elle-même oſcillant autour de l'axe F.

En effet, ſuppoſons la grandeur conſidérée diviſée en particules égales et fort petites. Il eſt donc manifeſte que, comme le plan d'oſcillation demeure le même dans les deux ſuſpenſions à l'égard des parties de la grandeur, les perpendiculaires qu'on peut abaiſſer de toutes les particules de la grandeur ſur le dit plan d'oſcillation auront leurs pieds aux mêmes endroits dans l'une et l'autre ſuſpenſion. Soient ces endroits les points marqués dans l'eſpace ABCD.

Comme donc E eſt le centre de gravité de la grandeur propoſée et que celle-ci garde par conſéquent dans n'importe quelle poſition l'équilibre autour de l'axe qui eſt érigé à travers le point E perpendiculairement au plan ABCD, on voit aiſément que ſi une gravité égale eſt attribuée à tous les points marqués dans l'eſpace ABCD dont nous venons de parler, le point E ſera auſſi le centre de gravité de tous ces points-là. Mais ſi, comme il peut arriver, pluſieurs perpendiculaires coïncident en certains points, ceux-ci doivent être conſidérés comme doublés autant de fois et leurs gravités comme autant de fois multiples. Lorſqu'on les enviſage de cette façon, il paraît que le point E eſt de nouveau leur centre de gravité.

---

[1]) Voir les p. 510—513 du T. XVI.

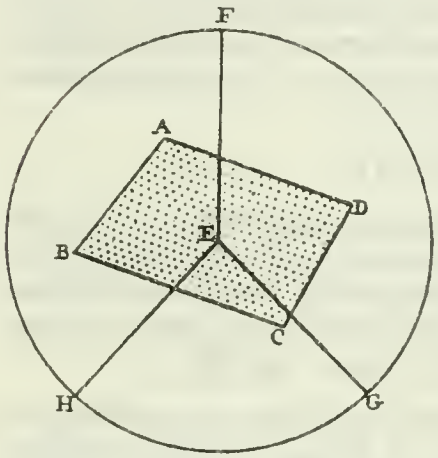
[2]) Comparez la p. 461 du T. XVI ainsi que la p. 34 de l'Avertissement qui précède.

Notandum vero, quando ſolidum ABD rotundum eſt circa axem AC, fieri ſemper rectangulum BCK æquale quartæ parti quadrati BC; quoniam ſubcentrica cunei, abſciſſi ſuper circulo BD, plano per tangentem in B, nempe recta BK, æquatur $\frac{5}{4}$ radii BC. Unde, ſi PV æqualis poſita ſit BC, ſequitur, faciendo ut PΔ ad PΦ ita rectangulum BCK, hoc eſt, $\frac{1}{4}$ quadrati BC, hoc eſt, qu PΔ ad planum aliud Z, fore hoc rectangulo ΔPΦ æquale. Ac proinde tunc ipſum rectangulum ΔPΦ, multiplex ſecundum numerum particularum ſolidi ABD, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum à perpendicularibus omnibus, quæ à particulis iisdem cadunt in planum EC. De centro oscillationis

PROPOSITIO XVI.

Figura quævis, ſive linea fuerit, ſive ſuperficies, ſive ſolidum; ſi aliter atque aliter ſuſpendatur, agiteturque ſuper axibus inter ſe parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochrona eſt[2]).

[Fig. 91.]



Proponatur magnitudo quævis [Fig. 91], cujus centrum gravitatis E punctum, ſitque primo ſuſpenſa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oſcillationis. In quo ſi centro E, radio EF, deſcribatur circumferentia FHG, ſumptoque in illa puncto quovis, ut H, magnitudo ſecundò ſuſpendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oſcillationis plano. Dico iſochronam fore ſibi ipſi agitatæ circa axem in F.

Intelligatur enim dividi magnitudo propoſita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa ſuſpenſione idem manet oſcillationis planum, reſpectu partium magnitudinis; manifeſtum eſt, ſi ab omnibus particulis, in quas diviſa eſt magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oſcillationis planum, illas utraque ſuſpenſione occurrere ipſi in punctis iisdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in ſpatio ABCD. (p. 120).

Quum igitur E ſit centrum gravitatis magnitudinis propoſitæ, ipſaque proinde circa axem, qui per E punctum erectus eſt ad planum ABCD, quovis ſitu æquilibrium ſervet; facile perſpicitur, quod ſi punctis omnibus ante dictis, quæ in ſpatio ABCD ſignantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum eſt punctum E. Quod ſi vero, ut fieri poteſt, in puncta aliqua plures perpendiculares coincidant, illa puncta quaſi toties geminata intelligenda ſunt, gravitatesque toties multiplices accipiendæ. Atque ita conſideratorum, patet rurſus centrum gravitatis eſſe E punctum.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Il eſt maintenant évident que la ſomme des carrés des droites qui relient tous les dits points au point F eſt égale à la ſomme des carrés des perpendiculaires abaiſſées de toutes les particules de la grandeur propoſée ſur l'axe d'oſcillation paſſant par F, attendu que les lignes dont nous conſidérons ici les carrés ont dans l'un et l'autre cas les mêmes longueurs. Pareillement, lorſque la grandeur conſidérée eſt ſuſpendue à un axe paſſant par H, il apparaît que la ſomme des carrés des droites qui relient au point H tous les points marqués dans l'eſpace ABCD eſt égale à celle des carrés des perpendiculaires abaiſſées de toutes les particules de la grandeur propoſée ſur l'axe d'oſcillation paſſant par H. Par conſéquent ſi, dans l'un et l'autre cas, la ſomme des carrés des droites qui relient tous les points ſuſdits aux points F ou H eſt diviſée par les droites EF ou EH, multipliées chacune par le nombre des particules dans lesquelles la grandeur propoſée eſt diviſée par hypothèſe, de cette diviſion réſultera la longueur d'un pendule ſimple iſochrone avec la grandeur ſuſpendue en F ou H. Or, la ſomme des carrés eſt égale dans les deux cas* et les droites EF, EH ſont auſſi égales entre elles, et le nombre des particules eſt le même. Par conſéquent, comme les dénominateurs et les numérateurs des deux expreſſions conſidérées ſont égaux, les longueurs réſultant de la diviſion le ſeront auſſi, c.à.d. il y aura égalité des deux pendules iſochrones avec la grandeur propoſée ſuſpendue d'abord en F puis en H. La propoſition eſt donc établie.

* Prop. 12 de cette Partie.

PROPOSITION XVII.

Étant donné un plan qui, multiplié par le nombre des particules dans leſquelles la figure ſuſpendue eſt diviſée par la penſée, donne un produit égal à la ſomme des carrés des diſtances de l'axe d'oſcillation, la longueur du pendule ſimple iſochrone avec la figure réſultera de la diviſion de ce plan par une droite égale à la diſtance de l'axe d'oſcillation au centre de gravité de la grandeur ſuſpendue.

Soit ABC [Fig. 92] la figure à centre de gravité E ſuſpendue à un axe paſſant par le point F perpendiculairement au plan qui eſt vu ici. Et ſuppoſant la figure diviſée en particules égales fort petites, de chacune desquelles on doit ſe figurer qu'une perpendiculaire a été abaiſſée ſur le dit axe, ſoit trouvé, d'après les règles ſus-énoncées, le plan H qui, multiplié par le nombre des dites particules, donne un produit égal à la ſomme des carrés de toutes ces perpendiculaires. Que la diviſion du plan H par la droite FE donne la longueur FG. Je dis que celle-ci repréſente la longueur du pendule ſimple exécutant des oſcillations iſochrones avec celles de la grandeur ABC autour de l'axe F.

Porrò ſummam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum F, eandem eſſe patet cum ſumma quadratorum ab iis rectis, quæ à ſingulis particulis magnitudinis propoſitæ ducuntur perpendiculares in axem oſcillationis per F tranſeuntem; quippe cum lineæ ipſæ, quarum quadratra intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum ſuſpenſio eſt ex axe per H, patet ſummam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in ſpatio ABCD ſignatis, ducuntur ad punctum H, eandem eſſe cum ſumma quadratorum, ab iis quæ, à particulis omnibus magnitudinis propoſitæ, ducuntur perpendiculares in axem oſcillationis per H tranſeuntem. Ergo utroque caſu, ſi ſumma quadratorum ab rectis quæ, à punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H, dividatur per rectas EF vel EH, multiplices ſecundum numerum particularum in quas magnitudo propoſita diviſa intelligitur, orietur ex applicatione hac longitudo penduli ſimplicis, quod magnitudini ſuſpenſæ ex F vel H iſochronum ſit. Eſt autem ſumma quadratorum utroque caſu æqualis *; & rectæ quoque EF, EH, inter ſe æquales; & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales ſint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc eſt, longitudines pendulorum iſochronorum magnitudini propoſitæ ſuſpenſæ ex F vel ex H. Quare conſtat propoſitum.

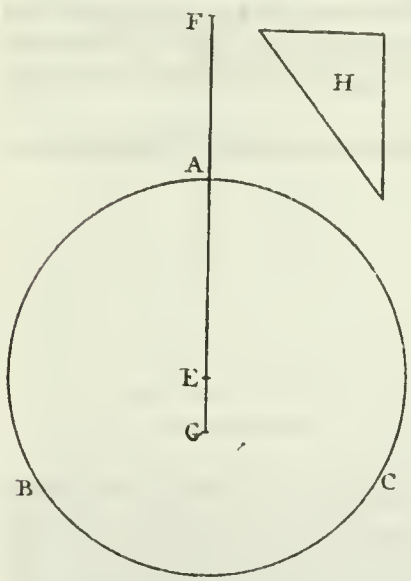
DE CENTRO OSCILLATIONIS

* Prop. 12. huj.

PROPOSITIO XVII.

(*p.* 121).

[Fig. 92.]



Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas ſuſpenſa figura diviſa intelligitur, æquetur quadratis omnium diſtantiarum ab axe oſcillationis; ſi illud applicetur ad rectam æqualem diſtantiæ inter axem oſcillationis & centrum gravitatis ſuſpenſæ magnitudinis, orietur longitudo penduli ſimplicis ipſi iſochroni.

Sit figura ABC [Fig. 92], cujus centrum gravitatis E, ſuſpenſa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conſpicitur, erectus ſit. Ponendoque diviſam figuram in particulas minimas æquales, à quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: eſto, per ſuperius oſtenſa, inventum planum H, cujus multiplex per numerum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam FE, fiat longitudo FG. Dico hanc eſſe longitudinem penduli ſimplicis, iſochronas oſcillationes habentis magnitudini ABC, agitatæ circa axem per F.

Du centre d'oscillation.
* Prop. 6 de cette Partie.

En effet, comme la ſomme des carrés des diſtances de l'axe F, diviſée par la diſtance FE multipliée par le nombre des particules, conſtitue la longueur du pendule ſimple iſochrone*, et qu'à cette ſomme de carrés multipliée par le même nombre, celui des particules, eſt égale par hypothèſe le plan H; il s'enſuit que ſi l'on diviſe le plan H multiplié par le nombre des particules, par la diſtance FE multipliée par le nombre des particules, ou bien, en omettant le facteur commun, ſi l'on diviſe le plan H par la diſtance FE, il en réſultera auſſi la longueur du pendule ſimple iſochrone. Il apparaît donc que cette longueur eſt FG, comme nous l'avions dit. C.Q.F.D.

PROPOSITION XVIII.

Si l'eſpace plan qui, multiplié par le nombre des particules de la grandeur ſuſpendue, eſt égal à la ſomme des carrés des diſtances à l'axe de gravité (parallèle à l'axe d'oſcillation), eſt diviſé par une droite égale à la diſtance des deux axes nommés, il en réſultera une droite égale à l'intervalle, duquel le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité de la même grandeur [1]).

Soit ABCD [Fig. 93] une grandeur à centre de gravité E, qui ait le centre d'oscillation G lorſqu'elle eſt ſuſpendue à un axe paſſant par le point F perpendiculairement au plan de cette page. Figurons-nous de plus un autre axe parallèle à celui paſſant par F et traverſant le centre de gravité E. Et la grandeur ayant été diviſée par la penſée en de très petites particules égales, ſoit le plan I multiplié par le nombre de ces particules égal à la ſomme des carrés des diſtances au dit axe paſſant par E. La diviſion du plan I par la diſtance FE nous donne une certaine droite. Je dis qu'elle eſt égale à l'intervalle EG duquel le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité de la grandeur ABCD.

En effet, qu'on ſe figure pour que notre démonſtration de cette propoſition ſoit

[1]) Cette Proposition ne se trouve pas encore dans les travaux de 1664—1665 (T. XVI) ni dans les anagrammes envoyés à Londres en 1669 (T. VI, p. 487—489). La distance du centre de gravité au centre d'oscillation joue cependant un rôle important dans les calculs de 1664—1665; voir les p. 472, 474, 477, 508 et 551 du T. XVI, où nous avons désigné cette distance par l'expression „λ trunci" ou „λ cunei". Nous ignorons si Huygens eût pu formuler cette Proposition déjà en 1664; il ne connaissait peut-être la Prop. XIX qui suit que dans des cas particuliers (voir la note 1 de la p. 302).

Quia enim ſumma quadratorum, à diſtantiis ab axe F, applicata ad diſtantiam FE, multiplicem ſecundum partium numerum, facit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni*. Iſti vero quadratorum ſummæ æquale ponitur planum H, multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H, multiplex per eundem particularum numerum, ſi applicetur ad diſtantiam FE, multiplicem | ſecundum particularum numerum; ſive, omiſſa communi multiplicitate, ſi planum H applicetur ad diſtantiam FE; orietur quoque longitudo penduli ſimplicis iſochroni. Quam proinde ipſam longitudinem FG eſſe conſtat. quod erat demonſtrandum.

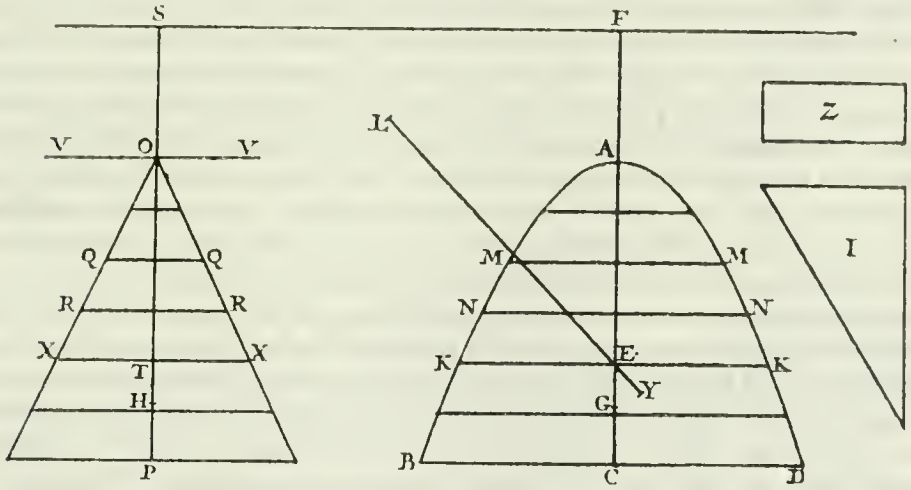
De centro oscillationis

* Prop. 6. huj. (p. 122).

PROPOSITIO XVIII.

Si ſpatium planum, cujus multiplex ſecundum numerum particularum ſuſpenſæ magnitudinis, æquetur quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis, axi oſcillationis parallelo; id, inquam, ſpatium ſi applicetur ad rectam, æqualem diſtantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis ejusdem magnitudinis [1]).

[Fig. 93.]



Eſto magnitudo ABCD [Fig. 93], cujus centrum gravitatis E; quæque ſuſpenſa ab axe, qui per punctum F ad planum hujus paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oſcillationis G. Porrò axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E tranſiens, parallelus. Diviſaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, ſit quadratis diſtantiarum, ab axe dicto per E, æquale planum I, multiplex nempe ſecundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad diſtantiam FE, fiat recta quædam. Dico eam æqualem eſſe intervallo EG, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis magnitudinis ABCD.

Ut enim univerſali demonſtratione quod propoſitum eſt comprehendamus: intelli-

DU CENTRE D'OSCILLATION.

universelle, une figure plane OQP analogue à la grandeur ABCD et placée à côté d'elle; il s'agit d'une figure qui, coupée par les mêmes plans horizontaux que la grandeur ABCD, ait ses segments, compris entre deux quelconques de ces plans, proportionnels aux segments correspondants de la dite grandeur. Supposons en outre chaque segment de la figure OQP divisé en un nombre de particules égales qui soit le même que celui du segment correspondant de la figure ABCD. Or, on peut se figurer cette construction exécutée quelle que soit la grandeur ABCD, en d'autres termes que ce soit une ligne, une surface ou un corps solide. Il est évident que toujours le centre de gravité T de la figure OQP est situé à la même hauteur que celui de la grandeur ABCD, et que par conséquent, si le plan horizontal passant par F coupe la ligne du centre [1]) de la figure OQP par exemple en S, les distances ST et FE sont égales.

Au reste il est constant que les carrés des distances de l'axe d'oscillation F, divisés par la distance FE multipliée par le nombre des particules, donnent la longueur du pendule isochrone *, que nous avons appelée FG. Or, on voit aisément que la somme de ces carrés est égale aux carrés des distances au plan horizontal passant par F plus les carrés des distances au plan vertical FE passant par l'axe F et le centre de gravité E *). Mais les carrés des distances de la grandeur ABCD au plan horizontal passant par F sont égaux aux carrés des distances de la figure OQP à la droite SF. Lesquels carrés (si O est le point le plus haut de la figure OQP et OH la subcentrique de l'onglet coupé sur lui par un plan passant par la droite OV parallèle à SF) sont égaux à la somme du rectangle OTH et du carré ST, multipliés chacun par le nombre des particules de la dite figure *, c.à.d. de la grandeur ABCD. Or, les carrés des distances de la grandeur ABCD au plan FE sont toujours les mêmes, quelle que soit la distance de l'axe d'oscillation F au centre de gravité E; posons qu'ils soient égaux au produit d'un espace Z par le nombre des particules de la grandeur ABCD.

* Prop. 6 de cette Partie.

* Prop. 47 du livre I d'Eucl.

* Prop. 9 de cette Partie.

Par conséquent, comme les carrés des distances de la grandeur ABCD à l'axe d'oscillation F sont égaux au carré de ST plus le rectangle OTH plus le plan Z, multipliés chacun par le nombre des particules égales, si cette expression entière est divisée par la distance FE ou ST, il en résultera la longueur FG du pendule isochrone avec la grandeur ABCD *. Mais de la division de ST^2 per son côté ST, résulte ST ou FE elle-même. Le reste EG est donc le quotient du rectangle OTH augmenté du plan Z par la même longueur ST ou FE.

* Prop. 6 de cette Partie.

C'est pourquoi il reste à prouver que le rectangle OTH augmenté du plan Z est égal au plan I. En effet, ceci étant démontré, il sera établi que la division du plan I par la distance FE donne aussi une longueur égale à EG. Or, nous le prouverons comme suit. Le rectangle OTH, multiplié par le nombre des particules de la figure OQP ou de la grandeur ABCD, est égal aux carrés des distances de la figure de la droite XT * tirée par le centre de gravité T parallèlement à SF; il est donc aussi égal aux

* Prop. 10 de cette Partie.

[1]) Voir sur cette expression la Définition VII de la p. 246. Il n'est pas nécessaire que la figure OQP

gatur plana figura, magnitudini ABCD analoga, ad latus adpoſita, OQP; quæ nempe, ſecta planis horizontalibus iisdem cum magnitudine ABCD, habeat ſegmenta inter|cepta inter bina quæque plana, in eadem inter ſe ratione cum ſegmentis dictæ magnitudinis, quæ ipſis reſpondent; ſintque ſegmenta ſingula figuræ OQP, diviſa in tot particules æquales, quot continentur ſegmentis ipſis reſpondentibus in figura ABCD. Hæc autem intelligi poſſunt fieri, qualiscunque fuerit magnitudo ABCD, ſive linea, ſive ſuperficies, ſive ſolidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ OQP, quod ſit T, eadem altitudine eſſe manifeſtum eſt cum centro gravitatis magnitudinis ABCD; ideoque, ſi planum horizontale, per F ductum, ſecet lineam centri [1]) figuræ OQP, velut hic in S, æquales eſſe diſtantias ST, FE. De centro oscillationis (p. 123).

Porrò autem conſtat quadrata diſtantiarum, ab axe oſcillationis F, applicata ad diſtantiam FE, multiplicem ſecundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli iſochroni *; quæ longitudo poſita fuit FG. Illorum vero quadratorum ſummam, æqualem eſſe perſpicuum eſt, quadratis diſtantiarum à plano horizontali per F, unà cum quadratis diſtantiarum à plano verticali FE, per axem F & centrum gravitatis E ducto *. Atqui quadrata diſtantiarum magnitudinis ABCD à plano horizontali per F, æquantur quadratis diſtantiarum figuræ OQP ab recta SF. Quæ quadrata (ſi O ſit punctum ſupremum figuræ OQP, & OH ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per rectam OV, parallelam SF) æqualia ſunt rectangulo OTH & quadrato ST, multiplicibus ſecundum numerum particularum dictæ figuræ *, ſive magnitudinis ABCD. Quadrata vero diſtantiarum magnitudinis ABCD à plano FE, quantumcunque axis oſcillationis F diſtet à centro gravitatis E, ſemper eadem ſunt: quæ proinde putemus æquari ſpatio Z, multiplici ſecundum numerum particularum magnitudinis ABCD.

* Prop. 6. huj.
* Prop. 47 lib. 1. Eucl.
* Prop. 9. huj.

Itaque quoniam quadrata diſtantiarum magnitudinis ABCD, ab axe oſcillationis F, æquantur iſtis, quadrato nimirum ST, rectangulo OTH, & plano Z, multiplicibus per numerum particularum ejusdem magnitudinis; ſi applicentur hæc omnia ad diſtantiam FE ſive ST, orietur longitudo FG penduli iſochroni magnitudini ABCD *. Sed ex applicatione quadrati ST ad latus ſuum ST, orietur ipſa ST, ſive FE. Ergo reliqua EG eſt ea quæ oritur ex applicatione rectanguli OTH, & plani Z, ad eandem ST vel FE.

* Prop. 6. huj.

Quare ſupereſt ut demonſtremus rectangulum OTH, cum plano Z, æquari plano I. Tunc enim conſtabit, etiam planum I, applicatum ad diſtantiam FE, efficere longitudinem ipſi EG æqualem. Illud autem ſic oſtendetur. Rectangulum OTH, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ OQP, ſive magnitudinis AB|CD, æquatur quadratis diſtantiarum figuræ ab recta XT *, quæ per centrum gravitatis T ducitur (p. 124).

* Prop. 10. huj.

ait une forme symétrique; en employant l'expression „linea centri" Huygens n'indique nullement que la figure doit avoir un axe de symétrie, comme le lui reprochent Heckscher et v. Oettingen dans la note 120 de leur traduction dans „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften".

DU CENTRE D'OSCILLATION.

carrés des diſtances de la grandeur ABCD au plan horizontal KK mené par le centre de gravité E, puiſque les diſtances ſont les mêmes dans l'un et l'autre cas. Mais le plan Z, multiplié par le même facteur, fut poſé égal aux carrés des diſtances de la grandeur ABCD au plan vertical FE. Et il eſt évident que ces carrés des diſtances au plan FE, augmentés des dits carrés des diſtances au plan horizontal paſſant par E, ſont égaux aux carrés des diſtances à l'axe de gravité paſſant par E parallèlement à l'axe F *. Par conſéquent le rectangle OTH augmenté du plan Z, multipliés l'un et l'autre par le nombre des particules de la grandeur ABCD, ſeront égaux aux carrés des diſtances de la même grandeur au dit axe paſſant par E. Mais le plan I lui auſſi, multiplié par le même nombre des particules, fut poſé égal à ces mêmes carrés des diſtances. Par conſéquent le plan I eſt égal à la ſomme du rectangle OTH et du plan Z. C'eſt ce qu'il reſtait à démontrer.

* Prop. 47 du livre 1 d'Eucl.

Cette propoſition fait voir de nouveau ce qui a été démontré dans la Prop. XVI, ſavoir qu'une grandeur quelconque eſt iſochrone avec elle-même lorſqu'elle eſt diverſement ſuſpendue et oſcille chaque fois autour d'un axe parallèle aux autres, tous les axes étant également diſtants du centre de gravité.

En effet, qu'une grandeur ABCD ſoit ſuſpendue à l'axe F ou bien à l'axe L qui lui eſt parallèle, il eſt évident que dans les deux cas les carrés des diſtances d'un axe parallèle aux axes F et L et paſſant par E ſont les mêmes. Par conſéquent le plan I dont le produit par le nombre des particules eſt égal à la ſomme des carrés, ſera le même dans l'un et l'autre cas. Mais ce plan, diviſé par la diſtance du centre de gravité à l'axe d'oſcillation, laquelle eſt par hypothèſe la même dans les deux cas, donne la diſtance de laquelle le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité; cette diſtance ſera donc la même dans les deux cas. Par exemple, ſi dans le cas de la ſuſpenſion en L la dite diſtance eſt EY, celle-ci ſera égale à EG et la droite entière YL à GF. Pour les deux ſuſpenſions le même pendule ſimple ſera donc iſochrone avec la grandeur ABCD.

PROPOSITION XIX.

Lorſqu'une même grandeur oſcille, la ſuſpenſion étant tantôt plus courte et tantôt plus longue, les diſtances des centres d'oſcillation au centre de gravité, qui reſte le même, ſeront inverſement proportionnelles aux diſtances des axes d'oſcillation à ce centre de gravité [1]).

Suppoſons qu'une grandeur à centre de gravité A [Fig. 94] ſoit d'abord ſuſpendue et agitée autour d'un axe B, enſuite autour d'un axe C, et que le centre d'oſcillation ſoit D dans le premier cas, E dans le ſecond. Je dis qu'on a BA : CA = EA : DA.

En effet, comme dans le cas de la ſuſpenſion en B la diſtance AD, de laquelle le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité, eſt obtenue en diviſant par la diſtance BA un eſpace dont le produit par le nombre des très petites particules éga-

[1]) C'est la Proposition de la note 2 de la p. 528 du T. XVI, où elle n'est cependant formulée

ipſi SF parallela; ac proinde etiam quadratis diſtantiarum magnitudinis ABCD, à plano horizontali KK, ducto per centrum gravitatis E; cum diſtantiæ utrobique ſint eædem. At vero planum Z, ſimiliter multiplex, æquale poſitum fuit quadratis diſtantiarum magnitudinis ABCD à plano verticali FE. Ac patet quidem quadrata hæc diſtantiarum à plano FE, una cum dictis quadratis diſtantiarum à plano horizontali per E, æqualia eſſe quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis per E, qui ſit axi F parallelus *. Itaque rectangulum OTH una cum plano Z, multiplicia ſecundum numerum particularum magnitudinis ABCD, æqualia erunt quadratis diſtantiarum ejusdem magnitudinis à dicto axe per E. Sed & planum I, multiplex ſecundum eundem particularum numerum, æquale poſitum fuit iisdem diſtantiarum quadratis. Ergo planum I æquale eſt rectangulo OTH & plano Z ſimul ſumptis. quod oſtendendum ſupererat.

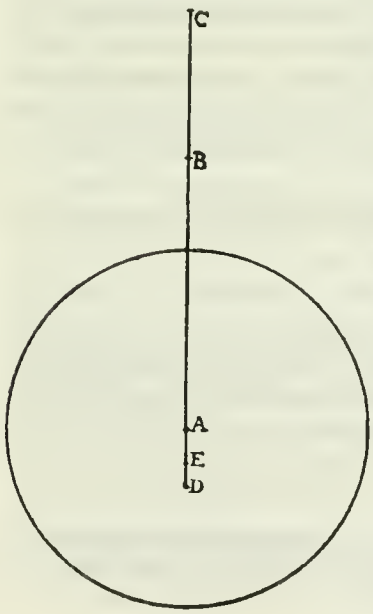
De centro oscillationis

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

Hinc rurſus manifeſtum ſit, quod propoſitione 16 demonſtratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, ſi aliter atque aliter ſuſpendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui à centro gravitatis ſuæ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochronam eſſe.

Sive enim magnitudo ABCD ſuſpendatur ab axe F, ſive ab axe L illi parallelo; patet eadem utrobique eſſe quadrata diſtantiarum ab axe per E, qui ſit axibus F vel L parallelus. Unde & planum I, cujus multiplex, ſecundum numerum particularum, æquatur quadratorum ſummæ, utroque caſu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad diſtantiam centri gravitatis ab axe oſcillationis, quæ utroque caſu eadem ponitur, efficit diſtantiam qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis; Ergo etiam hæc diſtantia utroque caſu eadem erit. Velut ſi, facta ſuſpenſione ex L, fuerit dicta diſtantia EY, erit ipſa æqualis EG; & tota YL æqualis GF; adeoque, in ſuſpenſione utraque, idem pendulum ſimplex iſochronum ſit magnitudini ABCD.

[Fig. 94.]



PROPOSITIO XIX.

Si magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius ſuſpenſa, agitetur; erunt, ſicut diſtantiæ axium oſcillationis à centro gravitatis inter ſe, ita contraria ratione diſtantiæ centrorum oſcillationis ab eodem gravitatis centro [1]).

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A, ſuſpenſa primum atque agitata ab axe in B, deinde vero ab axe in C; ſitque in prima | ſuſpenſione centrum oſcillationis D, in poſteriori vero centrum oſcillationis E. Dico eſſe ut BA ad CA ita EA ad DA. (*p.* 125).

Quum enim, in ſuſpenſione ex B, efficiatur diſtantia AD, qua nempe centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis, applicando ad diſtantiam BA ſpatium quoddam, cujus multiplex ſecundum numerum

Du centre d'oscillation.

les dans lesquelles la grandeur est divisée par la pensée est égal aux carrés des distances à un axe passant par A parallèlement a l'axe B*, le rectangle BAD sera égal au dit espace. De même dans le cas de la suspension en C, comme la distance AE est obtenue par la division du dit espace par la distance CA, le rectangle CAE lui aussi sera égal à ce même espace. Les rectangles BAD et CAE sont donc égaux entre eux; partant le rapport BA : CA est le même que AE : AD. C.Q.F.D.

* Prop. précéd.

Il en résulte évidemment que lorsqu'un pendule simple isochrone avec la grandeur suspendue est donné pour une suspension déterminée, et que le centre de gravité de la grandeur est connu, la longueur du pendule isochrone est également connue pour toute autre suspension plus courte ou plus longue, pourvu que le plan de l'oscillation reste le même.

PROPOSITION XX.

Le centre d'oscillation et le point de suspension sont réciproques [1]).

Dans la figure qui précède [Fig. 94] le centre d'oscillation est D lorsque le corps est suspendu en B; mais lorsqu'on invertit toutes choses et qu'on suppose le corps suspendu en D, le centre d'oscillation sera B. C'est ce qui résulte clairement de la proposition précédente.

PROPOSITION XXI.

Comment on trouve les centres d'oscillation dans les figures planes [2]).

Lorsqu'on a compris ce qui a été démontré jusqu'ici, il sera désormais facile de définir les centres d'oscillation dans la plupart des figures qu'on a coutume de considérer en géométrie. Et pour parler d'abord des figures planes, nous avons défini plus haut pour elles deux oscillations différentes, savoir celle autour d'un axe situé dans le plan de la figure et celle autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, dont nous avons appelé la première plane et la deuxième latérale.

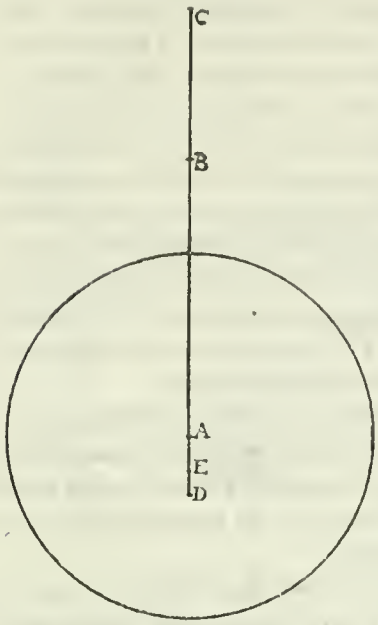
Que si la figure est mise en mouvement de la première façon, savoir autour d'un

---

que pour des figures planes oscillant dans leur plan. A la p. 509 du T. XVI on trouve implicitement (note 1) cette proposition dans le cas d'une figure plane oscillant perpendiculairement à son plan; comparez le septième alinéa de la p. 472 du T. XVI. Les anagrammes de 1669 (n°. 11 à la p. 489 du T. VI) parlent explicitement de la constance du Rectangulum distantiarum, c.à.d. du produit de la distance du centre d'oscillation au centre de gravité par la distance de ce dernier à l'axe d'oscillation. Comparez le deuxième alinéa de la p. 373 du T. XVI et la note 1 de la p. 298 qui précède.

[1]) Comme nous l'avons dit aux p. 373—374 du T. XVI, on ne trouve pas encore cette Proposition dans les travaux antérieurs à 1666. Les anagrammes de 1669 (note précédente) ne la mentionnent pas, de sorte qu'elle peut dater de plus tard.

[Fig. 94.]



particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo divisa intelligitur, æquatur quadratis distantiarum ab axe per A, parallelo axi in B *; erit proinde rectangulum BAD dicto spatio æquale. Item in suspensione ex C, quum sit distantia AE, applicando idem dictum spatium ad distantiam CA; erit & rectangulum CAE eidem spatio æquale. Itaque æqualia inter se rectangula BAD, CAE; ac proinde ratio BA ad CA eadem quæ AE ad AD. quod erat demonstrandum. De centro oscillationis * Prop. præc.

Hinc patet, dato pendulo simplici, quod magnitudini suspensæ isochronum sit in una suspensione, datoque ejus centro gravitatis; etiam in alia omni suspensione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oscillationis, longitudinem penduli isochroni datam esse.

PROPOSITIO XX.

Centrum Oscillationis & punctum suspensionis inter se convertuntur [1]).

In figura superiori [Fig. 94], quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D; etiam invertendo omnia, ponendoque suspen|sionem ex D, erit tunc centrum oscillationis B. Hoc enim ex ipsa propositione præcedenti manifestum est. (*p.* 126).

PROPOSITIO XXI.

Quomodo in figuris planis centra oscillationis inveniantur [2]).

Intellectis quæ hactenus demonstrata sunt, facile jam erit in plerisque figuris, quæ in Geometria considerari consueverunt, definire oscillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus; duplicem in iis oscillationis motum supra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus sit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus.

Quod si priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, sicut

[2]) Même si nous ne possédions pas les travaux antérieurs à 1666, on se figurerait aisément que la recherche des centres d'oscillation dans des cas particuliers a dû précéder l'établissement de la théorie générale.

Du centre d'oscillation.

axe ſitué dans ſon plan, par exemple la figure BCD autour de l'axe EF [Fig. 95], on obtiendra le centre d'oſcillation K de cette figure de la manière ſuivante. Conſidérons l'onglet coupé ſur la figure par un plan qui traverſe celui de la figure de telle manière que l'interſection DD eſt parallèle à l'axe d'oſcillation. Soit donnée la diſtance AD du centre de gravité de la figure à cette interſection, ainſi que la ſubcentrique DH du dit onglet par rapport à la même interſection. C'eſt en diviſant le rectangle DAH par la diſtance FA qu'on trouve le centre d'oſcillation K de la figure BDC, puiſque cette diviſion donne la diſtance AK de laquelle le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité. En effet, le rectangle DAH, multiplié par le nombre des particules de la figure BCD, eſt égal aux carrés des diſtances à la droite BAC parallèle à l'axe d'oſcillation EF et paſſant par le centre de gravité A*. Par conſéquent la diviſion du même rectangle par la diſtance FA nous donnera la diſtance AK de laquelle le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre de gravité A*.

* Prop. 10 de cette Partie.

* Prop. 18 de cette Partie.

Il eſt donc manifeſte que ſi DD eſt l'axe d'oſcillation, le centre d'oſcillation tombe en H et que conſéquemment la longueur DH du pendule ſimple iſochrone avec la figure BCD eſt alors préciſément la ſubcentrique par rapport à DD de l'onglet limité par un plan paſſant par la même droite DD. Ceci ſeul avait été remarqué avant moi par d'autres, ſans toutefois qu'ils l'euſſent démontré [1]).

Il n'entre pas dans notre plan d'expoſer comment on trouve les centres de gravité des onglets coupés ſur des figures planes, et déjà ils ſont connus dans beaucoup de cas. Par exemple ſi la figure BCD eſt un cercle, DH ſera égale à $\frac{5}{8}$ fois le diamètre. Si c'eſt un rectangle, on aura DH $= \frac{2}{3}$ du diamètre. D'où paraît la raiſon pour laquelle une verge, ou ligne peſante, ſuſpendue par un de ſes bouts eſt iſochrone avec un pendule d'une longueur de $\frac{2}{3}$ de la ſienne; ſavoir en conſidérant cette ligne comme ſi c'était un rectangle de largeur extrêmement petite.

---

[1]) Voir sur ce sujet les p. 57—58 de l'Avertissement qui précède.

[Fig. 95.]

De centro oscillationis

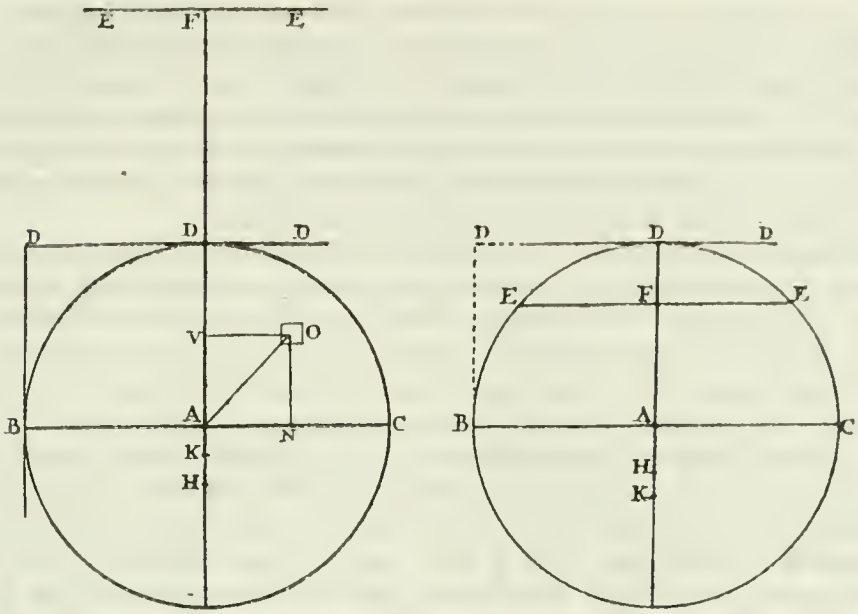


figura BCD circa axem EF [Fig. 95]; hic, ſi cuneus ſuper figura intelligatur abſciſſus, plano quod ita ſecet planum figuræ, ut interſectio, quæ hic eſt DD, ſit parallela oſcillationis axi; deturque diſtantia centri gravitatis figuræ ab hac interſectione, ut hic AD; itemque ſubcentrica cunei dicti ſuper eadem interſectione, quæ hic ſit DH. Habebitur centrum oſcillationis K, figuræ BDC, applicando rectangulum DAH ad diſtantiam FA; quoniam ex applicatione hac orietur diſtantia AK, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis. Eſt enim rectangulum DAH, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ BCD, æquale quadratis diſtantiarum ab recta BAC, quæ per centrum gravi|tatis A parallela ducitur axi oſcillationis EF *. Quare, applicando idem rectangulum ad diſtantiam FA, orietur diſtantia AK, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis A *. (p. 127). * Prop. 10. huj. * Prop. 18. huj.

Hinc manifeſtum eſt, ſi axis oſcillationis ſit DD, fieri centrum oſcillationis H punctum, adeoque longitudinem DH, penduli ſimplicis iſochroni figuræ BCD, eſſe tunc ipſam ſubcentricam cunei, abſciſſi plano per DD, ſuper ipſam DD. Quod unum ab aliis ante animadverſum fuit, non tamen demonſtratum [1]).

Quomodo autem centra gravitatis cuneorum ſuper figuris planis inveniantur, perſequi non eſt inſtituti noſtri, & jam in multis nota ſunt. Velut, quod ſi figura BCD ſit circulus, erit DH æqualis $\frac{5}{8}$ diametri. Si rectangulum, erit DH ∞ $\frac{2}{3}$ diametri. Unde & ratio apparet cur virga, ſeu linea gravitate prædita, altero capite ſuſpenſa, iſochrona ſit pendulo longitudinis ſubſesquialteræ. Conſiderando nempe lineam ejusmodi, ac ſi eſſet rectangulum minimæ latitudinis.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Que si la figure est un triangle dont le sommet est tourné vers le haut, on trouve DH = $\frac{3}{4}$ du diamètre; s'il est tourné vers le bas, DH = la moitié du diamètre.

Il faut savoir en outre que ce qui a été démontré dans la Prop. XVI s'applique de la façon suivante au mouvement considéré de la figure plane: si nous donnons à la figure BCD toutes sortes de positions différentes, la faisant tourner autour de l'axe BAC du manière à lui donner une position horizontale ou oblique, tandis que l'axe d'oscillation FE demeure le même, la longueur FK du pendule isochrone sera également invariable. Voilà ce que cette proposition nous enseigne.

Considérons en second lieu le mouvement oscillatoire d'une figure plane autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, ce que nous avons appelé oscillation latérale; par exemple celle de la figure BCD [Fig. 96] autour d'un axe passant par le point F normalement au plan DBC. Dans ce cas il faut prendre en considération, outre l'onglet coupé sur la figure par un plan passant par DD, tangente à la figure en son plus haut point, un deuxième onglet coupé par un plan passant par BD, tangente latérale à la figure et perpendiculaire à la tangente DD [1]). Et il faut qu'outre le centre de gravité A de la figure et la subcentrique HD du premier onglet, la subcentrique LB du deuxième onglet soit également connue. En effet, de cette façon on connaîtra les rectangles DAH et BAL dont la somme, que dans la suite nous appellerons aussi le Rectangle d'oscillation, constitue l'espace qui, divisé par la distance FA, donnera la distance AK de laquelle le centre d'oscillation K est inférieur au centre de gravité A.

---

[1]) Dans son exemplaire de l'„Horol. osc." Huygens a substitué à cette phrase une explication plus ample de sa méthode de calcul; voir le texte latin qui suit. On peut en outre consulter le T. XVI sur des calculs de ce genre.

Voici le nouveau texte latin, destiné à remplacer la partie „hic jam præter cuneum ..... Oportetque dari":

„hic jam habenda est summa quadratorum à distantijs particularum omnium ab recta quæ per centrum gravitatis A intelligitur axi oscillationis parallela; secundum ea quæ propos. 18 exposita fuere. Hoc est summa quadratorum à distantijs ab ipso A centro gravitatis, quoniam figura plana est. Sive etiam summa quadratorum à distantijs tam ab recta BAC, quam ab recta DA. Constat enim quadratum rectæ OA, quam pono esse distantiam unius cujusdam particulæ à centro A, æquari quadratis distantiarum ON, OV, quibus eadem particula abest a rectis BAC, DA*. Atqui summa quadratorum à distantijs ab recta BAC, æquatur rectangulo DAH, si DH sit subcentrica cunei, super figura abscissi per tangentem DD, parallelam BA*. Item summa quadratorum a distantijs ab recta DA æquatur rectangulo BAL, si BL sit subcentrica cunei, abscissi per tangentem BD, parallelam AD. Oportet itaque dari. . . ."

* per 47. lib. 1 Elem.

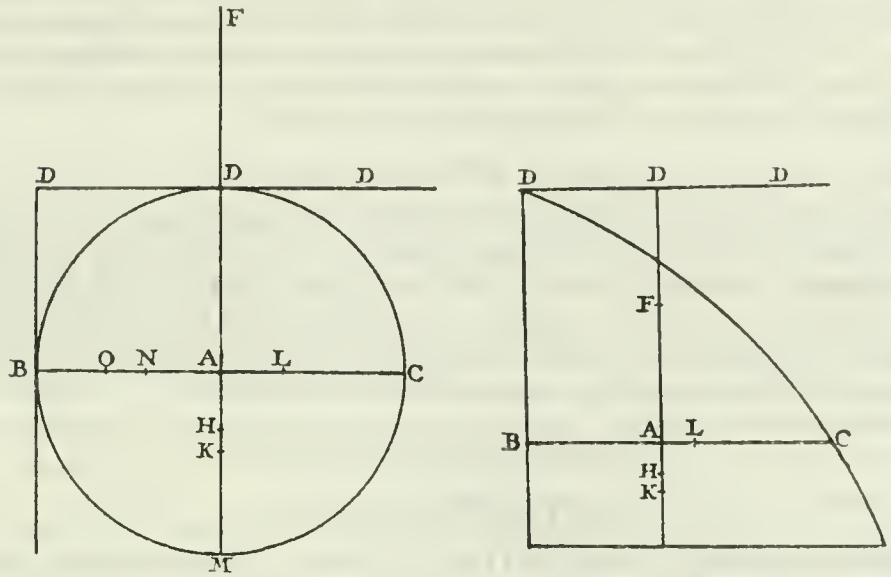
* Prop. 10. huj.

Dans son édition de 1724 's Gravesande a incorporé ce passage dans le texte conformément à l'intention de Huygens exprimée par lui („interferantur ad marginem annotata",

Quod ſi figura triangulum fuerit, vertice ſurſum converſo, ſit DH $\frac{3}{4}$ diametri. Si deorſum, $\frac{1}{2}$ diametri. DE CENTRO OSCILLATIONIS

Quod autem propoſitione 16 demonſtratum fuit, id ad hujusmodi figuræ planæ motum ita pertinere ſciendum. Nempe, ſi aliam atque aliam poſitionem demus figuræ BCD, invertendo eam circa axem BAC, ut vel horizonti parallela jaceat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe FE, etiam longitudo penduli iſochroni FK eadem manebit. Hoc enim ex propoſitione illa manifeſtum eſt.

[Fig. 96.]



Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitatur; quam vocavimus agitationem in latus; velut ſi figura BCD [Fig. 96] moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum DHC erectus; hic jam [1]) præter cuneum ſuper figura, qui abſcinditur plano ducto per DD, tangentem figuram in puncto ſummo, alter quoque conſiderandus cuneus qui abſcinditur plano per BD tangentem figuram in latere, quæque tangenti DD ſit ad rectos angulos. Oportetque dari [1]), præter figuræ centrum gravitatis A, ſubcentricamque HD cunei prioris, etiam ſubcentricam LB cunei poſterioris. Ita enim nota erunt rectangula DAH, BAL, quæ ſimul ſumpta faciunt hic ſpatium applicandum, quod deinceps etiam rectangulum oſcillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad diſtantiam FA, dabit diſtantiam AK, qua centrum oſcillationis K inferius eſt centro gravitatis A.

---

etc.) dans une note manuscrite ajoutée aux „Corrigenda" de la dernière page de l'édition originale (comparez la note 3 de la p. 92 qui précède). Voulant conserver aussi le texte ancien nous ne suivons pas en cet endroit l'exemple de 's Gravesande.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Mais ſi FA eſt un axe de la figure BCD [Fig. 96, I] on pourra, au lieu de l'onglet coupé par BD ſur la figure entière, ſe ſervir d'un onglet coupé ſur la demi-figure DBM par un plan paſſant par DM. Car ſi OA eſt la ſubcentrique par rapport à DM de cet onglet et NA la diſtance à la même droite DM du centre de gravité de la figure plane DBM, il appert que le rectangle OAN eſt égal au rectangle BAL*. De cette façon la ſomme des rectangles OAN et DAH ſera auſſi le plan qu'il faut diviſer par la diſtance FA pour obtenir la diſtance AK.

* Prop. 11 de cette Partie.

La démonſtration de ces dernières choſes eſt manifeſte par les précédentes, puiſque les rectangles DAH et BAL ou DAH et OAN, multipliés par le nombre des particules de la figure, ſont égaux aux carrés des diſtances au centre de gravité A, ou bien, ce qui eſt ici la même choſe, aux carrés des diſtances à un axe de gravité parallèle à l'axe d'oſcillation, et que par conſéquent le quotient des rectangles ſuſdits par la diſtance FA nous donne la longueur de l'intervalle AK*.

* Prop. 18 de cette Partie.

Centre d'oſcillation du cercle.

Or, dans le cas du cercle [Fig. 96] il eſt évident que les rectangles DAH et BAL ſont égaux entre eux et que leur ſomme conſtitue la moitié du carré du rayon. Par conſéquent ſi, comme FA eſt au rayon AB, ainſi ce dernier eſt dit ſe rapporter à une autre longueur, la moitié de cette longueur-là ſera la diſtance AK du centre de gravité au centre d'oſcillation. Lorſque le cercle oſcille autour de l'axe D pris ſur la circonférence, DK ſera donc égale aux trois quarts du diamètre DM.

Suivant la même méthode [1]) nous avons auſſi trouvé les centres d'oſcillation dans le cas des figures planes ſuivantes; qu'il ſuffiſe de publier les réſultats du calcul.

Centre d'oſcillation du rectangle.

Dans tout rectangle tel que CB [Fig. 97] l'eſpace qui doit être diviſé par une longueur, en d'autres termes le rectangle d'oſcillation, eſt trouvé égal au tiers du carré de la demi-diagonale AC. Il s'enſuit que lorſque le rectangle eſt ſuſpendu à un de ſes angles et agité latéralement, le pendule qui lui eſt iſochrone eſt égal à $\frac{2}{3}$ de la diagonale entière [2]).

Centre d'oſcillation du triangle iſoſcèle.

Dans le cas du triangle iſoſcèle, tel que CBD [Fig. 98], l'eſpace qui doit être diviſé par une longueur eſt égal à la 18ième partie du carré du diamètre BE augmentée de la 24ième partie du carré de la baſe CD.

---

[1]) En réalité la longueur du pendule isochrone avec le cercle suspendu en un point de sa circonférence et oscillant dans son plan avait été trouvée tout autrement; voir la p. 455 du T. XVI. Comparez le troisième alinéa de la p. 322 qui suit.

Si vero FA ſit axis figuræ BCD [Fig. 96, I], poteſt, pro cuneo abſciſſo per | BD (*p.* 128). ſuper figura tota, adhiberi cuneus ſuper figura dimidia DBM abſciſſus plano per DM. Nam, ſi cunei hujus ſubcentrica ſuper DM ſit OA, diſtantia vero centri gr. figuræ planæ DBM ab eadem DM ſit NA, æquale eſſe conſtat rectangulum OAN rectangulo BAL *. Itaque rectangulum OAN, additum rectangulo DAH, conſtituet quoque planum applicandum ad diſtantiam FA, ut fiat diſtantia AK. De centro oscillationis * Prop. 11. huj.

Et horum quidem manifeſta eſt demonſtratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula DAH, BAL, vel DAH, OAN, multiplicia ſecundum numerum particularum figuræ, æqualia ſint quadratis diſtantiarum à centro gravitatis A; ſive, quod idem hic eſt, ab axe gravitatis axi oſcillationis parallelo; ac proinde rectangula dicta, ad diſtantiam FA applicata, efficiant longitudinem intervalli AK *. * Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Circuli.

Et in circulo quidem rectangula DAH, BAL, inter ſe æqualia eſſe liquet, ſimulque efficere ſemiſſem quadrati à ſemidiametro. Unde, ſi fiat ut FA ad ſemidiametrum AB, ita hæc ad aliam, ejus dimidium erit diſtantia AK, à centro gravitatis ad centrum oſcillationis. Si igitur circulus ab axe D, in circumferentia ſumpto, agitetur, erit DK æqualis tribus quartis diametri DM.

Ad hunc modum [1]) & in ſequentibus figuris planis centra oſcillationis quæſivimus, quæ ſimpliciter adſcripſiſſe ſufficiet. Nempe,

Centrum oſcillationis Rectanguli. (*p.* 129).

[Fig. 97.]

In rectangulo omni, ut CB [Fig. 97], ſpatium applicandum, ſive rectangulum oſcillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à ſemidiagonio AC. Unde ſequitur, ſi rectangulum ab aliquo angulorum ſuſpendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi iſochronum eſſe $\frac{2}{3}$ diagonii totius [2]).

Centrum oſcillationis Trianguli iſoſcelis.

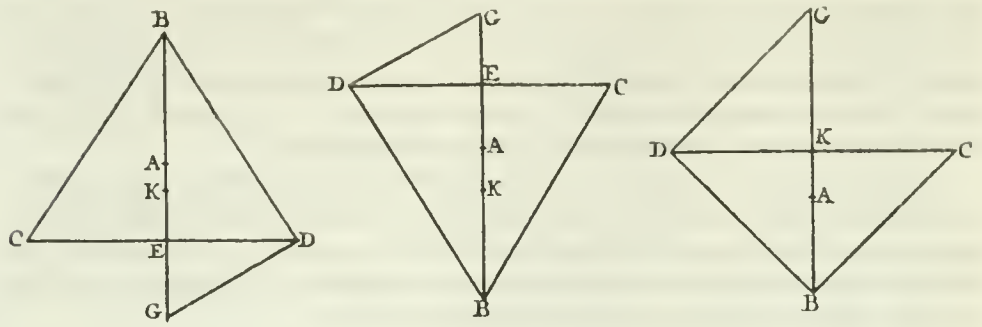
In triangulo iſoſcele, cujuſmodi CBD [Fig. 98], ſpatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro BE, & vigeſimæ quartæ quadrati baſeos CD.

---

[2]) Voir sur le rectangle oscillant latéralement les p. 456, 463—469 et 521—523 du T. XVI. Dans sa lettre du 10 octobre 1664 à Moray (T. V, p. 120) Huygens parle de „rectangles suspendus par un des angles [comme dans le présent texte] ou par le milieu des costez". Nous ne connaissons pas de calcul antérieur à 1666 sur le rectangle suspendu par un de ses angles.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

[Fig. 98.]



Par conſéquent, ſi à partir d'un angle de la baſe l'on tire DG perpendiculaire au côté DB et coupant en G le prolongement du diamètre BE, et que A eſt le centre de gravité du triangle, et ſi, après avoir diviſé l'intervalle GA en quatre parties égales, on en ajoute une, ſavoir KA, à BA; BK ſera la longueur du pendule iſochrone, le triangle étant ſuſpendu en ſon ſommet B. Mais lorſqu'il eſt ſuſpendu au point milieu E de la baſe, la longueur EK du pendule iſochrone ſera égale à la moitié de BG.

Il en réſulte que lorſqu'un triangle iſoſcèle rectangle eſt ſuſpendu au point milieu de la baſe, il eſt iſochrone avec un pendule ayant une longueur égale à ſon diamètre. Et que pareillement, lorſqu'il eſt ſuſpendu à ſon angle droit, il eſt iſochrone avec le même pendule [1]).

Centre d'oſcillation de la parabole.

Dans le cas d'un ſegment de parabole limité par une droite perpendiculaire à l'axe, l'eſpace qu'il faut diviſer par une droite eſt égal à $\frac{12}{175}$ fois le carré de l'axe plus la cinquième partie du carré de la demi-baſe. Lorſque la parabole eſt ſuſpendue à ſon ſommet, on trouve pour la longueur du pendule iſochrone une longueur de $\frac{5}{7}$ fois l'axe + le tiers du latus rectum. Mais lorſqu'elle eſt ſuſpendue au point milieu de la baſe, cette longueur ſera de $\frac{4}{7}$ fois l'axe plus la moitié du latus rectum [2]).

Centre d'oſcillation du ſecteur de cercle.

Si dans le ſecteur de cercle BCD [Fig. 99] le rayon BC eſt appelé r, le demi-arc CF p et la demi-corde CE b, l'eſpace qui doit être diviſé par une droite devient égal à $\frac{1}{2}r^2 - \frac{4b^2r^2}{9p^2}$, c.à.d. à $\frac{1}{2}$ BC^2 — BA^2, A étant par hypothèſe le centre de gravité du ſecteur, car on a alors BA $= \frac{2br}{3p}$. Le ſecteur étant ſuſpendu en B, centre du cercle dont il fait partie, le pendule iſochrone avec lui devient $\frac{3pr}{4b}$, c.à.d. les trois quarts de la droite dont le rapport au rayon BF eſt égal à celui de l'arc CFD à la corde CD.

Unde, ſi ab angulo baſeos ducatur DG, perpendicularis ſuper latus DB, quæ occurrat productæ diametro BE in G; ſitque A centrum gravitatis trianguli; diviſoque intervallo GA in quatuor partes æquales, una earum AK apponatur ipſi BA; erit BK longitudo penduli iſochroni, ſi triangulum ſuſpendatur ex vertice B. Cum autem ex puncto mediæ baſis E ſuſpenditur, longitudo penduli iſochroni EK æquabitur dimidiæ BG. DE CENTRO OSCILLATIONIS

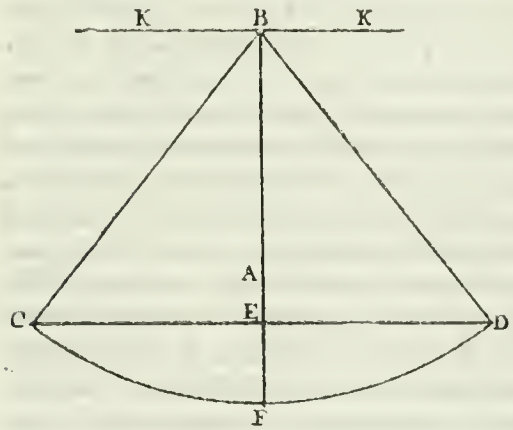
Atque hinc liquet, triangulum iſoſceles rectangulum, ſi ex puncto mediæ baſis ſuſpendatur, iſochronum eſſe pendulo longitudinem diametro ſuæ æqualem habenti. Similiterque, ſi ſuſpendatur ab angulo ſuo recto, eidem pendulo iſochronum eſſe [1]).

Centrum oſcillationis Parabolæ.

In parabolæ portione recta, ſpatium applicandum æquatur $\frac{12}{175}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ baſis. Cum|que parabola ex verticis puncto ſuſpenſa eſt, invenitur penduli iſochroni longitudo $\frac{5}{7}$ axis, atque inſuper $\frac{1}{3}$ lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ baſis ſuſpenditur, erit ea longitudo $\frac{4}{7}$ axis, & inſuper $\frac{1}{2}$ lateris recti [2]). (p. 130).

Centrum oſcillationis Sectoris circuli.

[Fig. 99.]



In circuli ſectore BCD [Fig. 99], ſi radius BC vocetur r: ſemiarcus CF, p: ſemiſubtenſa CE, b: ſit ſpatium applicandum æquale $\frac{1}{2}rr - \frac{4brr}{9pp}$, hoc eſt, dimidio quadrati BC, minus quadrato BA; ponendo A eſſe centrum gravitatis ſectoris. Tunc enim BA ∞ $\frac{2br}{3p}$. Si autem ſuſpendatur ſector ex B, centro circuli ſui, ſit pendulum ipſi iſochronum $\frac{3pr}{4b}$, hoc eſt, trium quartarum rectæ, quæ ſit ad radium BF ut arcus CFD ad ſubtenſam CD. Hæc autem inveniuntur cognitis ſubcentricis cuneorum;

[1]) Ce résultat fut déjà obtenu en 1664; voir la p. 456 du T. XVI. Consultez aussi sur le triangle les p. 452—454, 462 et 522—525 du T. XVI.

[2]) Voir sur le centre d'oscillation d'un segment de parabole l'Appendice II à la Pars Quarta qui suit.

Du centre d'oscillation.

On obtient ces réſultats lorſqu'on connaît les ſubcentriques des onglets, tant de celui qui eſt coupé ſur le ſecteur total par un plan paſſant par BK parallèle à la corde CD (nous trouvons que la ſubcentrique par rapport à BK de cet onglet eſt $\frac{3r}{8} - \frac{3a}{8} + \frac{3pr}{8b}$, en appelant a le ſinus verſus EF), que de celui qui eſt coupé ſur le demi-ſecteur BFC par un plan paſſant par BF (nous trouvons que la ſubcentrique de cet onglet-là par rapport à BF eſt $\frac{3b}{8} - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$)[1].

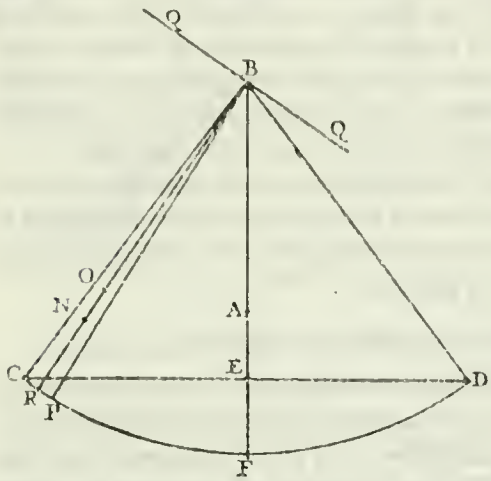
Mais on trouve auſſi le centre d'oſcillation du ſecteur d'après une autre méthode plus facile qui eſt la ſuivante. Soit le ſecteur BCP [Fig. 100], qui peut être conſidéré comme un triangle, une fort petite partie du ſecteur BCD. Or, les carrés des diſtances de ſes particules au point B ſont égaux aux carrés des diſtances à la droite BR qui diviſe le ſecteur en deux parties égales plus les carrés des diſtances à la droite BQ perpendiculaire à BR. Mais le rapport de ces derniers carrés aux premiers eſt ſupérieur à tout rapport donné, puiſque l'angle CBP eſt extrêmement petit; par conſéquent les premiers peuvent être conſidérés comme nuls. Prenons BO égale aux deux tiers de BR, ce qui revient à prendre O comme centre de gravité du triangle BCP, et BN égale aux trois quarts de BR, de ſorte que N eſt le centre de gravité de l'onglet coupé ſur le triangle BCP par un plan paſſant par BQ. Ceci étant poſé, il apparaît que les carrés des diſtances des particules du triangle BCP à la droite BQ ſont égaux au rectangle NBO multiplié par le nombre des particules du même triangle. Par conſéquent le rectangle NBO multiplié par ce nombre doit être eſtimé égal aux carrés des diſtances au point B des particules du triangle BCP. Or, les carrés de ces diſtances ſont aux carrés des diſtances du ſecteur entier BCD, comme le ſecteur BCP eſt au ſecteur BCD, en d'autres termes, comme le nombre des particules du ſecteur BCP eſt à celui des particules du ſecteur BCD: c'eſt ce qu'on comprend facilement en ſongeant que le ſecteur BCD peut être diviſé en ſecteurs tels que BCP. Par conſéquent le rectangle NBO, multiplié par le nombre des particules du ſecteur BCD, ſera égal aux carrés des diſtances au point B de ces particules. Le rectangle NBO, diviſé par BA qui eſt la diſtance du point de ſuſpenſion au centre de gravité du ſecteur, donnera donc la longueur du pendule iſochrone lorſque le ſecteur eſt ſuſpendu en B*. Or, le rectangle NBO eſt égal à $\frac{1}{2}r^2$ et la diſtance BA, comme nous l'avons déjà dit auparavant, à $\frac{2br}{3p}$. Par la diviſion on obtient donc $\frac{3pr}{4b}$ pour la longueur du pendule iſochrone, comme nous l'avions auſſi trouvé plus haut.

* Prop. 17 de cette Partie.

[1]) Comparez le calcul des p. 487—489 et 524—529 du T. XVI. On trouve un autre calcul sur le secteur de cercle aux p. 489—490 du T. XVI.

tum illius qui ſuper ſectore toto abſcinditur, plano ducto per BK parallelam ſubtenſæ CD, cujus cunei ſubcentricam ſuper BK invenimus eſſe $\frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3pr}{8b}$, vocando a ſinum verſum EF; tum illius qui ſuper dimidio ſectore BFC abſcinditur plano per BF, cujus nempe cunei ſubcentricam ſuper BF invenimus $\frac{3}{8}b - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$ [1]. De centro oscillationis

[Fig. 100.]



Sed & alia via, ſectoris centrum oſcillationis, facilius invenitur, quæ eſt hujusmodi. Intelligatur ſectoris BCD [Fig. 100] pars minima ſector BCP, qui trianguli loco haberi poteſt. Quadrata autem, à diſtantiis particularum ejus à puncto B, æqualia ſunt quadratis diſtantiarum ab recta BR, bifariam ſectorem dividente, una cum quadratis diſtantiarum ab recta BQ, quæ ipſi BR eſt ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data eſt major, quoniam angulus CBP minimus; ideoque illa pro nullis habenda ſunt.

Poſitâ vero BO duarum tertiarum (p. 131). BR, hoc eſt, poſito O centro gravitatis trianguli BCP; & BN trium quartarum BR: ut nempe N ſit centrum gravitatis cunei, ſuper trianguli BCP abſciſſi plano per BQ. His poſitis, conſtat quadrata, à diſtantiis particularum trianguli BCP ab recta BQ, æquari rectangulo NBO multiplici ſecundum particularum ejuſdem trianguli numerum. Itaque rectangulum NBO, ita multiplex, æquale cenſendum quadratis diſtantiarum à puncto B particularum trianguli BCP. Sunt autem quadrata diſtantiarum harum, ad quadrata diſtantiarum totius ſectoris BCD, ſicut ſector BCP ad ſectorem BCD, hoc eſt, ſicut numerus particularum ſectoris BCP, ad numerum particularum ſectoris BCD; hoc enim facile intelligitur, eo quod ſector BCD dividatur in ſectores qualis BCP. Ergo rectangulum NBO, multiplex ſecundum numerum particularum ſectoris BCD, æquale erit quadratis diſtantiarum particularum ejus à puncto B. Ideoque rectangulum NBO, applicatum ad BA, diſtantiam inter ſuſpenſionem & centrum gravitatis ſectoris, dabit longitudinem penduli iſochroni, cum ſector ex B ſuſpenditur *. Eſt autem rectangulum NBO $\propto \frac{1}{2}rr$: diſtantia autem BA, ut jam ante diximus, $\propto \frac{2br}{3p}$. Unde, facta applicatione, oritur $\frac{3pr}{4b}$, longitudo penduli iſochroni, ut ante quoque inventa fuit.

* Prop. 17. hui.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Le Centre d'oſcillation du cercle, autrement que ci-deſſus.

De la même manière on peut auſſi trouver fort ſimplement le centre d'oſcillation du cercle. Conſidérons en effet le cercle GCF à centre B [Fig. 101], et dans ce cercle le ſecteur extrêmement petit BCP, comme nous l'avons fait plus haut dans le cas du ſecteur BCD.

Comme alors, ſuivant ce que nous venons d'expoſer, les carrés des diſtances des particules du ſecteur BCP au centre B ſont égaux au rectangle NBO, c.à.d. à la moitié du carré du rayon multiplié par le nombre des particules du ſecteur, et que le cercle eſt entièrement compoſé de ſecteurs de ce genre, il en réſulte que les carrés des diſtances des particules du cercle entier au centre B ſeront égaux à la moitié du carré du rayon multiplié par le même nombre, celui des particules du cercle.

Or, B eſt le centre de gravité du cercle. Par conſéquent la dite moitié du carré du rayon ſera ici l'eſpace qui doit être diviſé par la diſtance du point de ſuſpenſion au centre B pour obtenir l'intervalle dont le centre d'oſcillation eſt inférieur au centre B*, ce qui s'accorde avec le réſultat trouvé plus haut.

* Prop. 18 de cette Partie.

Le Centre d'oſcillation de la circonférence du cercle.

Le centre d'oſcillation de la circonférence de cercle eſt trouvé encore plus facilement par cette méthode. Conſidérons une circonférence décrite du centre B avec le rayon BR [Fig. 102]. Le carré de BR, multiplié par le nombre des particules dans leſquelles la circonférence peut être diviſée par la penſée, eſt donc égal aux carrés des diſtances de toutes ces particules au centre B. BR^2 ſera par conſéquent ici l'eſpace qu'il faut diviſer par une droite *. Et il reſſort de là que lorſque la circonférence eſt ſuſpendue au point G ſitué ſur elle la longueur du pendule iſochrone eſt égale au diamètre GF [1]).

* Prop. 18 de cette Partie.

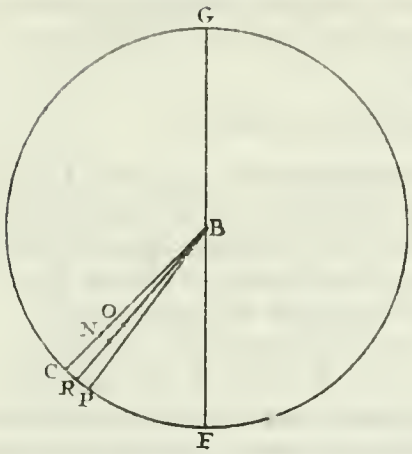
Le Centre d'oſcillation des polygones réguliers.

On trouve ſemblablement le pendule iſochrone correſpondant à un polygone ré-

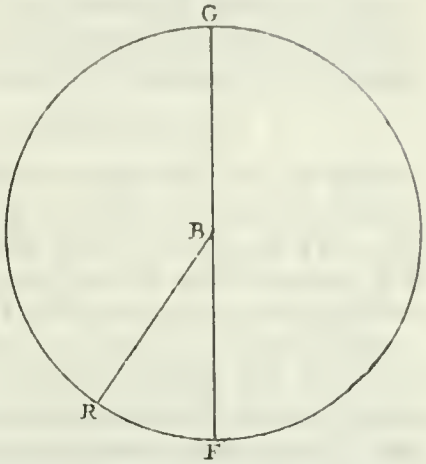
[1]) Voir sur la méthode de calcul qui avait fait connaître en 1664 la longueur du pendule isochrone avec la circonférence de cercle suspendue en un de ses points et oscillant dans son plan les p. 455 du T. XVI et 152 du T. XVII. Cette méthode est d'ailleurs mentionnée dans le dernier alinéa de p. 318.

Centrum oſcillationis Circuli, aliter quam ſupra. De centro oscillationis

[Fig. 101.]



[Fig. 102.]



Eodem modo etiam ſimpliciſſime, in circulo, centrum oſcillationis invenire licet. Sit enim circulus GCF, cujus centrum B [Fig. 101]; ſectorque in eo minimus intelligatur BCP, ſicut ante in ſectore BCD.

Cum igitur, ſecundum modo expoſita, quadrata, à diſtantiis particularum ſectoris (*p.* 132). BCP ad centrum B, æquentur rectangulo NBO, hoc eſt, dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum ſectoris ipſius particularum numerum; circulus autem ex ejusmodi ſectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à diſtantiis particularum circuli totius ad centrum B, æqualia dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum numerum earundem circuli particularum.

Eſt autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit ſpatium applicandum diſtantiæ inter ſuſpenſionem & centrum B, ut habeatur intervallum, quo centrum oſcillationis inferius eſt ipſo centro B*. quod & ſupra ita ſe habere oſtendimus. * Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Peripheriæ circuli.

Facilius etiam, centrum oſcillationis circumferentiæ circuli, hoc | pacto reperitur. (*p.* 133). Eſto enim circumferentia deſcripta centro B, radio BR [Fig. 102]. Quadratum igitur BR, multiplex ſecundum numerum particularum in quas circumferentia diviſa intelligitur, æquatur quadratis à diſtantiis omnium earum particularum ad centrum B. Quare quadratum BR erit hic ſpatium applicandum *. Patetque hinc, ſi ſuſpenſio ſit ex G, punctо circumferentiæ, penduli iſochroni longitudinem æquari diametro GF [1]). * Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Polygonorum ordinatorum.

Haud abſimiliter & polygono cuivis ordinato, ut ABC [Fig. 103], pendulum iſo-

DU CENTRE D'OSCILLATION.

gulier quelconque tel que ABC [Fig. 103]. En effet, l'efpace qu'il faut divifer par une droite devient égal à la moitié du carré de la perpendiculaire abaiffée du centre fur le côté du polygone plus la vingt-quatrième partie du carré du côté. Mais fi l'on cherche le pendule ifochrone avec le périmètre du polygone, l'efpace qu'il faut divifer par une droite devient égal au carré de la perpendiculaire du centre fur le côté augmenté de la douzième partie du carré du côté [1]).

Ufage du lieu plan et du lieu folide dans cette théorie.

Outre cela la contemplation des lieux n'eft pas défagréable en ces chofes. Qu'on demande par exemple, étant donné le point de fufpenfion A et la longueur AB [Fig. 104], de trouver le lieu de deux poids égaux C, D, également diftants de A et de la perpendiculaire AB, qui foient ifochrones, en ofcillant autour de l'axe A perpendiculaire au plan paffant par ACD, avec le pendule fimple de longueur AB.

Pofons $AB = a$, et après que nous avons tiré CD coupant AB en E à angles droits, foit AE, grandeur indéterminée, $= x$ et EC ou ED $= y$. Par conféquent $AC^2 = x^2 + y^2$. Or, cette expreffion, multipliée par le nombre des particules des poids C et D, qui font confidérés ici comme extrêmement petits, eft égale aux carrés des diftances de ces mêmes particules de l'axe de fufpenfion A. La divifion de AC^2 ou $x^2 + y^2$ par la diftance AE de l'axe de fufpenfion au centre de gravité des poids C, D, donnera donc la longueur $\frac{x^2 + y^2}{x}$ du pendule ifochrone *, qui par hypothèfe doit être égale à AB ou a. Donc $\frac{x^2 + y^2}{x} = a$, et $y^2 = ax - x^2$. D'où il apparaît que le lieu des points C et D eft une circonférence de cercle dont le centre F eft fitué au milieu de AB et dont le rayon eft $\frac{1}{2}a$ ou FA. Par conféquent, en quelques points de la circonférence ACBD que deux poids égaux également diftants de A foient placés, ils feront ifochrones, en ofcillant autour de A, avec un pendule ayant une longueur égale au diamètre AB [2]).

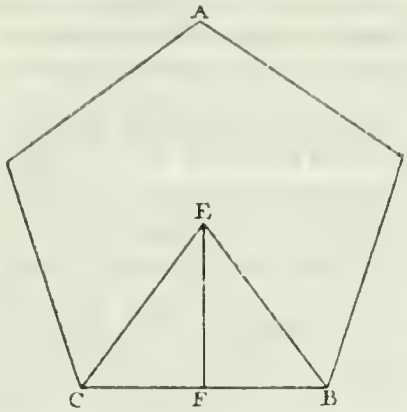
* Prop. 17 de cette Partie.

Il eft encore manifefte par là que la circonférence ACBD, fuppofée pefante, et

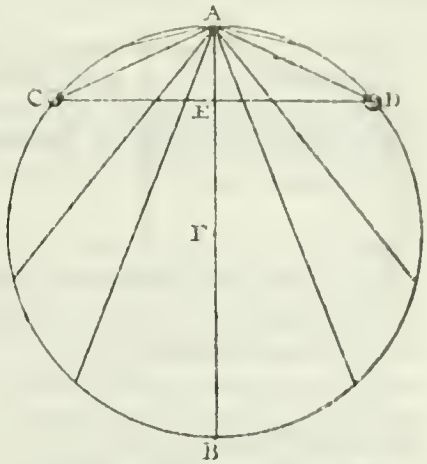
[1]) Voir sur la méthode bien plus laborieuse qui servit en 1664 à calculer la longueur du pendule isochrone avec un hexagone régulier oscillant dans son plan les p. 495—496 du T. XVI. Nous y avons déjà remarqué que le 12ème anagramme de 1669 donne la formule correspondante pour un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés.

[2]) Comparez les p. 447 du T. XVI et 152 du T. XVII.

[Fig. 103.]



[Fig. 104.]



De centro oscillationis

chronum invenitur. Fit enim, ſpatium applicandum, æquale ſemiſſi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una cum vigeſima quarta parte quadrati lateris. At, ſi perimetro polygoni pendulum iſochronum quæratur, fit ſpatium applicandum æquale quadrato perpendicularis à centro in latus, cum duodecima parte quadrati lateris[1]).

Loci plani & ſolidi uſus in hac Theoria.

Eſt præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda. Ut ſi propoſitum ſit, dato puncto ſuſpenſionis A, & longitudine AB [Fig. 104], invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æqualiter ab A & à perpendiculari AB diſtantium, quæ agitata circa axem in A, perpendicularem plano per ACD, iſochrona ſint pendulo ſimplici longitudinis AB.

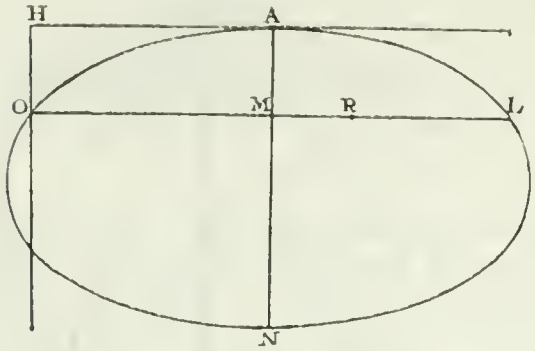
Ponatur AB ∞ a, ductâque CD, quæ ſecet AB ad angulos rectos in E, ſit AE indeterminata ∞ x : EC vel ED ∞ y. Ergo quadratum AC ∞ $xx + yy$. Hoc vero multiplex ſecundum numerum particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur, æquatur quadratis diſtantiarum earundem particularum ab axe | ſuſpenſionis (p. 134). A. Ergo quadratum AC, ſive $xx + yy$, applicatum ad diſtantiam AE, quæ nempe eſt inter axem ſuſpenſionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet $\frac{xx + yy}{x}$, longitudinem penduli iſochroni *; quam propterea oportet æqualem eſſe AB ſive a. * Prop. 17. hu.

Itaque $\frac{xx + yy}{x} \infty a$. Et $yy \infty ax - xx$. Unde patet, locum punctorum C & D, eſſe circumferentiam circuli, cujus centrum F, ubi AB biſariam dividitur, radius autem ∞ $\frac{1}{2}a$, ſive FA. Ergo, ubicunque in circumferentia ACBD duo pondera æqualia, æqualiter ab A diſtantia, ponentur, ea, ex A agitata, iſochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro AB[2]).

Atque hinc manifeſtum quoque, & circumferentiam ACBD, ſi gravitas ei tribuatur,

Du centre d'oscillation.

[Fig. 105.]



une portion quelconque d'elle divisée en deux parties égales par le point A ou B, est isochrone avec le même pendule AB lorsqu'elle est suspendue à l'axe passant par A [1]).

Donnons maintenant un exemple d'un lieu solide. Soit AN [Fig. 105] une ligne inflexible et impondérable et qu'on demande d'attacher à elle à angles droits en un point pris sur elle tel que M une ligne ou verge pondérable OML divisée en deux parties égales par le point M, dont les oscillations latérales, A étant le point de suspension, soient isochrones avec un pendule simple de longueur AN.

Tirons OH parallèlement à AN, et AH parallèlement à OM; et soit $OR = \frac{2}{3} OL$. OR sera par conséquent la subcentrique de l'onglet coupé sur la droite OL par un plan passant par OH. Mais la subcentrique du second onglet coupé sur la même droite OL par un plan passant par la droite AH (onglet qui n'est autre chose qu'un rectangle) sera la droite AN. Par conséquent le rectangle que nous avons appelé plus haut rectangle d'oscillation, sera seulement le rectangle OMR. Celui-ci, divisé par la longueur AM, donnera la distance de laquelle le centre d'oscillation de la ligne OL suspendue en A est inférieur au point M.

Soit maintenant $AN = a$, $AM = x$, MO ou $ML = y$. Le rectangle OMR est donc égal à $\frac{1}{3} y^2$. La division de cette expression par AM donne $\frac{1}{3} \frac{y^2}{x}$. Cette longueur devra donc être égale à MN, puisque nous voulons que le centre d'oscillation de la verge OL soit en N. L'équation devient donc égale à $\frac{1}{3} \frac{y^2}{x} + x = a$. D'où l'on tire $y = \sqrt{3ax - 3x^2}$. Ce qui signifie que les points O et L se trouvent sur une ellipse dont AN est le petit axe, tandis que le latus rectum par rapport aux ordonnées perpendiculaires à l'axe est le triple de AN.

Il en résulte manifestement, puisque toute verge parallèle à OL et ayant ses extrémités sur cette ellipse exécute des oscillations isochrones avec le pendule simple AN, que le plan entier de l'ellipse suspendu en A et oscillant latéralement sera également isochrone avec le pendule AN. Et il en sera de même pour une partie de l'ellipse limitée par une ou deux perpendiculaires à AN [2]).

Nous ajouterons encore un deuxième exemple d'un lieu plan dans lequel se rencontrent quelques choses dignes d'être remarquées.

[1]) Voir la note 1 de la p. 316.

& quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B divisam, & ab axe per A suspensam, eidem pendulo AB isochronam esse [1]). De centro oscillationis

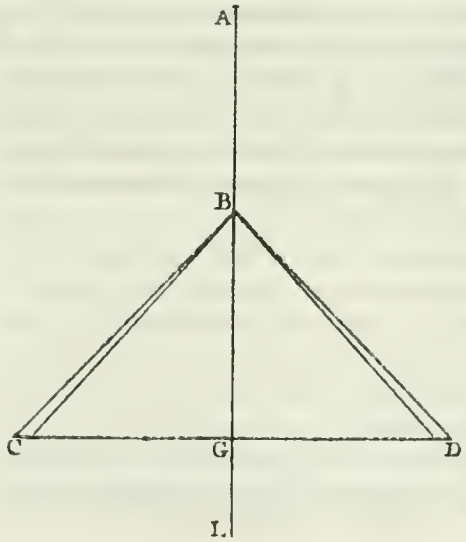
Loci vero solidi exemplum esto hujusmodi. Sit AN [Fig. 105] linea inflexilis sine pondere. Propositumque sit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipsi ad angulos rectos lineam, seu virgam, pondere præditam OML, ad M bisariam divisam, cujus in latus agitatæ oscillationes, ex suspensione A, isochronæ sint pendulo simplici longitudinis AN.

Ducatur OH parallela AN, & AH parallela OM, & sit OR æqualis $\frac{2}{3}$ OL. Itaque cunei super recta OL, abscissi plano per OH ducto, subcentrica erit OR. Sed cunei alterius super eadem OL, abscissi plano per rectam AH, (est autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) subcentrica erit ipsa AM. Quare rectangulum illud, quod supra Oscillationis vocavimus, erit solum rectangulum OMR. quod nempe, applicatum ad longitudinem AM, dabit distantiam centri oscillationis lineæ OL, ex A suspensæ, infra punctum M.

Sit jam AN ∞ a: AM ∞ x: MO vel ML ∞ y. Est ergo rectangulum OMR ∞ (*p.* 135). $\frac{1}{3}yy$. quo applicato ad AM, fit $\frac{1yy}{3x}$. quæ longitudo itaque ipsi MN æqualis esse debebit, cum velimus centrum oscillationis virgæ OL esse in N. Fit ergo æquatio $\frac{1yy}{3x} + x \infty a$. Unde $y \infty \sqrt{3ax - 3xx}$. Quod significat puncta O & L esse ad Ellipsin, cujus axis minor AN; latus rectum vero, secundum quod possunt ordinatim ad axem hunc applicatæ, ipsius AN triplum.

Hinc vero manifestum fit, cum omnis virga ipsi OL parallela, & ad Ellipsin hanc terminata, oscillationes isochronas habeat pendulo simplici AN, etiam totum Ellipseos planum, ex A suspensum & in latus agitatum, ipsi AN pendulo isochronum fore. Sed & partem Ellipseos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad AN perpendicularibus, abscindetur [2]).

[Fig. 106.]



Cæterum adscribemus & aliud loci plani exemplum, in quo nonnulla notatu digna occurrunt.

---

[2]) Comparez les p. 444—446 et 540—541 du T. XVI.

Du centre d'oscillation.

Soit ſuſpendue en A la verge impondérable AB [Fig. 106] et qu'on demande d'attacher à un point B donné ſur elle deux triangles égaux et écartés d'un même angle de l'axe AB, tels que leurs angles auprès de B étant conſidérés comme extrêmement ou plutôt infiniment petits ils exécutent des oſcillations iſochrones avec un pendule ſimple de longueur donnée AL [1]).

On trouve dans ce cas, après avoir tiré CG perpendiculairement à BG et poſé $AB = a$, $AL = b$, $BG = x$, $CG = y$, l'équation

$$y = \sqrt{2ab - 2a^2 - \tfrac{8}{3}ax + \tfrac{4}{3}bx - x^2},$$

d'où il reſſort que les baſes C et D des triangles conſidérées ici comme punctiformes ſe trouvent ſur une circonférence de cercle [Fig. 107], puiſque la formule contient le terme ſans facteur $-xx$.

Or, on peut obſerver dans ce cas que ſi $a = 0$, c.à.d. ſi le point où les triangles BC et BD ſont attachés eſt le point A lui-même, l'équation ſera $y = \sqrt{\tfrac{4}{3}bx - x^2}$. Par conſéquent, ſi l'on prend alors $AO = \tfrac{2}{3}b$, c.à.d. $\tfrac{2}{3}$ AL, et qu'on décrit du centre O par A le cercle ADN, les baſes des triangles AC et AD ſeront ſituées ſur ſa circonférence. Comme une paire de triangles fort aigus ayant leur ſommet commun au point A de la circonférence ACND, égaux et ſymétriquement placés, a donc ſon centre d'oſcillation au point L, en prenant $AL = \tfrac{3}{4}$ du diamètre AN, et comme le cercle entier eſt compoſé de pareilles paires de triangles, et qu'il en eſt de même pour une portion quelconque ACND du cercle, ayant ſes côtés AC et AD égaux, il eſt manifeſte que L ſera le centre d'oſcillation tant du cercle entier que d'une portion de ce genre.

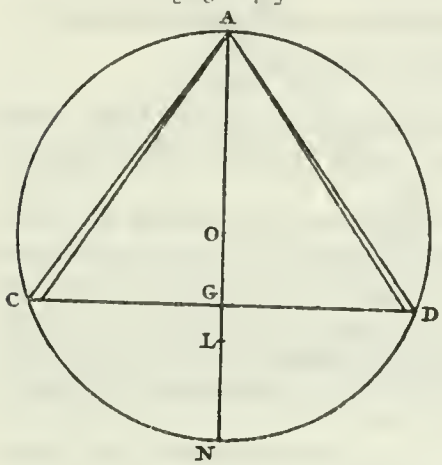
Derechef, ſi dans l'équation trouvée on poſe $\tfrac{8}{3}a = \tfrac{4}{3}b$ ou $2a = b$, c.à.d. ſi l'on ſuppoſe les triangles ſuſpendus en B qui diviſe la longueur AL en deux parties égales [Fig. 108] en aura $y = \sqrt{2a^2 - x^2}$, équation qui fait voir que ſi du centre B avec un rayon dont le carré eſt égal à $2BA^2$ on décrit une circonférence, celle-ci ſera le lieu des baſes des triangles infiniment aigus BC et BD, deſquels, lorſqu'ils ſont ſuſpendus en A, L ſera donc le centre d'oſcillation. Et comme le cercle entier ainſi qu'un quelconque de ſes ſecteurs ayant ſon axe ſur la droite AL eſt compoſé de pareilles paires de triangles, il eſt manifeſte que toutes ces figures, ſuſpendues en A, auront auſſi leur centre d'oſcillation au point L.

---

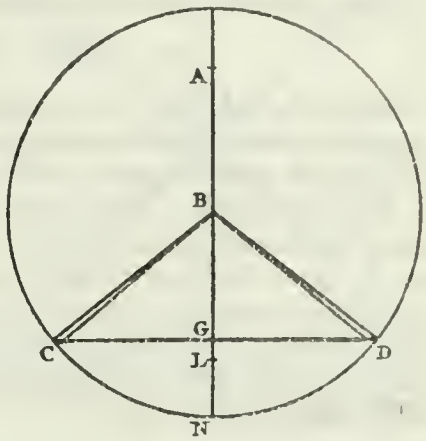
[1]) Comparez sur ce problème et tout ce qui s'y rattache les p. 448, 491—493 et 532—541 du T. XVI.

Sit virga AB ponderis expers, ſuſpenſa ex A [Fig. 106]; oporteatque, ad da|tum in (*p.* 136).
ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe AB recedentia, DE CENTRO
quorum anguli ad B minimi, ſive infinite parvi exiſtimandi, quæque, ita ſuſpenſa ab OSCILLATIONIS
A, oſcillationes iſochronas faciant pendulo ſimplici datæ longitudinis AL [1]).

[Fig. 107.]



[Fig. 108.]



Hic, ducta CG perpendiculari in BG, & ponendo AB ∞ a; AL ∞ b; BG ∞ x; CG ∞ y: invenitur æquatio $y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$. ex qua patet, baſes triangulorum C, & D, quæ baſes hic ut puncta conſiderantur, eſſe ad circuli circumferentiam [Fig. 107]; quia nempe habetur terminus ſimplex $- xx$.

Licet autem hic animadvertere, quod ſi a ſit nihilo æqualis, hoc eſt, ſi punctum, ubi affiguntur trianguli BC, BD, ſit idem cum puncto A; tum futura ſit æquatio $y \infty \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}$. Ac proinde, hoc caſu, ſi ſumatur AO ∞ $\frac{2}{3}b$, hoc eſt, ∞ $\frac{2}{3}$AL, centroque O per A circulus deſcribatur ADN; erunt baſes triangulorum AC, AD, ad illius circumferentiam. Cum igitur quælibet duo triangula acutiſſima, quæ ex A ad circumferentiam ACND conſtituuntur, magnitudine & ſitu ſibi reſpondentia, centrum oſcillationis habeant punctum L, poſitâ AL ∞ $\frac{3}{4}$ diametri AN; cumque circulus totus ex cujusmodi triangulorum paribus componatur; uti & portio ejus quælibet, ut ACND, latera AC, AD æqualia habens; manifeſtum eſt, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oſcillationis eſſe in L.

Rurſus, ſi in æquatione inventa ponatur $\frac{8}{3}a \infty \frac{4}{3}b$, ſeu $2a \infty b$; hoc eſt, ſi triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem AL ſecet bifariam [Fig. 108], erit $y \infty \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod ſi centro B, radio qui poſſit duplum BA, circumferentia deſcribatur, ea erit locus baſium triangulorum acutiſſimorum BC, BD, | quorum nempe, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L punctum. (*p.* 137).
Cumque & circulus totus, & ſector ejus quilibet, axem habens in recta AL, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifeſtum eſt & horum, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis eſſe punctum L.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Conſéquemment un ſecteur de cercle quelconque, ſuſpendu en un point diſtant du centre de ſon cercle d'une longueur égale à la moitié du côté du carré inſcrit à ce cercle, aura un pendule iſochrone égal en longueur à ce côté entier. Et ainſi, dans ce ſeul cas, en trouve un pendule iſochrone avec le ſecteur indépendamment de la dimenſion de ſon arc.

Enfin, lorſqu'il s'agit de la conſtruction univerſelle de la première équation

$$y = \sqrt{2ab - 2a^2 - \tfrac{8}{3}ax + \tfrac{4}{3}bx - x^2},$$

il faut diviſer AL [Fig. 109] en deux parties égales en E, et ajouter à BE ſa tierce partie EF; alors F ſera le centre du cercle que l'on doit décrire en prenant un rayon FO, dont le carré eſt égal à $2(AE^2 - EF^2)$.

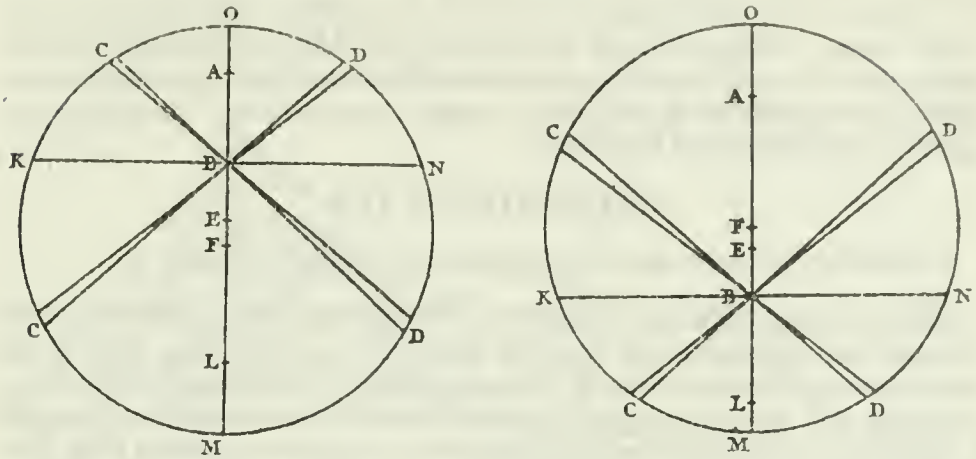
Si l'on prend alors une paire de triangles infiniment aigus, tels que BC et BD, ayant leur ſommet commun en B, leur centre d'oſcillation, lorſqu'ils ſont ſuſpendus en A, ſera L. Et il eſt manifeſte que L ſera également centre d'oſcillation d'une portion quelconque du cercle décrit ayant ſon ſommet en B et ſon axe ſur la droite AL, telle que l'enſemble des deux figures CBD, la ſuſpenſion étant toujours en A. Ceci s'applique auſſi aux ſegments de cercle KON et KMN limités par la droite KBN perpendiculaire à AB.

Qu'il ſuffiſe d'avoir remarqué ces choſes du mouvement latéral des plans et des lignes. Nous y ajoutons ſeulement encore ceci que lorſqu'on a trouvé les centres d'oſcillation des figures droites, c.à.d. ſymétriques par rapport à l'axe, comme du triangle iſoſcèle ou du ſegment droit de parabole, on connaît également ceux des figures obliques provenant des figures droites pour ainſi dire par luxation, comme il en eſt du triangle ſcalène et du ſegment oblique de la parabole. Comme par exemple, lorſqu'on ſuppoſe le triangle iſoſcèle BAC à axe AD ſuſpendu au point E [Fig. 110], et qu'on conſidère en outre le triangle ſcalène FAG ayant le même axe AD et une baſe FG égale à la baſe BC, je dis que ce triangle-là, ſuſpendu en E, eſt iſochrone avec le premier BAC.

En effet, comme une verge ou ligne peſante FG, attachée en D à une verge im-

[Fig. 109.]

De centro oscillationis



Adeoque quilibet circuli ſector, ſuſpenſus à puncto quod diſtet, à centro circuli ſui, ſemiſſe lateris quadrati circulo inſcripti, pendulum iſochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno caſu, abſque poſita dimenſione arcus, pendulum ſectori iſochronum invenitur.

Porro, ad univerſalem conſtructionem æquationis primæ,

$$y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \tfrac{8}{3}ax + \tfrac{4}{3}bx - xx},$$

dividatur AL [Fig. 109] bifariam in E, & adponatur ad BE pars ſui tertia EF; eritque F centrum deſcribendi circuli; radius autem FO æqualis ſumendus ei, quæ poteſt duplum differentiæ quadratorum AE, EF.

Si itaque, ex puncto B, ad deſcriptam circumferentiam triangula duo paria acutiſſima conſtituantur, ut BC, BD; illorum, ex A | ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L. Quare & portionis cujuſlibet deſcripti circuli, cujus portionis vertex ſit in B, (*p.* 138). axis vero in recta AL, quales ſunt utraque CBD; poſita ſuſpenſione ex A; centrum oſcillationis idem punctum L eſſe conſtat. Atque adeo etiam circuli ſegmentorum KON, KMN, quæ facit recta KBN perpendicularis ad AB.

Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertiſſe ſufficiat. Quibus hoc tantum addimus; inventis centris oſcillationis figuram rectarum, ſeu quæ æqualiter ad axem utrinque conſtitutæ ſunt; ut trianguli iſoſcelis, vel parabolicæ ſectionis rectæ; etiam obliquarum, quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli ſcaleni, & parabolæ non rectæ, centra oſcillationis haberi. Ut ſi, exempli gratia, triangulum BAC iſoſceles [Fig. 110], cujus axis AD, à puncto E ſuſpenſum intelligatur; ſit vero & aliud triangulum ſcalenum FAG, axem eundem habens AD, & baſin FG æqualem baſi BC; etiam hoc triangulum, ex E ſuſpenſum, priori BAC iſochronum eſſe dico.

Quia enim virga, ſeu linea gravis, FG, affixa virgæ ſine pondere ED in D, ſitu

Du centre d'oscillation. * Prop. 16 de cette Partie.

pondérable ED et ſuſpendue obliquement au point E, eſt iſochrone avec la verge BC attachée de la même manière en D*, et que la même choſe eſt vraie pour les autres verges de chaque triangle qui coupent l'axe AD aux mêmes points et ſont égales entre elles, il eſt néceſſaire que les triangles entiers, leſquels peuvent être conſidérés comme compoſés de ces lignes ou verges, ſoient iſochrones [1]). Pour les autres figures la démonſtration eſt ſemblable.

PROPOSITION XXII.

Comment on trouve les centres d'oſcillation dans les figures ſolides.

Daus les corps ſolides auſſi on trouvera facilement le centre d'oſcillation à l'aide des théorèmes démontrés plus haut. En effet, ſi un corps ABC [Fig. 111] eſt ſuspendu à l'axe paſſant par le point E perpendiculairement à cette page et que le centre de gravité eſt F, qu'on mène par F les plans EFD, GFH dont le dernier eſt parallèle à l'horizon et dont l'autre paſſe par l'axe E et qu'on cherche d'après la Prop. XIV les ſommes des carrés des diſtances des particules du corps ABC au plan GFH, et de même au plan EFD, c.à.d. deux rectangles qui, multipliés par le nombre des dites particules, ſont égaux aux dites ſommes. Ces rectangles diviſés par la diſtance EF entre l'axe de ſuſpenſion et le centre de gravité donneront l'intervalle FK duquel le centre d'agitation K eſt inférieur au centre de gravité F. Ceci eſt clair d'après la Prop. XVIII. Nous en donnerons auſſi quelques exemples.

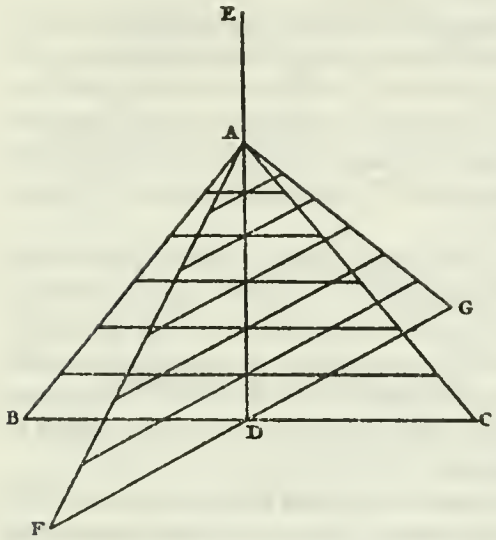
Le centre d'oſcillation de la pyramide.

Soit d'abord [Fig. 112] une pyramide ABC à ſommet A et axe AD, dont la baſe ſoit un carré de côté BC. Et ſuppoſons que ce corps oſcille autour d'un axe paſſant par le ſommet A perpendiculairement au plan de cette page.

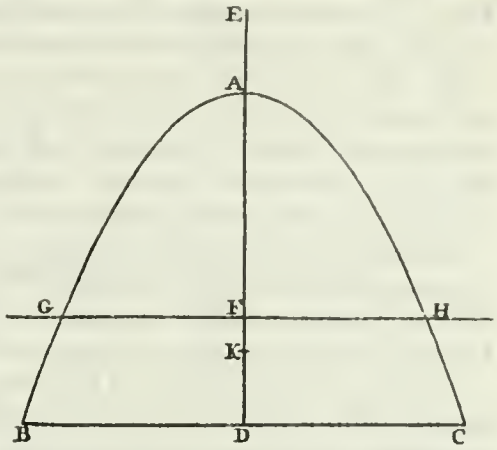
---

[1]) Ce raisonnement est fort plausible; toutefois ce n'est pas une véritable démonstration. On peut prouver rigoureusement que, puisque d'après la Prop. XVI citée la ligne basale du triangle AFG oscille avec la même période que celle du triangle ABC, les deux triangles eux-mêmes seront isochrones: d'après la „méthode des trois quarts" (T. XVI, p. 362—367) le pendule isochrone avec l'un et l'autre sera égal au produit de $\frac{3}{4}$ par la longueur du pendule isochrone avec l'une ou l'autre ligne basale. Toutefois cette démonstration ne s'applique pas au cas du segment droit de parabole. Voir aussi sur ce sujet la p. 50 de l'Avertissement.

[Fig. 110.]



[Fig. 111.]



obliquo, ſuſpenſaque ex E, iſochrona eſt virgæ BC, ſimiliter in D affixæ *; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriusque, quæ axem AD ſecant in iisdem punctis, atque inter ſe æquales ſunt: neceſſe eſt tota triangula, quæ ex lineis, ſeu virgis iisdem compoſita intelligi poſſunt, iſochrona eſſe [1]). In aliis figuris ſimilis eſt demonſtratio.

* Prop. 16. huj.

PROPOSITIO XXII.

(*p.* 139).

Quomodo, in ſolidis figuris, oſcillationis centra inveniantur.

In ſolidis porro figuris facile quoque, per ante demonſtrata, centrum oſcillationis invenire licebit. Si enim ſit ſolidum ABC [Fig. 111], ſuſpenſum ab axe, qui, per punctum E, intelligitur hujus paginæ plano ad rectos angulos; centrum autem gravitatis ſit F: ductis jam per F planis EFD, GFH, quorum poſterius ſit horizonti parallelum, alterum vero per axem E tranſeat; inventisque, per propoſitionem 14, ſummis quadratorum à diſtantiis particularum ſolidi ABC à plano GFH, itemque à plano EFD; hoc eſt, inventis rectangulis utrisque, quæ, multiplicia ſecundum numerum dictarum particularum, æqualia ſint dictis quadratorum ſummis; rectangula hæc applicata ad diſtantiam EF, qua nempe axis ſuſpenſionis diſtat à centro gravitatis, dabunt intervallum FK, quo centrum agitationis K inferius eſt centro gravitatis F. Hoc enim patet ex propoſitione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot.

Centrum oſcillationis in Pyramide.

Sit primum ABC [Fig. 112] pyramis, verticem habens A, axem AD, baſin vero quadratum, cujus latus BC. ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A, ſit hujus paginæ plano ad angulos rectos.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Ici la figure plane proportionnelle OVV qu'il faut placer à côté du corps d'après la Prop. XIV consistera en des résidus paraboliques OPV, c.à.d. en ce qui reste des rectangles ΩP lorsqu'on en ôte les demiparaboles OVΩ ayant leur sommet commun en O.

En effet, comme sont entre elles les sections BC, NN de la pyramide, ainsi sont aussi entre elles les droites VV, RR qui leur correspondent dans la figure plane; et attendu que le centre de gravité E est situé du sommet de la pyramide à la distance de $\frac{3}{4}$ AD, le centre de gravité F de la figure OVV sera donc également distant du sommet O de trois quarts du diamètre OP.

Considérons ensuite le plan horizontal NE passant par le centre de gravité de la pyramide ABC et coupant la figure OVV suivant RF, et cherchons la subcentrique OG de l'onglet coupé sur la figure OVV par un plan passant par OΩ (on trouve OG = $\frac{4}{5}$ du diamètre OP); le rectangle OFG, multiplié par le nombre des particules de la figure OVV, sera égal aux carrés des distances à la droite RF* et par conséquent aussi aux carrés des distances au plan NE, des particules du corps ABC. Or, le rectangle OFG devient égal à $\frac{3}{80}$ fois le carré OP ou AD.

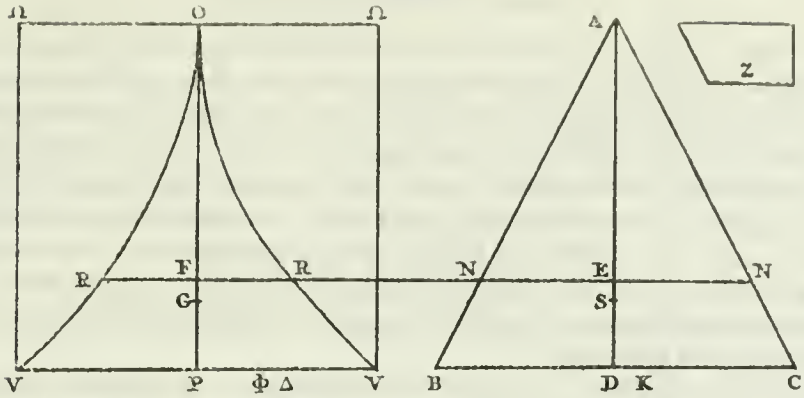
* Prop. 10 de cette Partie.

Ensuite, pour trouver la somme des distances au plan AD, il faut connaître d'abord la subcentrique de l'onglet coupé sur la base carrée de la pyramide BC par un plan passant par la droite en B parallèle à l'axe A. Soit BK cette subcentrique laquelle est égale à $\frac{2}{3}$BC. Il faut connaître de même la distance à OP du centre de gravité de la demi-figure OPV; soit cette distance ΦP laquelle est égale à $\frac{3}{10}$PV. Après cela, si l'on divise PV en deux parties égales en Δ et que, comme ΔP est à PΦ, c.à.d. comme 5 est à 3, on prend le rectangle BDK, qui vaut $\frac{1}{12}BC^2$, à un autre espace Z, ce dernier, multiplié par le nombre des particules du corps ABC, sera égal aux carrés des distances au plan AD *. Or, il apparaît que l'espace Z devient égal à $\frac{1}{20}BC^2$.

* Prop. 15 de cette Partie.

Il s'ensuit que l'espace entier qu'il faut diviser par une droite est égal ici à $\frac{3}{80}AD^2 + \frac{1}{20}BC^2$. Par conséquent, si la suspension est en A, sommet de la pyramide, comme nous l'avons supposé, et que la droite dont nous parlions est donc AE ou $\frac{3}{4}$AD, il en résultera que ES, intervalle dont le centre d'agitation est situé au-dessous du centre de gravité, est égal à $\frac{1}{20}$AD augmenté de $\frac{1}{15}$ de la troisième proportionnelle à AD et BC. En d'autres termes la longueur AS entière sera égale à $\frac{4}{5}$AD plus la dite quinzième partie de la troisième proportionnelle.

[Fig. 112.]



Hic figura plana proportionalis OVV, à latere adponenda, ſecundum propoſitionem 14, conſtabit ex reſiduis parabolicis OPV, quæ nempe ſuperſunt, cum, à rectangulis ΩP, auferuntur ſemiparabolæ OVΩ, verticem habentes O.

Sicut enim inter ſe ſectiones pyramidis BC, NN, ita quoque rectæ VV, RR, ipſis (*p.* 140). in figura plana reſpondentes. & ſicut centrum gravitatis E diſtat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis AD, ita quoque centrum gravitatis F, figuræ OVV, diſtabit tribus quartis diametri OP à vertice O.

Intellecto porro horizontali plano NE, per centrum gravitatis pyramidis ABC, quod idem figuram OVV ſecet ſecundum RF; inventâque ſubcentricâ cunei, ſuper figura OVV abſciſſi plano per OΩ, quæ ſubcentrica ſit OG (eſt autem $\frac{4}{5}$ diametri OP) erit rectangulum OFG, multiplex per numerum particularum figuræ OVV, æquale quadratis diſtantiarum ab recta RF *, ac proinde quoque quadratis diſtantiarum à plano * Prop. 10. huj. NE, particularum ſolidi ABC. Fit autem rectangulum OFG æquale $\frac{3}{80}$ quadrati OP, vel quadrati AD.

Deinde, ad inveniendam ſummam quadratorum à diſtantiis à plano AD, noſcenda primo ſubcentrica cunei, ſuper quadratâ baſi pyramidis BC abſciſſi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela; quæ ſubcentrica ſit BK; eſtque $\frac{2}{3}$BC. Noſcenda item diſtantia centr. gr. dimidiæ figuræ OPV ab OP; quæ ſit ΦP; eſtque $\frac{3}{10}$PV. Inde, diviſâ bifariam PV in Δ, ſi fiat ut ΔP ad PΦ, hoc eſt, ut 5 ad 3, ita rectangulum BDK, quod eſt $\frac{1}{12}$ quadrati BC, ad aliud ſpatium Z; erit hoc, multiplex ſecundum numerum particularum ſolidi ABC, æquale quadratis diſtantiarum à plano AD *. Apparet autem * Prop. 15. huj. fieri ſpatium Z æquale $\frac{1}{20}$ quadrati BC.

Itaque, totum ſpatium applicandum, æquatur hic $\frac{3}{80}$ quadrati AD, cum $\frac{1}{20}$ quadrati BC. Unde, ſi ſuſpenſio, ut hic, poſita fuerit in A, vertice pyramidis, ideoque diſtantia, ad quam applicatio facienda, | AE æqualis $\frac{1}{4}$ AD; fiet hinc ES, intervallum (*p.* 141). quo centrum agitationis inferius eſt centro gravitatis, æquale $\frac{1}{20}$AD, atque inſuper $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis duabus AD, BC. ſive tota AS æqualis $\frac{4}{5}$ AD, præter dictam $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis.

Du centre d'oscillation.

Le centre d'oſcillation du cône.

Que ſi ABC [Fig. 112] eſt un cône, toutes choſes ſeront les mêmes à cela près qu'ici l'eſpace Z devient égal au rectangle $\Delta P\Phi$ *, c.à.d. à $\frac{3}{20}PV^2$ ou $\frac{3}{20}BD^2$, ou $\frac{3}{80}BC^2$. C'eſt pourquoi l'eſpace entier qu'il faut diviſer par une droite ſera dans le cas du cône $\frac{3}{80}AD^2 + \frac{3}{80}BC^2$. Par conſéquent, le ſommet A étant par hypothèſe le point de ſuſpenſion, la longueur ES de laquelle le centre d'agitation eſt inférieur au centre de gravité, deviendra égale à $\frac{1}{20}AD$ plus $\frac{1}{20}$ de la troiſième proportionnelle aux deux grandeurs AD et BC. En d'autres termes, la longueur AS entière deviendra égale à $\frac{4}{5}AD$ plus $\frac{1}{5}$ de la troiſième proportionnelle aux deux grandeurs AD et DB [1]). Par là il eſt manifeſte que ſi AD et DB ſont égales, c.à.d. ſi le cône ABC eſt rectangle, AS devient égale à l'axe AD.

* Prop. 15 de cette Partie.

Il réſulte auſſi de la Prop. XX que ce cône rectangle, ſi on le ſuſpend au point D, centre de ſa baſe, ſera iſochrone avec lui-même ſuſpendu au ſommet A, propriété analogue à celle du triangle rectangle, dont nous avons donné la démonſtration ci-deſſus.

Le centre d'oſcillation de la ſphère.

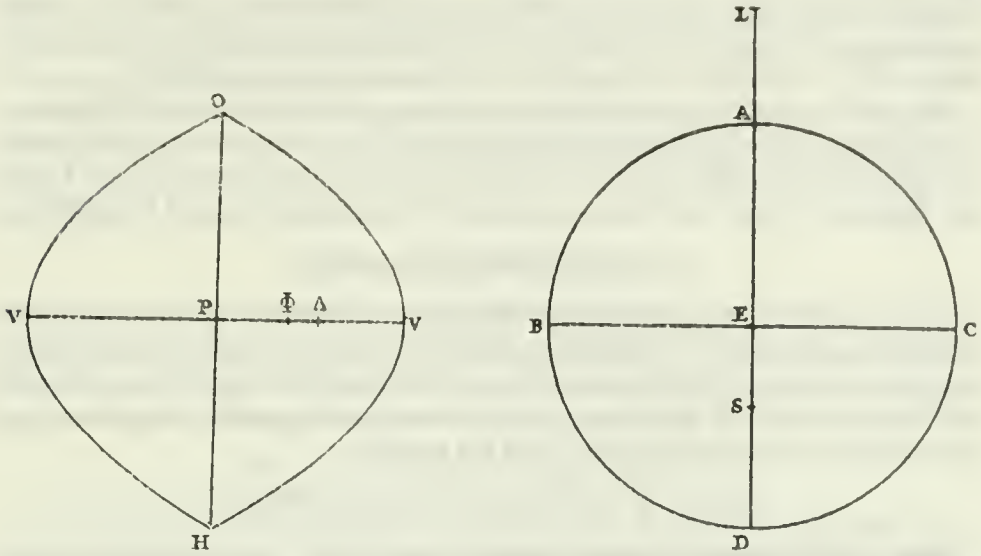
Si ABC [Fig. 113] eſt une ſphère, la figure plane proportionnelle OVH qu'il faut placer à côté d'elle ſera compoſée de paraboles dont la baſe commune OH eſt égale au diamètre AD de la ſphère. La ſphère étant coupée par des plans paſſant par le centre E, dont BC eſt un plan horizontal et AD un plan vertical, il faut connaître, pour qu'on puiſſe trouver la ſomme des carrés des diſtances au plan AD, la diſtance à OH du centre de gravité de la parabole OVH, laquelle ſoit ΦP. Sa longueur eſt de $\frac{2}{5}VP$. Enſuite, PV étant diviſée en deux parties égales en Δ, on fait que le rectangle $\Delta P\Phi$, multiplié par le nombre des particules de la ſphère ABC, devient égal aux carrés des diſtances du plan AD *. Or, le rectangle $\Delta P\Phi$ eſt égal à $\frac{1}{5}PV^2$ ou $\frac{1}{5}BE^2$.

* Prop. 15 de cette Partie.

[1]) Comparez sur ce résultat la p. 368 du T. XVI.

[Fig. 113.]

De centro oscillationis



Centrum oſcillationis Coni.

Quod ſi ABC [Fig. 112] conus fuerit, omnia eodem modo ſe habebunt, niſi quod ſpatium Z hic ſit æquale rectangulo ΔPΦ *, hoc eſt $\frac{3}{20}$ quadrati PV vel BD, ſive $\frac{3}{80}$ quadrati BC. * Prop. 15. huj. Quare, totum ſpatium applicandum, in cono erit $\frac{3}{80}$ quadrati AD, una cum $\frac{3}{80}$ quadrati BC. Ac proinde, poſita ſuſpenſione ex vertice A, fiet ES, qua centrum agitationis inferius eſt centro gravitatis, æqualis $\frac{1}{20}$AD, & $\frac{1}{20}$ tertiæ proportionalis duabus AD, BC. ſive tota AS æqualis $\frac{4}{5}$AD, una cum $\frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis duabus AD, DB [1]). Atque hinc manifeſtum eſt, ſi AD, DB æquales ſint, hoc eſt, ſi conus ABC ſit rectangulus, fieri AS æqualem axi AD.

Sequitur quoque porro, ex propoſitione 20, conum hunc rectangulum, ſi ex D centro baſeos ſuſpendatur, iſochronum fore ſibi ipſi ex vertice A ſuſpenſo, quemadmodum & de triangulo rectangulo ſupra oſtenſum fuit.

Centrum oſcillationis Sphæræ.

Sit ABC [Fig. 113] ſit ſphæra, erit figura plana proportionalis, à latere adponenda, OVH, ex parabolis compoſita, quarum baſis communis OH, æqualis ſphæræ diametro AD. Sectâ vero ſphærâ planis per centrum E, quorum BC ſit horizonti parallelum, AD vero verticale: ut inveniatur ſumma quadratorum à diſtantiis à plano AD, noſcenda eſt diſtantia centri gr. parabolæ OVH ab OH, quæ ſit ΦP, eſtque $\frac{2}{5}$VP. Deinde, diviſâ PV biſariam in Δ, conſtat rectangulum ΔPΦ, multiplex per numerum particularum ſphæræ ABC, æquari quadratis diſtantiarum à plano AD *. Eſt autem rectangulum ΔPΦ æquale $\frac{1}{5}$ quadrati PV, vel quadrati BE. * Prop. 15. huj.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Or, il apparaît que les carrés des diſtances au plan BC ſont égaux aux carrés des distances au plan AD, partant au même rectangle ΔPΦ multiplié par le dit nombre de particules. L'eſpace qu'il faut diviſer par une droite ſera donc, dans le cas de la ſphère ABC, le double du rectangle ΔPΦ et par conſéquent égal à $\frac{2}{5}EB^2$.

Par conſéquent, ſi la ſphère eſt ſuſpendue en un point A de ſa ſurface, ES, diſtance de ſon centre E au centre d'agitation S, ſera égale à $\frac{2}{5}$ fois le rayon AE, et AS entière ſera égale à $\frac{7}{10}$ AD. Mais ſi la ſphère eſt ſuſpendue à un autre point tel que L, ES ſera égale aux $\frac{2}{5}$ d'une troiſième proportionnelle aux deux grandeurs LE et EB [1]).

Le centre d'oſcillation du cylindre.

Nous avons trouvé que dans le cylindre l'eſpace qu'il faut diviſer par une droite eſt égale à $\frac{1}{12}$ du carré de la hauteur augmenté d'un quart de la baſe. Il en réſulte que lorſque le cylindre eſt ſuſpendu au centre de ſa baſe ſupérieure, la longueur du pendule iſochrone devient égale aux $\frac{2}{3}$ de ſon hauteur plus la moitié de la grandeur qui eſt au rayon de la baſe comme celui-ci eſt à la hauteur.

Le centre d'oſcillation du conoïde parabolique.

Dans le conoïde parabolique le rectangle d'oſcillation eſt $\frac{1}{18}$ du carré de la hauteur augmenté de $\frac{1}{6}$ du carré du rayon de la baſe. Par conſéquent, ſi le conoïde eſt ſuſpendu à ſon ſommet, la longueur du pendule iſochrone devient égal aux $\frac{3}{4}$ de l'axe, plus un quart d'une ligne qui eſt au rayon de la baſe comme celui-ci eſt à l'axe, c.à.d. plus $\frac{1}{4}$ du latus rectum de la parabole engendrante [2]).

Le centre d'oſcillation du conoïde hyperbolique.

On peut auſſi trouver le centre d'oſcillation dans le conoïde hyperbolique. Si nous conſidérons par exemple le conoïde [Fig. 114] dont la ſection par l'axe eſt l'hyperbole BAB et qui a l'axe AD et le latus transverſum AF, la figure plane qui lui eſt proportionnelle ſera BKAKB, compriſe entre la baſe BB et les arcs paraboliques ſymétriques AKB paſſant l'un et l'autre par le ſommet A et ayant pour axe commun la ligne GE parallèle à la baſe BB et diviſant en deux parties égales le latus transverſum AF. Le centre de gravité L de cette figure BKAKB eſt donc à la même diſtance du ſommet A que celui du conoïde ABB, et l'axe AD eſt à AL dans le rapport 3 FA + 2 AD : 2 FA + $\frac{3}{2}$ AD. Enſuite on peut auſſi trouver la diſtance à AD du centre de gravité de la demi-figure ADBK ainſi que la ſubcentrique par rapport à AP de l'onglet coupé ſur la figure BKAKB par un plan paſſant per AP parallèle à BB; et de ces données on peut conclure à la ſituation du centre d'agitation du conoïde pour une ſuſpenſion quelconque, pourvu que l'axe autour duquel le conoïde oſcille ſoit paral-

[1]) Voir sur d'autres méthodes pour calculer la place du centre d'oscillation de la sphère les p. 470—472 et 473—475 du T. XVI.

Atqui, quadrata diſtantiarum à plano BC, æqualia eſſe liquet quadratis diſtantiarum à plano AD, ac proinde eidem rectangulo ΔPΦ, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo ſpatium applicandum, in ſphæra ABC, erit duplum rectanguli ΔPΦ; ideoque æquale $\frac{2}{5}$ quadrati à radio EB. De centro oscillationis

Itaque, ſi ſphæra ſuſpenſa ſit ex puncto in ſuperficie ſua A, erit | ES, à centro ſphæræ E ad centrum agitationis S, æqualis $\frac{2}{5}$ ſemidiametri AE. Totaque AS æqualis $\frac{7}{10}$ diametri AD. Si vero ex puncto alio, ut L, ſphæra ſuſpenſa ſit; erit ES æqualis $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis duabus LE, EB [1]). (p. 142).

Centrum oſcillationis Cylindri.

In cylindro, invenimus ſpatium applicandum æquari $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis, una cum $\frac{1}{4}$ quadrati à ſemidiametro baſis. Unde, ſi cylindrus à centro baſis ſuperioris ſuſpendatur, fit longitudo penduli iſochroni æqualis $\frac{2}{3}$ altitudinis, una cum ſemiſſe ejus, quæ ſit ad ſemidiametrum baſis ut hæc ad altitudinem.

Centrum oſcillationis Conoidis Parabolici.

In conoide parabolico, rectangulum oſcillationis eſt $\frac{1}{18}$ quadrati altitudinis, cum $\frac{1}{6}$ quadrati à ſemidiametro baſis. Unde, ſi à puncto verticis fuerit ſuſpenſum, fit longitudo penduli iſochroni $\frac{3}{4}$ axis, cum $\frac{1}{4}$ ejus quæ ſit ad ſemidiametrum baſis, ſicut hæc ad axem, id eſt, una cum $\frac{1}{4}$ lateris recti parabolæ genitricis [2]).

Centrum oſcillationis Conoidis Hyperbolici.

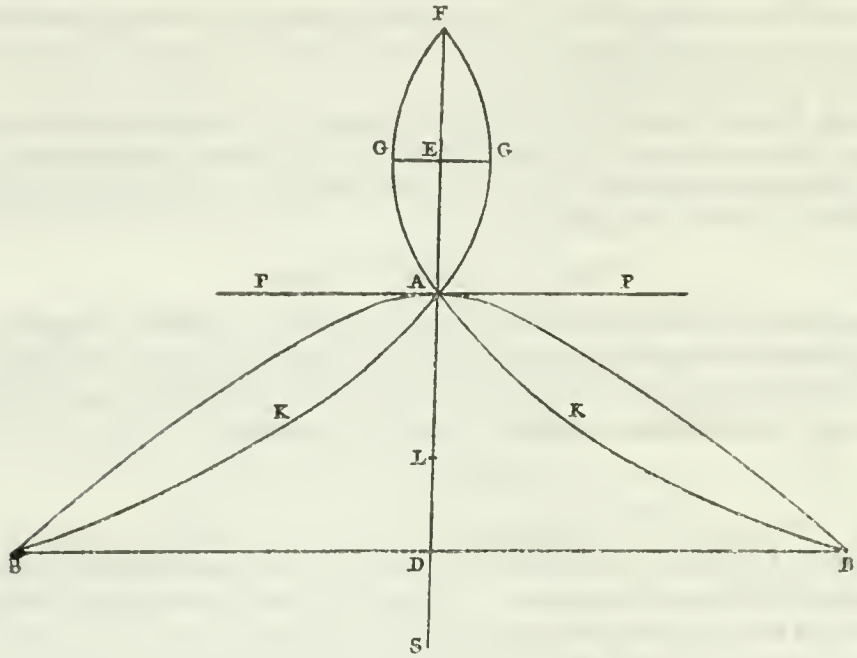
In conoide quoque hyperbolico centrum oſcillationis inveniri poteſt. Si enim, exempli gratia, ſit conoides [Fig. 114] cujus ſectio per axem, hyperbola BAB; axem habens AD, latus tranſverſum AF: erit figura plana ipſi proportionalis BKAKB, contenta baſi BB, | & parabolicæ lineæ portionibus ſimilibus AKB, quæ parabolæ per verticem A tranſeunt, axemque habent GE, dividentem bifariam latus tranſverſum AF, ac parallelum baſi BB. Et hujus quidem figuræ BKAKB, centrum gravitatis L, tantum diſtat à vertice A, quantum centrum gravitatis conoidis ABB; eſtque axis AD ad AL, ſicut tripla FA cum dupla AD, ad duplam FA cum ſeſquialtera AD. Deinde & diſtantia centri gr. figuræ dimidiæ ADBK, ab AD, inveniri poteſt, atque etiam ſubcentrica cunei ſuper figura BKAKB, abſciſſi plano per AP, parallelam BB; hujus inquam cunei ſubcentrica, ſuper ipſa AP, inveniri quoque poteſt; atque ex his conſequenter centrum agitationis conoidis, in quavis ſuſpenſione; dummodo axis, circa (p. 143).

---

[2]) Comparez les p. 483—486 du T. XVI.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

[Fig. 114.]



lèle à ſa baſe. Je trouve que ſi l'on prend l'axe AD égal au latus transverſum AF, l'eſpace qu'il faut diviſer par une droite devient égal à $\frac{1}{20}$ AD² + $\frac{31}{200}$ DB²; et on a alors AL = $\frac{7}{10}$ AD.

Par conſéquent, lorſque le conoïde conſidéré eſt ſuſpendu au ſommet A, la longueur AS du pendule iſochrone eſt trouvée égale à $\frac{27}{35}$ AD, plus $\frac{31}{140}$ de la troiſième proportionnelle aux deux grandeurs AD et DB [1]).

Le centre d'oſcillation du demi-cône.

On pourra enfin trouver le centre d'oſcillation auſſi dans certaines moitiés de ſolides diviſés par une ſection par l'axe. Par exemple dans le cas du demi-cône ABC [Fig. 115] ayant ſon ſommet en A et BC pour rayon de la baſe. Le centre de gravité de ce corps eſt connu puiſque AD = $\frac{3}{4}$ AE, où AE diviſe BC en E de telle manière que le rapport $\frac{2}{3}$ CB : BE eſt égal à celui d'un quart de circonférence de cercle à ſon rayon.

En effet, E eſt alors le centre de gravité du demi-cercle qui conſtitue la baſe et ſur AE ſe trouvent donc les centres de gravité de tous les ſegments parallèles à la baſe du demi-cône ABD.

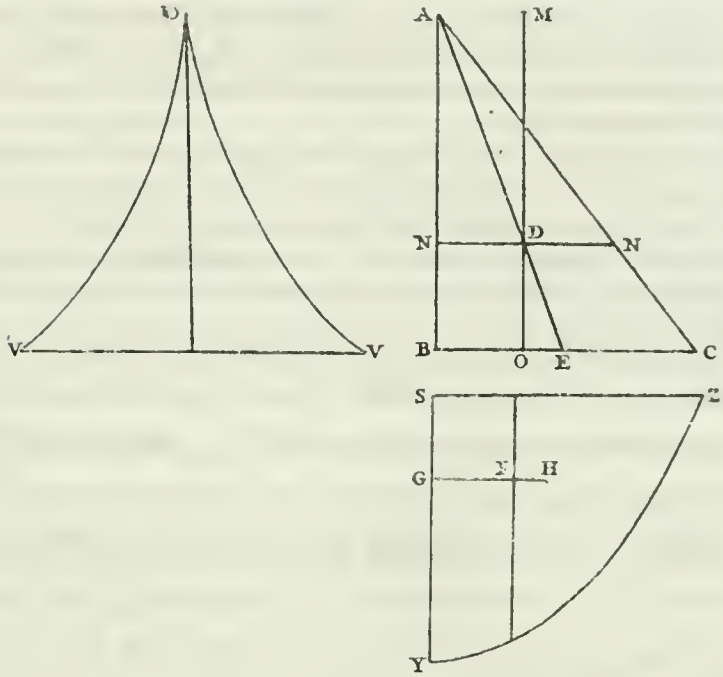
Or, la figure proportionnelle OVV qu'il faut placer à côté de la figure eſt la même que celle décrite dans le cas du cône entier: cette figure ſert, comme l'on ſait, à trouver la ſomme des carrés des diſtances des particules du demi-cône au plan horizontal

quem movetur, ſit baſi conoidis parallelus. Atque invenio quidem, ſi axis AD lateri transverſo AF æqualis ponatur, ſpatium applicandum æquari $\frac{1}{20}$ quadrati AB, cum $\frac{31}{200}$ quadrati DB. Tunc autem AL eſt $\frac{7}{10}$AD. De centro oscillationis

Unde, ſi conoides hujuſmodi ex vertice A ſuſpendatur, invenitur longitudo penduli iſochroni, AS, æqualis $\frac{27}{35}$AD, cum $\frac{31}{140}$ tertiæ proportionalis duabus AD, DB [1]).

Centrum oſcillationis dimidii Coni.

[Fig. 115.]



Denique & in ſolidis dimidiatis quibuſdam, quæ fiunt ſectione per axem, centrum agitationis invenire licebit. Ut ſi ſit conus dimidiatus ABC [Fig. 115], verticem habens A, diametrum ſemicirculi baſeos BC: ejus quidem centrum gravitatis D notum (*p.* 144). eſt, quoniam AD eſt $\frac{3}{4}$ rectæ AE, ita dividentis BC in E, ut, ſicut quadrans circumferentiæ circuli ad radium, ita ſint $\frac{2}{3}$CB ad BE. Tunc enim E eſt centrum gravitatis ſemicirculi baſeos, ideoque in AE centra gravitatis omnium ſegmentorum ſemiconi ABD, baſi parallelorum.

Et figura quidem porro proportionalis à latere ponenda, OVV, eadem eſt quæ in cono toto ſupra deſcripta fuit: per quam nempe invenietur ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſemiconi à plano horizontali ND, per centrum gravitatis ducto.

---

[1]) Comparez les p. 550—555 du T. XVI.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

ND mené par le centre de gravité. Mais pour apprendre à connaître les carrés des diſtances au plan vertical MDO il faut encore faire uſage d'une autre figure proportionnelle SYZ, telle qu'elle eſt mentionnée dans la Prop. XIV, ſavoir une figure dont les ſections verticales préſentent des lignes proportionnelles aux ſections correſpondantes du demi-cône ABC; et de cette figure il faut connaître la diſtance à SY du centre de gravité F, diſtance apparemment égale à celle, DN, du centre de gravité du demi-cône au plan du triangle AB. Si nous appelons HG la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur la figure SZY par un plan paſſant par SY, il faut connaître le rectangle GFH qui, multiplié par le nombre des particules du demi-cône ABC, ſera égal aux carrés des diſtances du demi-cône au plan MDO. Or, il ſera poſſible d'apprendre à connaître de la manière ſuivante ce rectangle GFH, même lorſqu'on ignore la longueur de la ſubcentrique HG.

Nous avons dit plus haut, en parlant du cône, que les carrés des diſtances à un plan paſſant par ſon axe ſont égaux à $\frac{3}{80}$ fois le carré du diamètre de ſa baſe ou bien à $\frac{3}{20}$ du carré de ſon rayon multiplié par le nombre des particules du cône entier. Il s'enſuit qu'ici auſſi, dans le demi-cône ABC, les carrés des diſtances au plan AB ſeront égaux au produit de $\frac{3}{20}$ BC² par le nombre des particules du demi-cône. Mais le rectangle HGF, multiplié par le nombre des particules du demi-cône ABC, eſt auſſi égal aux carrés des diſtances au plan AB, comme cela réſulte de la Prop. IX. Par conſéquent le rectangle HGF eſt égal à $\frac{3}{20}$ BC². Or, ſi l'on poſe AB $= a$, BC $= b$ et le quart de la circonférence décrite avec le rayon BC $= q$, on aura EB $= \frac{2b^2}{3q}$. Et comme ND eſt égale aux trois quarts de cette dernière longueur, il en réſultera que ND ou GF eſt égale à $\frac{1}{2}\frac{b^2}{q}$. En retranchant le carré de cette expreſſion du rectangle HGF qui était égal à $\frac{3}{20}$ BC², on en conclura que le rectangle GFH eſt égal à $\frac{3}{20}b^2 - \frac{1}{4}\frac{b^4}{q^2}$. Et ce rectangle, multiplié par le nombre des particules du demi-cône ABC, eſt égal aux carrés des diſtances au plan MDO. Mais aux carrés des diſtances au plan ND eſt égal, comme dans le cas du cône, le produit de $\frac{3}{80}$ AB² ou $\frac{3}{80}a^2$ par le nombre des particules du demi-cône ABC. Par conſéquent l'eſpace total qu'il faut diviſer par une droite ſera égal ici à $\frac{3}{80}a^2 + \frac{3}{20}b^2 - \frac{1}{4}\frac{b^4}{q^2}$.

Ce réſultat permet de trouver le centre d'agitation pour toute ſuſpenſion du demi-cône, du moins s'il eſt ſuſpendu à un axe parallèle à la baſe du triangle AB réſultant de la ſection du cône. On peut encore remarquer que, malgré le fait que la figure SZY eſt d'une nature abſolument inconnue, la ſubcentrique GH correſpondant à un onglet coupé ſur elle par un plan paſſant par SY, eſt trouvée par les conſidérations qui précèdent. Car, comme le rectangle HGF s'eſt montré égal à $\frac{3}{20}b^2$ ou $\frac{3}{20}$ BC², et GF $= \frac{1}{2}\frac{b^2}{q}$, il en réſulte que GH $= \frac{3}{10}q$.

Verum quadrata diſtantiarum, à plano verticali MDO, ut colligantur, altera quoque figura proportionalis SYZ, ſicut ſupra prop. 14. adhibenda eſt, cujus nempe ſectiones verticales, exhibeant lineas proportionales ſectionibus ſibi reſpondentibus in ſemicono ABC. & hujus figuræ cognoſcenda eſt diſtantia centri gr. F ab SY, quam æqualem eſſe conſtat diſtantiæ DN, centri gr. ſemiconi à plano trianguli AB. poſitâque HG ſubcentricâ cunei abſciſſi ſuper figura SZY, ducto plano per SY, noſcendum eſt rectangulum GFH, cujus nempe multiplex, ſecundum numerum particularum ſemiconi ABC, æquabitur quadratis diſtantiarum ſemiconi in planum MDO. Licebit vero cognoſcere rectangulum illud GFH, etiamſi ſubcentricæ HG longitudo ignoretur, hoc modo. De centro oscillationis

Diximus ſupra, cum de cono ageremus, quadrata diſtantiarum | à plano per axem (p. 145). ejus, æquari $\frac{3}{80}$ quadrati à diametro baſis, ſive $\frac{3}{20}$ quadrati à ſemidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Unde & hic, in ſemicono ABC, quadrata diſtantiarum à plano AB æqualia erunt $\frac{3}{20}$ quadrati BC, multiplicis per numerum particularum ipſius ſemiconi. Sed & rectangulum HGF, multiplex per numerum particularum ſemiconi ABC, æquatur quadratis diſtantiarum à plano AB, ut patet ex propoſitione 9. Ergo rectangulum HGF æquale $\frac{3}{20}$ quadrati BC. Ponendo autem AB ∞ a; BC ∞ b; & quadrantem circumferentiæ, radio BC deſcriptæ, ∞ q; ſit EB ∞ $\frac{2bb}{3q}$. Cujus cum ND tribus quartis æquetur, fiet proinde ND, ſive GF ∞ $\frac{1bb}{2q}$. Cujus quadratum auferendo à rectangulo HGF, quod erat $\frac{3}{20}$ quadrati BC, fiet rectangulum GFH ∞ $\frac{3}{20}$ BB $-$ $\frac{1b^4}{4qq}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum ſemiconi ABC, æquatur quadratis diſtantiarum à plano MDO. At quadratis diſtantiarum à plano ND æquantur, ut in cono, $\frac{3}{80}$ quadrati AB, ſive $\frac{3}{80}$ aa, multiplices per numerum particularum ſemiconi ABC. Itaque, totum ſpatium applicandum, æquabitur hic $\frac{3}{80}aa + \frac{3}{20}bb - \frac{1b^4}{4qq}$.

Unde quidem centrum agitationis invenitur in omni ſuſpenſione ſemiconi, dummodo ab axe qui ſit parallelus baſi trianguli à ſectione AB. Notandum vero, cum figura SZY ſit ignotæ prorſus naturæ, ſubcentricam tamen GH, cunei ſuper ipſa abſciſſi plano per SY, hinc inveniri. Nam, quia rectangulum HGF æquale erat $\frac{3}{20}bb$, ſive quadrati BC, & GF æqualis $\frac{1bb}{2q}$, fit inde GH æqualis $\frac{3}{10}q$.

Du centre d'oscillation.

On pourra trouver en outre les centres d'agitation du demi-cylindre, du demi-conoïde parabolique [1]), et encore d'autres moitiés de solides, ce dont nous laissons la recherche à d'autres.

Ce que nous avons dit du centre d'agitation dans le cas de figures planes obliques, qui s'obtiennent pour ainsi dire par une luxation des figures droites, s'applique aussi au cas des figures solides: les centres d'oscillation des figures obliques ne diffèrent pas de ceux des figures droites. Par exemple, si ABC et AFG [Fig. 110] sont deux cônes, l'un droit, l'autre scalène, ayant le même diamètre et des bases égales, et si l'un et l'autre sont suspendus au sommet ou à des axes quelconques également distants de leurs centres de gravité, ils seront isochrones, pourvu que l'axe d'oscillation du cône scalène soit perpendiculaire au plan du triangle diamétral qui est normal au plan de la base [2]).

PROPOSITION XXIII.

Régler le mouvement des horloges par l'addition d'un petit poids supplémentaire pouvant être mu vers le haut ou vers le bas sur la verge d'un pendule divisée en certaine manière [3]).

Pour arriver à ce résultat, il faut d'abord trouver le centre d'oscillation du pendule lui-même composé de sa verge pondérable et du poids qui y est suspendu à l'extrémité inférieure.

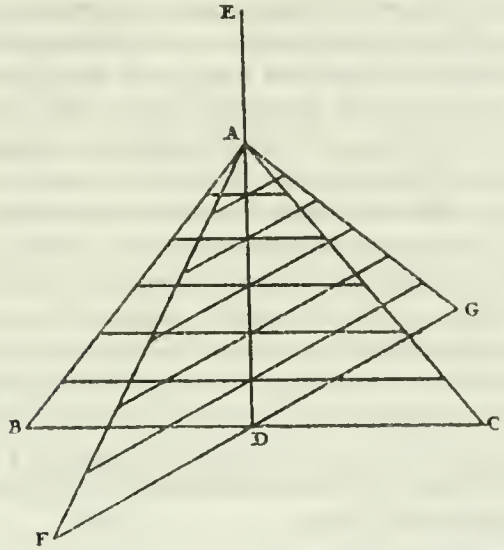
Soit AC ou a la longueur de la verge portant le poids [Fig. 116]. Représentons-nous la verge et le poids C qui y est suspendu divisés en particules égales extrêmement petites; que la verge ait b et le poids C c de ces particules, le rapport $b : c$ étant évidemment celui de la gravité de la verge à celle du poids qui y est attaché. La longueur d'un pendule simple isochrone avec le pendule donné s'obtiendra donc en divisant la somme des carrés des distances de toutes les particules au point de suspension A par

[1]) Voir la partie C de l'Appendice II à la Pars Quarta.

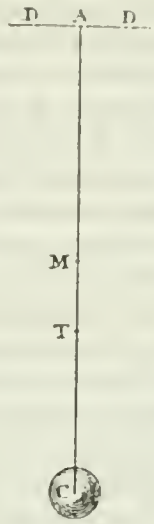
[2]) Comparez la note 1 de la p. 326 qui précède et les p. 367—368 („méthode des quatre cinquièmes") du T. XVI.

[3]) Voir les p. 353—354 et 425—433 du T. XVI, ainsi que les p. 28 (note 2), 105—111 et 150—151 du T. XVII.

[Fig. 110.]



[Fig. 116.]



De centro oscillationis

Porro, etiam ſemicylindri, & ſemiconoidis parabolici [1]), centra agitationis inveniri poſſunt, atque aliorum inſuper ſemiſolidorum; quæ aliis inveſtiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in ſolidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum conſtituuntur, quarum centra oſcillationis non differunt à centris oſcillationis rectarum. Sic, ſi coni duo fuerunt ABC, AFG [Fig. 110], alter rectus, alter ſcalenus; quorum & diametri & baſes æquales; hi ex vertice ſuſpenſi, vel à quibuſcunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis diſtantibus, iſochroni erunt; dummodo axis, unde conus ſcalenus ſuſpenſus eſt, rectus ſit ad planum trianguli per diametrum, quod planum baſi eſt ad angulos rectos [2]).

PROPOSITIO XXIII.

(*p.* 146).

Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo ſecundario, quod ſuper virga penduli, certa ratione diviſa, ſurſum deorſumque moveri poſſit [3]).

Ut hoc expediamus, primo penduli ipſius, ex virga gravitate prædita, & appenſo parte ima pondere, compoſiti, centrum oſcillationis inveniendum eſt.

Sit virga, cum appenſo pondere, AC, cujus longitudo dicatur *a* [Fig. 116]. Intelliganrur autem, tum virga ipſa, tum pondus appenſum C, in particulas minimas æquales diviſa, earumque particularum virga habeat numerum *b*, pondus vero C numerum *c*, ponendo nempe *b* ad *c*, ſicut gravitas virgæ ad gravitatem appenſi ponderis. Longitudo igitur penduli ſimplicis, dato iſochroni, habebitur, ſi ſumma quadratorum à diſtantiis particularum omnium à puncto ſuſpenſionis A, dividatur per ſummam

* Prop. 6 de cette Partie vers la fin.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

la ſomme de ces diſtances*. Soit AC diviſée en deux parties égales au point M et auſſi en T de ſorte que AT = 2 TC. Puiſque M eſt alors le centre de gravité de la ligne AC et AT la ſubcentrique de l'onglet coupé ſur elle par un plan paſſant par AD perpendiculaire à AC, lequel onglet eſt ici en réalité un triangle, la ſomme des carrés des diſtances au point A des particules de la verge ſera égale à celle du rectangle AMT et du carré de AM, c.à.d. au rectangle TAM multiplié par le nombre b des particules, c.à.d. à $\frac{1}{3}a^2b$, parce que MA $= \frac{1}{2}a$ et TA $= \frac{2}{3}a$ et que le rectangle TAM eſt par conſéquent égal à $\frac{1}{3}a^2$. Mais la ſomme des carrés au même point A des diſtances des particules du poids C ſera égale à AC^2 multiplié par le nombre des particules du poids, c.à.d. à a^2c. Par conſéquent la ſomme de tous les carrés, tant ceux des diſtances des particules de la verge que ceux du poids C, ſera $\frac{1}{3}a^2b + a^2c$.

Or, la ſomme des diſtances des particules de la verge AC au point A eſt égale à $\frac{1}{2}ba$, c.à.d. au produit de la longueur a de la verge par la moitié du nombre de ſes particules. Et la ſomme des diſtances de toutes les particules du poids C au même point A eſt ac. De ſorte que la ſomme des deux groupes de diſtances eſt $\frac{1}{2}ab + ac$. En diviſant par cette expreſſion la ſomme des carrés trouvée plus haut, $\frac{1}{3}a^2b + a^2c$, on obtient pour la longueur du pendule iſochrone:

$$\frac{\frac{1}{3}a^2b + a^2c}{\frac{1}{2}ab + ac} \text{ ou } \frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}.$$

Cette longueur peut donc être conſtruite en faiſant que comme la demi-gravité de la verge augmentée de la gravité du poids qui y eſt attaché eſt au tiers de la gravité de la verge augmenté de celle du poids, ainſi la longueur AC ſe rapporte à une autre. Il faut prendre ici la longueur AC depuis le point de ſuſpenſion A juſqu'au centre de gravité du poids C, puiſque nous ne tenons pas compte dans ce calcul de la grandeur du poids: nous le conſidérons comme occupant un eſpace extrêmement petit.

Suppoſons maintenant qu'outre le poids C, un deuxième D ſoit attaché à la verge [Fig. 117] et que la gravité de D ou le nombre de ſes particules ſoit d, tandis que la diſtance AD $= f$. Pour trouver le pendule ſimple iſochrone avec notre pendule ainſi compoſé, il faut ajouter à la ſomme des carrés conſidérée plus haut les carrés des diſtances au point A des particules du poids D, c.à.d. dff. De ſorte que la ſomme de tous les carrés devient maintenant $\frac{1}{3}a^2b + a^2c + f^2d$. Pareillement il faut ajouter à la ſomme des diſtances celles des particules du poids D, ſavoir df. La ſomme de toutes les diſtances ſera donc $\frac{1}{2}ba + ca + df$. C'eſt par cette expreſſion qu'il faut diviſer la ſomme des carrés dont il eſt queſtion plus haut. On obtient ainſi pour la longueur du pendule iſochrone

$$\frac{\frac{1}{3}a^2b + a^2c + f^2d}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}.$$

Que ſi l'on exige que cette longueur du pendule iſochrone ſoit égale à une longueur donnée p, tout le reſte étant donné comme auparavant à l'exception de la diſtance f

earundem diſtantiarum *. Secetur AC biſariam in M; tum vero in T, ut AT ſit dupla TC. Quia ergo M eſt centrum gravitatis lineæ AC, & AT ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi plano per AD, perpendicularem ad AC; qui cuneus hic revera triangulum eſt; erit ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum virgæ à puncto A, | æqualis rectangulo AMT, una cum quadrato AM; hoc eſt, rectangulo TAM, multiplici ſecundum numerum particularum *b*; hoc eſt, $\frac{1}{3}aab$; quia MA eſt $\frac{1}{2}a$, & TA $\frac{2}{3}a$, ac proinde rectangulum TAM ∞ $\frac{1}{3}aa$. Summa vero quadratorum, à diſtantiis particularum ponderis C ab eodem puncto A, æquabitur quadrato AC, multiplici ſecundum numerum particularum ipſius ponderis; hoc eſt, *aac*. Adeoque ſumma quadratorum omnium, tam à diſtantiis particularum virgæ, quam ponderis C, erit $\frac{1}{3}aab + aac$.

* Prop. 6. huj. in fine.

De centro oscillationis (p. 147).

Porro, diſtantiæ omnes particularum virgæ AC à puncto A, æquantur $\frac{1}{2}ba$; longitudini ſcilicet virgæ ipſius, quæ eſt *a*, multiplici ſecundum ſemiſſem numeri particularum quas continet. Et diſtantiæ omnes particularum ponderis C, ab eodem puncto A, ſunt *ac*. Ita ut ſumma utrarumque diſtantiarum ſit $\frac{1}{2}ab + ac$. Per quam dividendo ſummam quadratorum prius inventam, $\frac{1}{3}aab + aac$, fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac}{\frac{1}{2}ab + ac}$ ſive $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, longitudo penduli iſochroni. Quæ itaque habebitur, ſi ſiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appenſi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejuſdem appenſi ponderis, ita longitudo AC ad aliam. Oportet autem ſumere longitudinem AC, à puncto ſuſpenſionis A ad centrum gravitatis ponderis C; cum magnitudinis ejus ratio hic non habeatur, ac veluti minimum conſideretur.

[Fig. 117.]

Quod ſi jam, præter pondus C, alterum inſuper D virgæ inhærere intelligatur [Fig. 117], cujus gravitas, ſeu particularum numerus ſit *d*: diſtantia vero AD ſit *f*. Ut pendulum ſimplex huic ita compoſito iſochronum inveniatur, addenda ſunt ad ſummam ſuperiorem quadratorum, quadrata diſtantiarum particularum ponderis D à puncto A, quæ quadrata apparet eſſe *dff*. Adeo ut ſumma omnium jam ſit futura $\frac{1}{3}aab + aac + ffd$. Item, ad ſummam diſtantiarum, addendæ diſtantiæ particularum ponderis D, quæ faciunt *df*. Ac ſumma proinde diſtantiarum omnium erit $\frac{1}{2}ba + ca + df$; per quam dividenda eſt iſta quadratorum ſumma, & fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$, longitudo penduli iſochroni.

Quod ſi vero, hæc longitudo penduli iſochroni, datæ æqualis poſtuletur, quæ ſit *p*, & reliqua omnia quæ prius data ſint, præter | diſtantiam AD ſeu *f*, quæ determinat (p. 148).

DU CENTRE D'OSCILLATION.

qui détermine la place du poids D, et qu'il faille trouver cette diſtance, le calcul ſera le ſuivant: on demande que

$$\frac{\frac{1}{3}a^2b + a^2c + f^2d}{\frac{1}{2}ab + ac + fd} = p;$$

de cette équation réſulteront les ſuivantes:

$$f^2 = pf + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}a^2b - a^2c}{d}$$

$$f = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}a^2b - a^2c}{d}}.$$

Où il faut remarquer qu'il y a deux racines vraies lorſque $\frac{1}{2}abp + cap$ eſt inférieur à $\frac{1}{3}a^2b + a^2c$, c.à.d. lorſque la longueur p eſt inférieure à $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, ce qui eſt la longueur auparavant trouvée du pendule iſochrone, ou la diſtance du centre d'oſcillation au point de ſuſpenſion, dans le pendule compoſé de la verge AC et du poids C.

D'où il appert que ſi nous voulons faire en ſorte que par l'application du poids D le mouvement du pendule ſoit accéléré, ce poids peut être placé en deux endroits, tels que D ou E, entre A et C; dans l'un et l'autre cas la même viteſſe du pendule en réſultera. Ces endroits ſeront ſitués à égale diſtance du point N qui ſe trouve à la diſtance $\frac{1}{2}p$ du point A, c.à.d. à une diſtance égale à la moitié du pendule ſimple avec lequel on exigeait que notre pendule compoſé ſerait iſochrone. Or, il eſt clair que lorſque cette longueur p eſt conſidérée comme fort peu inférieure à AC, le point N lui auſſi ne ſera ſitué que fort peu au-deſſus du point milieu de la verge AC [1]).

De l'équation précédente $f = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}a^2b - a^2c}{d}}$ on tire la détermination de la longueur p. En effet, il apparaît que l'expreſſion $\frac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ doit ne pas être inférieure à $\frac{\frac{1}{3}a^2b + a^2c}{d}$. Par conſéquent p ne devra pas être plus petite que

$$\frac{a}{d}\sqrt{\frac{4}{3}bd + 4cd + b^2 + 4bc + 4c^2 - \frac{ab + {}^2)2ac}{d}}.$$

Que ſi p eſt égale à cette quantité, c.à.d. ſi

$$\frac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d} = \frac{\frac{1}{3}a^2b + {}^2)a^2c}{d},$$

on aura dans l'équation précédente $f = \frac{1}{2}p$,

c.à.d. $$f = \frac{a}{2d}\sqrt{\frac{4}{3}bd + 4cd + b^2 + 4bc + 4c^2 - \frac{ab + {}^2)2ac}{2d}}.$$

locum ponderis D: ſitque invenienda hæc diſtantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum DE CENTRO OSCILLATIONIS
poſtuletur $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$ æquale p, orietur ex hac æquatione

$$ff \infty pf + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}.$$

$$\text{Et } f \infty \tfrac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}.$$

Ubi animadvertendum, duas eſſe veras radices, ſi $\frac{1}{2}abp + cap$ minus ſit quam $\frac{1}{3}aab + aac$; hoc eſt, ſi longitudo p minor ſit quam $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli iſochroni, ſive diſtantia centri oſcillationis à ſuſpenſione, in pendulo compoſito ex virga AC & pondere C.

Unde patet, ſi velimus efficere, ut, applicato pondere D, acceleretur penduli motus, poſſe duobus locis, inter A & C, illud diſponi, quorum utrolibet eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E. Quæ loca æqualiter diſtabunt à puncto N, quod abeſt ab A, ſemiſſe longitudinis p, hoc eſt, ſemiſſe penduli ſimplicis, cui compoſitum hoc iſochronum poſtulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam AC, etiam punctum N exiguo ſuperius eſſe puncto medio virgæ AC [1]).

Porro, ex æquatione ſuperiori,

$$f \infty \tfrac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$$

habetur determinatio longitudinis p. Patet enim, $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ non minus eſſe debere quam $\frac{\frac{1}{3}aab +^{2)} aac}{d}$. Unde non debebit eſſe minor quam

$$\frac{a}{d}\sqrt{\tfrac{4}{3}bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc - \frac{ab +^{2)} 2ac}{d}}.$$

Quod ſi p æquetur huic quantitati, hoc eſt, ſi $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ fuerit æquale $\frac{\frac{1}{3}aab +^{2)} aac}{d}$, erit jam, in eadem ſuperiori æquatione,

$$f \infty \tfrac{1}{2}p, \text{ hoc eſt, } \frac{a}{2d}\sqrt{\tfrac{4}{3}bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc - \frac{ab +^{2)} 2ac}{2d}}.$$

---

[1]) Comparez la note 9 de la p. 109 du T. XVII.

[2]) L'édition originale et celle de 's Gravesande ont par erreur le signe —.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

Cette formule détermine une diſtance du poids D au poids A telle que le poids D accélère le mouvement du pendule autant que poſſible.

Pour le réglage des horloges on fait uſage comme ſuit des réſultats obtenus. Conſidérons par exemple un pendule d'horloge qui marque les ſecondes par chacune de ſes oſcillations ſimples. Que la gravité de la verge ſoit $\frac{1}{50}$ de celle du poids ſuſpendu au bas du pendule; qu'il y ait outre ce poids-là un autre petit poids mobile le long de la verge et dont nous ſuppoſons la gravité préciſément égale à celle de la verge. On demande où il faut placer ce poids ſur la verge pour que le mouvement de l'horloge ſoit accéléré d'une minute dans un eſpace de 24 heures. De même où il faut le placer pour obtenir une accélération de deux, de trois, de quatre ou d'un plus grand nombre de minutes.

En multipliant le nombre vingt-quatre des heures par ſoixante, on obtient 1440, nombre des minutes compriſes en un jour. Retranchez-en une, lorſqu'il s'agit d'une accélération d'une minute: il en reſte 1439. Or, le rapport des carrés de 1440 et de 1439 eſt à peu près le même que celui des nombres 1440 et 1438. Par conſéquent, ſi la longueur du pendule ſimple qui marque les ſecondes eſt diviſée par la penſée en 1440 parties égales et qu'on attribue 1438 de ces parties à un autre pendule, ce dernier avancera par rapport au premier d'une minute en 24 heures. De ſorte que p eſt ici de 1438 parties.

Puiſque le pendule de l'horloge, compoſé de la verge métallique et du poids qui y eſt ſuſpendu, eſt ſuppoſé iſochrone avec un pendule ſimple de 1440 parties [1]), il faut d'abord trouver la longueur de cette verge d'après l'équation ſus-énoncée. C'eſt l'expreſſion $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$ qui à été trouvée egale à la longueur du pendule ſimple iſochrone avec celui compoſé d'une verge de longueur a et de gravité b et d'un poids y attaché de gravité c. Par conſéquent, ſi la longueur du pendule ſimple iſochrone eſt appelée s, on aura $\frac{\frac{1}{2}bs + cs}{\frac{1}{3}b + c} = a$; et en poſant, dans le cas conſidéré, $c = 50$, $b = 1$, $f = 1440$, on aura pour la longueur de la verge $a = 1444\frac{4}{5}$.

Enſuite, puiſque nous avions $f = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}a^2b - a^2c}{d}}$,

on aura $f = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + 72962\,p - 105061210}$; et, p étant de 1438 parties comme nous l'avons dit, on trouvera $f = 1331\frac{1}{2}$. Il eſt queſtion de parties telles que s, longueur du pendule ſimple qui marque les ſecondes par ſes oſcillations, en contient 1440. Si nous déſignons cette dernière longueur per trois pieds horaires, comme nous l'avons déjà fait, f aura 33 pouces et 3 douzièmes de pouce, qu'on appelle lignes. En d'autres termes, pour connaître le lieu du poids D qui donne une accélération d'une minute en 24 heures, il faut retrancher cette dernière longueur f de

Quo determinatur diſtantia ponderis D à puncto A, ex qua maxime omnium acceleret motum penduli. DE CENTRO OSCILLATIONIS

Atque hæc ad horologiorum uſum ſic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod ſingulis oſcillationibus ſcrupula ſecunda notet. Virgæ autem gravitas ſit $\frac{1}{30}$ gravitatis appenſi ponderis in imo pendulo: &, præter hoc, ſit aliud exiguum pondus mobile ſecundum virgæ longitudinem, cujus gravitas ea|dem pona- (*p.* 149).
tur quæ ipſius virgæ. Quæritur jam, quo loco hoc virgæ imponendum, ut uno ſcrupulo primo acceleretur horologii motus, ſpatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum ſcrupulorum primorum ſit acceleratio; item, ut trium, quatuor, atque ita porro.

Ductis viginti quatuor horis ſexagies, fiunt 1440, quot nempe ſcrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unius ſcrupuli acceleratio quæritur: ſuperſunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime eſt ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, ſi penduli ſimplicis, ſecunda ſcrupula notantis, longitudo diviſa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno ſcrupulo primo. Adeo ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenſo compoſitum, iſochronum ponitur pendulo ſimplici partium 1440 [1]); invenienda primum eſt virgæ illius longitudo, ex æquatione ſuperius poſita. Erat nempe $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$ æquale longitudini penduli ſimplicis, quod iſochronum compoſito ex virga habente longitudinem a, gravitatem b, & pondere affixo cujus gravitas c. Ergo ſi longitudo penduli ſimplicis iſochroni dicatur f. Erit $\frac{\frac{1}{2}bf + cf}{\frac{1}{3}b + c} \infty a$, poſitoque, ut hic, $c \infty 50$; $b \infty 1$; $f \infty 1440$; fiet, $a \infty 1444\frac{4}{5}$, longitudo virgæ.

Jam, quia erat $f \infty \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$,

fiet $f \infty \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 105061210}$. Unde porro, ſi p ſit, uti diximus, partium 1438; invenietur $f \infty 1331\frac{1}{2}$, qualium nempe f, ſeu pendulum ſimplex, ſecunda ſcrupula oſcillationibus deſignans, continet 1440. Cujus longitudo ſi pedum trium ſtatuatur, quos horarios vocavimus, habebit f uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f à tota trium pedum longitudine, ſupererunt unciæ duæ, lineæ 9, à centro oſcillationis penduli compoſiti ſurſum ſumendæ, ut habeatur locus ponderis D, unius ſcrupuli primi acce-

[1]) Comparez la note 7 de la p. 111 du T. XVII.

Du centre d'oscillation.

la longueur totale de trois pieds: il reſte alors 2 pouces et 9 lignes qu'il faut prendre vers le haut à partir du centre d'oſcillation du pendule compoſé. Nous avons examiné de la même manière les autres diſtances qu'il faut marquer ſur la verge, en attribuant diverſes valeurs à la longueur p, et nous les indiquons dans la table ſuivante. C'eſt ſuivant les nombres de cette table qu'a été diviſée la verge du pendule repréſentée plus haut dans la Deſcription de l'Horloge. Les accélérations par jour, comme nous l'avons déjà dit en cet endroit, augmentent chaque fois de 15 ſecondes, ou d'un quart de minute. Par exemple ſi l'on trouve que l'horloge, lorſque le poids mobile eſt fixé à la marque 73,4, retarde en 24 heures de 15 ſecondes, il faudra pouſſer le poids D vers le haut juſqu'au nombre 85,6 pour corriger ce retard.

Accélération de l'horloge dans un eſpace de 24 heures.	*Parties à prendre vers le haut à partir du centre d'oſcillation.*
Min. Sec.	Lignes et dixièmes parties de ligne du pied horaire.
0,15	7,0
0,30	15,2
0,45	23,7
1,0	32,6
1,15	41,9
1,30	51,7
1,45	62,2
2,0	73,4
2,15	85,6
2,30	99,0
2,45	114,1
3,0	131,8
3,15	154,3
3,30	192,6

Le centre d'oſcillation eſt ſitué au-deſſus du centre de gravité C de 1,4 parties.

PROPOSITION XXIV.

Qu'il eſt impoſſible de tenir compte du centre d'oſcillation dans le cas de pendules ſuſpendus entre des cycloïdes [1]); *et comment on ſurmonte la difficulté qui en réſulte.*

Si quelqu'un compare par un examen ſubtil ce que nous avons démontré plus haut à propos du pendule ſuſpendu entre des cycloïdes avec nos conſidérations ſur le centre d'oſcillation, il lui ſemblera qu'il manque quelque choſe à la parfaite égalité des oſcillations dont nous nous louons. Et premièrement il doutera ſi, pour trouver le cercle générateur de la cycloïde, il faut prendre la longueur du pendule depuis le point de

lerationem præſtans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas diſtantias, quibus virga dividenda eſt, calculo inveſtigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem *p*: ejasque ſubjecta tabella exhibe|mus, ſecundum cujus numeros etiam virga penduli divisa eſt, quæ ſuperius in deſcriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 ſcrupula ſecunda, ſeu primorum ſcrupulorum quadrantes. Ex. gr. ſi, pondere mobili D hærente in parte 73,4, inveniatur horologium tardius juſto incedere, in 24 horis, differentiâ 15 ſecundorum ſcrupulorum; oportebit ſurſum adducere pondus D, usque ad numerum 85,6 ut corrigatur. DE CENTRO OSCILLATIONIS (*p.* 150).

Acceleratio horologii ſpatio 24 horarum.	*Partes, à centro oſc. ſurſum accipiendæ.*
Scrup. pr. Sec.	Lineæ & decima linearum pedis horarii.
0,15	7,0
0,30	15,2
0,45	23,7
1,0	32,6
1,15	41,9
1,30	51,7
1,45	62,2
2,0	73,4
2,15	85,6
2,30	99,0
2,45	114,1
3,0	131,8
3,15	154,3
3,30	192,6

Centrum oſcillationis altius eſt centro gravitatis C partibus 1,4.

PROPOSITIO XXIV.

Centri oſcillationis rationem haberi non poſſe, in pendulis inter Cycloides ſuſpenſis [1]*; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.*

Si quis, ſubtili examine, contulerit ea quæ in ſuperioribus, de pendulo inter cycloides ſuſpenſo, demonſtravimus, cum his quæ ad centrum oſcillationis pertinent; videbitur ei deeſſe aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oſcillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda ſit à puncto ſuſpenſionis ad | centrum gravitatis appenſi plumbi, (*p.* 151).

[1]) Comparez le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 101 du T. XVII.

Du centre d'oscillation.

ſuſpenſion juſqu'au centre de gravité du poids qui y eſt attaché, ou bien juſqu'au centre d'oſcillation qui diffère ſouvent de l'autre d'un intervalle ſenſible et d'autant plus grand que la ſphère ou la lentille de plomb eſt plus volumineuſe. Comment en ſera-t-il par exemple lorſque le diamètre de la ſphère eſt égal au quart ou au tiers de la longueur du pendule? Et ſi nous diſons que cette longueur doit être comptée juſqu'au centre d'oſcillation, il ne ſera pourtant pas clair comment ce que nous avons démontré au ſujet du centre d'oſcillation s'applique à un pendule qui change continuellement de longueur, comme le fait celui qui ſe meut entre des cycloïdes. Car il pourrait ſembler que le centre d'oſcillation change auſſi de place lorſque la longueur prend une valeur après une autre, ce qu'il ne faut pourtant pas entendre de cette façon. La choſe eſt certes fort difficile à expliquer ſi nous recherchons une exactitude parfaite; en effet, dans la démonſtration de l'égalité des temps dans la cycloïde nous avons conſidéré le mobile qui ſe mouvait ſuivant elle comme ſi c'était un point peſant. Mais ſi nous nous en tenons à la pratique, cette difficulté ne doit pas être conſidérée comme fort importante, puiſque dans les horloges il ne faut pas que le poids qui conſtitue le corps oſcillant ſoit ſi grand (toutefois, plus ce poids eſt grand, mieux cela vaut) que la différence des centres de gravité et d'oſcillation puiſſe cauſer des troubles. Si cependant nous déſirons abſolument éviter cette difficulté, nous y arriverons en rendant la ſphère ou lentille du pendule mobile autour de ſon axe horizontal: il faudra inſérer les extrémités de ces axes de part et d'autre au bas de la verge du pendule, laquelle doit donc à cet effet être fendue en deux de ce côté. En effet, de cette manière il arrive, d'après la nature du mouvement, que la ſphère du pendule garde perpétuellement la même poſition par rapport à un plan horizontal et qu'ainſi tous ſes points parcourent les mêmes cycloïdes, tout auſſi bien que le centre. Par conſéquent la conſidération des centres d'oſcillation ne s'applique plus à ce mouvement, et un pendule de ce genre préſente un iſochronisme auſſi parfait que ſi toute ſa gravité était réunie en un ſeul point.

PROPOSITION XXV.

De la manière d'établir une meſure univerſelle et perpétuelle [1]).

Une meſure certaine et permanente des grandeurs que ne ſoit ſujette à aucunes rencontres et ne puiſſe être abolie ou corrompue par l'injure ou la longueur des temps, eſt une choſe fort utile et recherchée depuis longtemps par beaucoup de gens. Si l'on en avait trouvé une aux temps anciens, les diſputes actuelles ſur la meſure du pied antique romain, grec ou hébraïque ne ſeraient pas pleines de tant de perplexités. Or, cette meſure eſt aiſément établie au moyen de notre horloge, tandis que ſans celle-ci elle ne peut pas ou fort difficilement être obtenue. Il eſt vrai que ceci a été tenté par quelques perſonnes par la ſimple oſcillation de pendules, ſavoir en comptant le nombre d'oſcillations correſpondant à une révolution entière du ciel, ou à celle d'une partie du ciel connue par les diſtances de certaines étoiles fixes entre elles ſuivant leur

an vero ad centrum oſcillationis; quod, ab altero illo, ſæpe ſenſibili intervallo diſtat, atque eo majore, quo major ſuerit ſphæra aut lens plumbea. Quid enim, ſi ſphæræ diameter quartam, aut tertiam partem, penduli longitudinis æquet? Quod ſi ad centrum oſcillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oſcillationis oſtenſa ſunt, conveniant pendulo continue longitudinem ſuam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Poſſet enim videri, etiam centrum oſcillationis mutari, ad ſingulas diverſas longitudines; quod tamen hoc modo intelligendum non eſt. Res ſane explicatu difficillima, ſi omnimodam ἀκρίβειαν ſectemur. Nam in demonſtratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, veluti punctum gravitate præditum conſideravimus. Sed, ſi ad effectum ſpectemus, non magni facienda eſt difficultas hæc; cum ponderis, quo pendulum conſtat, magnitudo in horologiis tanta non requiratur (etſi quo majus eo melius) ut differentia centrorum gravitatis, & oſcillationis, aliquid hic turbare poſſit. Quod ſi tamen effugere prorſus has tricas velimus, id ita conſequemur, ſi ſphæram lentemve penduli, circa axem ſuum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extrema utrinque, virgæ penduli imæ, inferendo: quæ idcirco ut bifida hac parte ſit neceſſe eſt. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem perpetuo poſitionem, reſpectu horizontalis plani, ſphæra penduli ſervet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipſum, cycloides eaſdem percurrant. Unde ceſſat hic jam centrorum oſcillationis conſideratio; nec minus perfectam temporum æqualitatem tale pendulum conſequitur, quam ſi puncto unico omnis ejus gravitas contineretur. De centro oscillationis

PROPOSITIO XXV.

De menſuræ univerſalis, & perpetuæ, conſtituendæ ratione [1]).

Certa, ac permanens magnitudinum menſura, quæ nullis caſibus obnoxia ſit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi poſſit, res eſt & utiliſſima, & à multis pridem quæſita. Quæ ſi priſcis temporibus reperta fuiſſet, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Hebræique veteris modulo, diſceptationes. Hæc vero menſura, Horologii noſtri opera, facile conſtituitur; cum ſine illo nequaquam, aut ægre admodum, haberi poſſit. Etſi enim, ſimplici pendulorum oſcillatione, (*p.* 152). hoc à quibuſdam tentatum fuerit, numerando recurſus qui tota cæli converſione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum ſtellarum diſtantias, ſecundum aſcenſio-

[1]) Voir sur ce sujet les p. 120 et 121 (note 8) du T. XVII. Remarquons que dans la première ligne de la p. 121 nommée il faut lire „demonſtraturi" au lieu de „demonstrari".

Du centre d'oscillation.

aſcenſion droite; mais d'une part on n'arrive pas de cette manière à une certitude égale à celle qu'on atteint par l'emploi des horloges, et d'autre part ce labeur eſt extrêmement pénible et ennuyeux à cauſe de l'exactitude avec laquelle il faut compter les oſcillations [1]). Or, parce qu'il n'y faut pas ſeulement les horloges, mais que la théorie des centres d'oſcillation contribue auſſi quelque choſe à la recherche fort exacte de cette meſure, nous ne traitons de ce ſujet qu'ici à la fin, après avoir établi cette théorie.

Les horloges les plus propres à cela ſont celles dont les oſcillations marquent les ſecondes ou demi-ſecondes et qui ſont auſſi pourvues d'indices ou d'aiguilles pour les indiquer. En effet, après qu'une horloge de ce genre a été réglée par l'obſervation d'étoiles fixes ſur la durée moyenne des jours, ſuivant la méthode que nous avons enſeignée dans la Deſcription de l'Horloge, il faut ſuſpendre à côté d'elle un autre pendule ſimple, c'à.d. une ſphère de plomb ou d'une autre matière peſante attachée à un fil mince, et mettre ce pendule en mouvement par une légère impulſion; il faut enſuite allonger ou raccourcir le fil juſqu'à ce que ſes oſcillations s'accordent parfaitement durant un quart d'heure ou une demi-heure avec celles du pendule qui fait partie de l'horloge. J'ai dit qu'il faut mettre le pendule en mouvement par une légère impulſion, parce que de petites oſcillations, p. e. de 5 ou 6 degrés, ont des périodes paſſablement égales, mais qu'il n'en eſt plus ainſi des grandes. Si l'on prend alors la meſure de la diſtance du point de ſuſpenſion au centre d'oſcillation du pendule ſimple et qu'on diviſe cette diſtance, dans le cas où les oſcillations ſimples correſpondent à des ſecondes, en trois parties égales, chacune de celles-ci donnera la longueur du pied que nous avons appelé ci-deſſus Pied Horaire [2]), et qui peut de ſorte non ſeulement être déterminé par toutes les nations, mais auſſi être reconſtitué dans les ſiècles à venir. D'où il ſuit que les longueurs de tous les autres pieds étant une fois exprimées par leurs rapports à ce pied-ci, elles pourront déſormais être connues elles auſſi avec certitude. Nous avons déjà dit plus haut que le pied pariſien eſt au pied horaire tel que nous l'avons défini ici comme 864 eſt à 881, ce qui revient à dire que, le pied pariſien étant donné, le pendule ſimple dont les oſcillations correſpondent aux ſecondes a une longueur de trois de ces pieds augmentés de huit lignes et demie. Et le pied pariſien eſt au pied rhénan dont on ſe ſert dans notre patrie comme 144 eſt à 139, c.à.d. le premier ſurpaſſe le ſecond de 5 lignes pariſiennes. Le pied rhénan lui auſſi, et d'autres pieds quelconques, acquièrent ainſi une longueur fixée pour toujours.

Nous avons fait voir plus haut comment le centre d'oſcillation eſt trouvé pour une ſphère ſuſpendue à un fil de longueur quelconque; ſavoir que ſi, comme la diſtance du point de ſuſpenſion au centre de la ſphère eſt à ſon rayon, ainſi ce dernier eſt à une autre longueur, les deux cinquièmes de cette longueur-là portées vers le bas à partir du centre aboutiſſent au centre d'oſcillation cherché. Or, il apparaît facilement pourquoi la conſidération de ce centre eſt néceſſaire à la détermination exacte du pied horaire. Car ſi la diſtance eſt priſe depuis le point de ſuſpenſion juſqu'au centre de la ſphère, mais qu'on ne définit pas la grandeur de la ſphère par rapport à la longueur

nem rectam; nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe eſt moleſtiſſimus ac tædioſiſſimus, propter numerandi ſolicitudinem [1]). Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactiſſimam hujus menſuræ inquiſitionem, etiam centrorum oſcillationis notitia confert; ideo hic demum, poſt eorum tractationem, hanc determinationem ſubjicimus. De centro oscillationis

Aptiſſima huic rei ſunt horologia, quorum oſcillationes ſingulæ ſecunda ſcrupula, vel eorum ſemiſſes, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonſtranda, inſtructa ſunt. Poſtquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejuſmodi horologium, fixarum ſtellarum obſervationibus, compoſitum fuerit, methodo illa quam in horologii deſcriptione oſtendimus: aliud pendulum ſimplex, hoc eſt, ſphæra plumbea, aut alia materia gravi conſtans, ex tenui filo religata, juxta ſuſpendenda eſt, motuque exiguo impellenda; ac tantiſper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recurſus ejus, per quadrantem horæ, aut ſemiſſem, una ferantur cum reciprocationibus penduli horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oſcillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, ſatis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ menſurâ diſtantiæ, à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis penduli ſimplicis; eâque, ſi recurſus ſinguli ſcrupula ſecunda valeant, in tres partes diviſâ; facient hæ ſingulæ longitudinem pedis, quem HORARIUM in ſuperioribus vocavimus [2]): quique, hoc pacto, non ſolum ubique gentium conſtitui poſſit, ſed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, ſemel ad hunc proportionibus ſuis expreſſi, certò quoque in poſterum cognoſci poſſint. Sicut jam ſupra, pedem Pariſienſem ad hunc horarium eſſe diximus, ut 864 ad 881; quod idem eſt ac ſi, poſito prius pede Pariſienſi, dicamus tribus hujuſmodi pedibus, cum octo lineis & dimidia, conſtitui pendulum ſimplex, cujus oſcillationes ſcrupulis ſecundis horariis reſponſuræ ſint. Pes autem Pariſienſis ad Rhenanum, quo in Patria noſtra utuntur, ſe habet ut 144 ad 139; hoc eſt, quinque lineis ſuis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas menſuras accipiunt.

Quomodo autem centrum oſcillationis in ſphæra, ex qualibet | longitudine ſuſpenſa, (*p.* 153). inveniatur, in ſuperioribus demonſtratum eſt. Nempe, ſi fiat ut diſtantia inter punctum ſuſpenſionis & ſphæræ centrum, ad ſemidiametrum ejus, ita hæc ad aliam; ejus duas quintas, à centro deorſum acceptas, terminari in quæſito oſcillationis centro. Facile autem apparet cur neceſſaria ſit hujus centri conſideratio, ad accuratam pedis Horarii conſtitutionem. Nam, ſi à puncto ſuſpenſionis ad ſphæræ centrum diſtantia accipiatur, ſphæræ autem magnitudo non definiatur proportione ad fili longitudinem, non erit

---

[1]) Comparez les p. 4 et 54—55 du T. XVII.

[2]) Voir la p. 96 qui précède.

Du centre d'oscillation.

du fil, la mesure du pendule dont les oscillations correspondent aux secondes ne sera pas absolument certaine: plus la sphère est grande, plus la distance du centre de la sphère au point de suspension sera trouvée petite. En effet, dans les pendules isochrones les distances des centres d'oscillation aux points de suspension sont toujours les mêmes, mais dans le cas d'une plus grande sphère le centre d'oscillation descend plus bas au-dessous du centre que dans celui d'une sphère plus petite.

C'est pourquoi ceux qui avant cette détermination du centre d'oscillation ont entrepris de nous donner une méthode pour trouver la mesure universelle — ce que la noble Société Royale anglaise s'est proposé depuis le moment où fut inventée notre horloge [1]), et après elle le très savant astronome de Lyon, Gabriel Mouton [2]) — ceux-ci, dis-je, ont été obligés de définir le diamètre du globule suspendu soit par rapport à la longueur du fil, disant qu'il en aurait par exemple la trentième partie, soit d'après une mesure connue, tel que le doigt ou le pouce. Mais de cette dernière façon on prend déjà comme connu ce qu'il fallait chercher; je n'ignore pas cependant que l'erreur sera à peine sensible pourvu que les dimensions des sphères ne surpassent pas beaucoup celle dont j'ai parlé. De la première façon la chose réussirait assez bien, mais dans ce cas il faudrait prendre la peine de compter les oscillations et se servir du calcul. Il est donc préférable de faire usage des centres d'oscillation et de suivre ainsi une voie certaine en ne tenant compte que des lois qui s'y appliquent. En agissant ainsi il vaut mieux employer de grandes que de petites sphères parce que les premières sont moins influencées par la résistance de l'air.

D'ailleurs ce ne sont pas seulement les sphères suspendues à un fil, mais aussi les cônes, les cylindres et tous les autres corps, y compris les plans, dont nous avons fait connaître plus haut les centres d'oscillation, qui sont propres à la recherche de cette mesure, puisque pour tous les pendules isochrones il y a un intervalle déterminé et égal entre le point de suspension et le centre d'oscillation. Et nous ne sommes pas obligés de nous servir des horloges qui indiquent par les oscillations simples de leurs pendules les secondes ou demi-secondes: nous pouvons encore atteindre notre but à l'aide d'horloges munies de pendules d'autres longueurs quelconques, pourvu qu'on connaisse par les proportions des roues, en d'autres termes par les nombres de leurs dents, le nombre des oscillations qui sont exécutées en un certain temps. En effet, le pendule simple ayant été trouvé dont les oscillations correspondent chacune à une, deux ou trois oscillations du pendule de l'horloge, on en conclura le nombre des oscillations que le pendule simple exécute en une heure. Et en portant ce nombre au carré, on aura ceci: le carré de 3600, nombre des secondes qui font l'heure, sera au carré prénommé comme la longueur du pendule simple trouvé (longueur qu'il faut toujours compter depuis le point de suspension jusqu'au centre d'oscillation) est à la longueur du pendule horaire de trois pieds dont nous avons parlé. Ceci résulte en effet du fait que les longueurs de deux pendules quelconques sont entre elles comme les carrés des temps dans lesquels se font leurs oscillations; par conséquent ces longueurs sont inversement proportionnelles aux carrés des nombres des oscillations

certa menſura penduli cujus recurſus ſecunda ſcrupula metiantur; ſed quo major erit ejus ſphæra, hoc minor invenietur menſura illa, inter centrum ſphæræ & punctum ſuſpenſionis intercepta. Quia in iſochronis pendulis, centra quidem oſcillationis à punctis ſuſpenſionum æqualiter diſtant; amplius autem deſcendit centrum oſcillationis infra centrum ſphæræ majoris, quam minoris. De centro oscillationis

Hinc neceſſe fuit illis, qui, ante hanc centri oſcillatorii determinationem, menſuræ univerſalis conſtituendæ rationem inierunt; quod, jam inde à prima Horologii noſtri inventione, nobilis illa Societas Regia Anglicana ſibi negotium ſumpſit [1]), & recentius doctiſſimus Aſtronomus Lugdunenſis, Gabriel Moutonus [2]); his, inquam, neceſſe fuit deſignare globuli ſuſpenſi diametrum, vel proportione certa ad fili longitudinem, cujus nempe triceſimam vel aliam partem æquaret; vel menſura quadam cognita, ut digiti vel pollicis. Sed hoc poſteriore modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipſum eſt quod quærendum eſt: etſi ſcio vix ſenſibilem errorem fore, dummodo ſphæræ iſtam, quam jam dixi, magnitudinem non multum excedant. Priore autem poſſet quidem aliquo pacto res explicari; ſed ita, ut numerandarum oſcillationum labor ſubeundus ſit, calculoque etiam utendum. Quamobrem præſtat, centra oſcillationis adhibendo, certam rationem ſequi, nulliſque præter neceſſitatem legibus obligari. atque hic jam majoribus ſphæris quam exiguis potius utendum, quod illæ occurſu aëris minus impedianrur.

Cæterum, non ſphæræ tantum ex filo ſuſpenſæ, ſed & coni, cylindri, aliaque omnia ſolida, planaque, quorum centra oſcillationis ſuperius exhibuimus, ad hanc menſuram inveſtigandam, apta ſunt; quoniam, à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis, certum idemque omnibus iſochronis pendulis eſt intervallum. Neque etiam illa duntaxat horologia, quæ ſecunda ſcrupula aut eorum ſemiſſes ſingulis penduli recurſibus indicant, ad hæc uſur|pare poſſumus; ſed & aliâ quâcunque penduli longitudine in- (*p.* 154).
ſtructis propoſitum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, ſeu dentium numero, cognoſcatur numerus oſcillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo ſimplici, cujus librationes ſingulæ conveniant vel ſingulis, vel binis terniſve recurſibus horologii, conſtabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ ſpatio tranſigantur. Quarum numerus ſi quadretur, erit ut quadratum è 3600, numero ſcrupulorum ſecundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli ſimplicis inventi, (quæ longitudo ſemper à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis accipienda eſt) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde conſtat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudines ſunt inter ſe, ſicut quadrata temporum quibus ſingulæ oſcillationes tranſeunt; ideoque contrariam rationem habent quadratorum à numeris, quos efficiunt oſcillatio-

[1]) Voir sur ce sujet les p. 354—356 du T. XVI et 120—121 du T. XVII.

[2]) Dans son ouvrage de 1670 „Observationes diametrorum Solis et Lunae apparentium, etc.", que nous avons aussi mentionné à la p. 59 de l'Avertissement qui précède.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

exécutées en des temps égaux. Obſervons que tandis que juſqu'ici ce théorème ſur les longueurs des pendules, ſavoir le théorème de la proportionnalité des longueurs aux carrés des périodes, n'avait été prouvé que par l'expérience, ſa démonſtration eſt maintenant manifeſte d'après ce que nous avons expoſé plus haut. En effet, comme nous avons prouvé que le temps d'une oſcillation d'un pendule ſuſpendu entre des cycloïdes a un rapport déterminé à celui d'une chute verticale d'une hauteur égale à la moitié de la longueur du pendule, ſavoir celui de la circonférence du cercle à ſon diamètre, on en conclut aiſément que les périodes de deux pendules ſont entre elles comme les temps des chutes verticales de hauteurs égales à leurs demi-longueurs. Mais comme ces demi-hauteurs, ou les hauteurs entières, ont entre elles un rapport égal à celui des carrés des temps dans leſquels elles ſont parcourues dans une chute verticale *, elles auront auſſi entre elles un rapport égal à celui des carrés des périodes. Or, les oſcillations extrêmement petites d'un pendule ſimple ne diffèrent pas ſenſiblement de celles d'un pendule ſuſpendu entre des cycloïdes, les longueurs étant les mêmes. Par conſéquent les longueurs des pendules ſimples ſeront auſſi entre elles comme les carrés des périodes d'oſcillations fort petites [1]).

* Prop. 3 de la 2ième Partie.

Que ſi quelqu'un ne fuit pas le travail de meſurer les oſcillations qui ſont exécutées en une heure ou en une demi-heure, et qu'il a à ſa diſpoſition une horloge dont un indice ou une aiguille fait voir les ſecondes, il connaîtra de cette manière le nombre d'oſcillations correſpondant à une heure quelle que ſoit la longueur du pendule ſimple conſidéré; et de là il tirera par le calcul, comme auparavant, la longueur du pendule de trois pieds qui correſpond aux ſecondes.

PROPOSITION XXVI [2]).

Déterminer l'eſpace que les corps graves parcourent en tombant durant un certain temps.

Tous ceux qui ont cherché juſqu'ici à meſurer cet eſpace ont jugé néceſſaire d'en venir aux expériences, par leſquelles, de la manière qu'elles ont été inſtituées juſqu'à ce jour, on n'arrive pas aiſément, à cauſe de la grande viteſſe finale des corps tombants, à une détermination exacte. Mais d'après notre Prop. XXV de la Deſcente des Corps graves, nous pouvons, lorſque la longueur du pendule correſpondant aux ſecondes eſt connue atteindre le but propoſé ſans expérience par une conſéquence certaine. Nous rechercherons premièrement l'eſpace qu'un corps grave parcourt en une ſeconde, duquel on pourra enſuite tirer tous les autres. Comme la longueur du pendule à ſecondes eſt, comme nous l'avons dit, de trois pieds horaires et que le temps d'une fort petite oſcillation eſt au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale à la moitié du pendule comme la circonférence du cercle eſt à ſon diamètre, c.à.d. comme 355 eſt à 113; ſi l'on fait que comme le premier de ces nombres eſt au ſecond, ainſi le temps d'une ſeconde ou de ſoixante tierces eſt à un autre temps, ce dernier ſera de $19\frac{1}{10}'''$: c'eſt là le temps d'une chute de la hauteur du demi-pendule

nes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hactenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus; eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oscillationes singulæ peraguntur; nunc ejus demonstratio ex superius traditis manifesta est. Cum enim ostenderimus, singulos recursus penduli, inter cycloides suspensi, ad casum perpendicularem, è dimidia penduli longitudine, certam rationem habere; eam scilicet quam circumferentia circuli ad diametrum suam; facile hinc colligitur, tempora oscillationum in duobus pendulis esse inter se, sicut tempora descensus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, sive etiam totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipsæ descensu perpendiculari percurruntur *; eædem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oscillationes singulas metiuntur. Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibiliter oscillationes minimæ penduli simplicis, cujus eadem sit longitudo. Itaque & pendulorum simplicium longitudines, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oscillationes minimæ transiguntur [1]).

De centro oscillationis

* Prop. 3. Part. 2.

Quod si quis oscillationum numerandarum, quæ horæ aut semihoræ tempore transeunt, laborem non defugiat; horologiumque adsit, cujus index secunda scrupula demonstret; quæcunque accipiatur penduli simplicis longitudo, ejus numerus oscillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoscetur; atque inde longitudo penduli tripedalis, ad secunda scrupula, ut antea, calculo prodibit.

PROPOSITIO XXVI [2]). (*p.* 155).

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

Hanc mensuram quicunque hactenus investigarunt, experimenta consulere necesse habuerunt; quibus, prout hactenus instituta fuere, non facile ad exactam determinationem pervenitur, propter velocitatem cadentium, sub finem motus acquisitam. Ex nostra autem prop. 25, de Descensu gravium, cognitaque longitudine penduli ad secunda scrupula, absque experimento, per certam consequentiam, rem expedire possumus. Ac primo quidem spatium illud inquiremus, quod unius scrupuli secundi tempore grave præterlabitur; ex quo quælibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad secunda scrupula, longitudinem diximus esse pedum Horariorum 3: tempus autem unius oscillationis minimæ, est ad tempus descensus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc est, ut 355 ad 113: si fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius secundi surupuli, sive sexaginta tertiorum, ad aliud; fient $19'''\frac{1}{10}$, tempus descensus per dimidiam penduli altitudinem,

[1]) La proportionnalité des longueurs aux carrés des périodes, lorsque les amplitudes sont les mêmes (condition superflue dans le seul cas d'oscillations entre des arcs cycloïdaux) peut d'ailleurs être démontrée plus généralement; voir la note 5 de la p. 18 du T. XVII.

[2]) L'édition originale a par erreur Prop. XXV.

Du centre d'oscillation.

laquelle eſt de 18 pouces du pied. Mais comme les carrés des temps ſont entre eux, ainſi le ſont auſſi les eſpaces parcourus en ces temps, comme cela a été démontré dans la propoſition précédente. Prenons donc une longueur telle que le carré de $19\frac{1}{10}'''$ ſoit au carré de $60'''$, c.à.d. que 36481 ſoit à 360000, comme 18 pouces ſont à elle: on trouvera ainſi la longueur de 14 pieds, 9 pouces, 6 lignes pour l'eſpace parcouru en tombant en une ſeconde. Mais attendu que le pied horaire eſt au pied pariſien comme 881 eſt à 864, la même hauteur, réduite à cette meſure, ſera à peu près de 15 pieds et un pouce [1]). Et ceci s'accorde fort bien avec nos expériences très exactes, dans leſquelles le moment final de la chute n'eſt pas diſcerné par le jugement des oreilles ou des yeux, dont ni l'un ni l'autre eſt ici aſſez ſûr, mais où l'eſpace parcouru pendant la chute eſt trouvé ſans erreur ſuivant une autre méthode que nous tâcherons d'expoſer ici.

La demi-oſcillation d'un pendule ſuſpendu à une paroi ou à une table dreſſée indique le temps de la chute. Pour que ſon globule ſoit lâché au même inſtant où on lâche le plomb qui doit exécuter la chute, les deux corps ſont tenus reliés par un mince fil qui eſt rompu à l'aide d'une flamme. Mais avant cela on attache au plomb qui doit tomber un autre fil de longueur telle que lorſqu'il eſt tendu par la force du plomb tombant le pendule n'a pas encore atteint la paroi. L'autre extrémité de ce fil eſt attachée à une règle de papier, ou une mince membrane, gliſſant ſur la paroi ou la table de telle manière qu'elle peut facilement ſuivre le poids tirant et deſcendre en ligne droite ſuivant ſa longueur, en paſſant par l'endroit où le globe du pendule doit choquer la table. Toute la petite corde étant tendue, une partie de la règle eſt donc tirée en bas elle auſſi par le plomb tombant, avant que le pendule a atteint la table. La grandeur de cette partie eſt indiquée par le globe qui eſt induit d'une légère couche de ſuie et met donc une marque ſur la règle qui paſſe. En y ajoutant la longueur de la petite corde on a une meſure certaine de l'eſpace parcouru par le corps tombant.

Dans ces conſidérations nous négligeons la réſiſtance de l'air pour que la meſure qui convient aux corps tombants s'accorde entièrement avec les expériences. Et, certes, cette réſiſtance n'eſt pas aſſez grande pour qu'elle puiſſe altérer ſenſiblement les réſultats dans les hauteurs où l'on peut monter, pourvu que les corps ſoient ſuppoſés de métal ou bien de grandes dimenſions s'ils conſiſtent en une matière plus légère. En effet, la légèreté de la matière dans les corps qui traverſent l'air en tombant eſt compenſée de telle manière par la grandeur des corps qu'une ſphère en bois ou

[1]) 15 pieds et un pouce, mesure de Paris, correspondent à 15 pieds et $7\frac{1}{2}$ pouces rhénans. Comme nous l'avons dit ailleurs (T. XVII, p. 100, note 1 et p. 246) Huygens connaissait cette valeur depuis la fin de 1659. Citons encore le passage suivant de la p. 88 du Manuscrit C écrit en 1666 peu avant le départ pour Paris: „AC [longueur du pendule supposé simple] eſt 38

quæ nempe eſt pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita ſunt ſpatia illis temporibus peracta, quemadmodum ſuperiori propoſitione fuit oſtenſum. Ergo, ſi fiat ut quadratum ex $19'''\frac{1}{10}$ ad quadratum ex $60'''$, hoc eſt, ut 36481 ad 360000, ita 18 unciæ ad aliud, fient ped. 14. unc. 9. lin. 6, altitudo deſcenſus perpendicularis, tempore unius ſecundi. Cum autem pes Horarius ſit ad Pariſienſem, ut 881 ad 864; erit eadem altitudo, ad hanc menſuram reducta, proxime pedum 15 & unciæ unius [1]). Atque hæc cum accuratiſſimis experimentis noſtris prorſus conveniunt. in quibus punctum illud temporis, quo caſus finitur, non aurium aut oculi judicio diſcernitur; quorum neutrum hic ſatis tutum eſt; ſed ſpatium deſcendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, abſque ullo errore cognoſcitur. De centro oscillationis

Penduli, ad parietem tabulamve erectam, ſuſpenſi dimidia oſcillatio moram temporis, cadendo adſumpti, indicat. Cujus ſphærula, ut eodem momento ac plumbum caſui deſtinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne inciditur. Sed prius, caſuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad pa|rietem illidatur pendulum. Funi- (*p.* 156).
culi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret; ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile ſequi poſſit, rectáque ſecundum longitudinem ſuam deſcendere; eo loci tranſiens, quo penduli ſphæra ad tabulam accidet. Abſumpto igitur funiculo toto, pars inſuper regulæ deorſum trahitur à cadente plumbo, priuſquam pendulum ad tabulam pertingat. Quæ quanta ſit pars, ſphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem ſignans, indicat. Huic autem addita funiculi longitudine, ſpatium cadendo emenſum certò definitum habetur.

Aëris autem occurſum, quaſi nullus eſſet in his intelligimus, ut menſura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte conſentiat. Nec ſane tantus eſt ille, ut in altitudinibus his, quò aſcendere datur, ſenſibile diſcrimen inducere poſſit; dummodo ſolida corpora è metallo, aut, ſi leviore materia conſtent, mole grandiuſcula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aërem ſecant, ita magnitudine corporis penſatur, ut ſphæra lignea, vel etiam è ſubere formata, paria faciat cum plumbea:

---

poll. Rhenolandiæ. Descensus DC seu semivibratio penduli AC fit $30'''$ sive semisecundo, tempus autem hujus semivibrationis est ad tempus casus perpendicularis per BC sive $\frac{1}{2}$AC ut semicircumferentia BCE ad diam. BC. Hinc fit spatium descensus perpendicularis tempore unius secundi pedum 15 poll. $7\frac{1}{2}''$. À la p. 160 du Manuscrit D (février ou mars 1669) Huygens trouve 15 pd. 1 poll. en se servant directement du pied français: la longueur du pendule à secondes est évaluée à 36 pouces 8 lignes. À la p. 369 du même Manuscrit cette dernière longueur est corrigée en 36 pouces $8\frac{1}{2}$ lignes, et le „spatium descensus" correspondant devient 15 pd. 1 poll. 1 lin.; pour la valeur en pieds rhénans Huygens trouve ensuite de nouveau 15 pd. $7\frac{1}{2}$ poll.

DU CENTRE D'OSCILLATION.

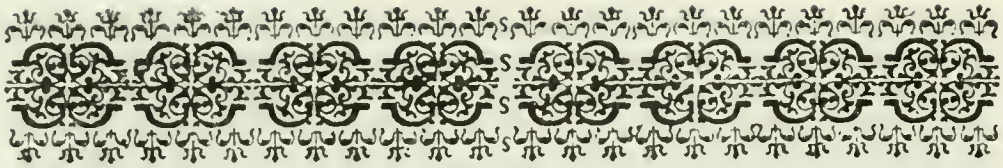
même en liége va auſſi vite qu'une ſphère de plomb, lorſque les diamètres de ces ſphères ont à ceux de la ſphère de plomb le même rapport que la gravité ſpécifique du plomb à celle du bois ou du liége. En effet alors les gravités des ſphères ſeront entre elles comme leurs ſurfaces [1]). Toutefois, pour que les corps qui diffèrent beaucoup l'un de l'autre en gravité ſpecifique tombent ſenſiblement avec une même viteſſe, il n'eſt nullement néceſſaire que cette proportion des diàmetres ſoit obſervée: les corps peuvent être égaux entre eux pourvu qu'ils ſoient l'un et l'autre aſſez grands ou qu'ils tombent d'une hauteur aſſez faible. Cependant il faut encore remarquer à ce propos que la hauteur peut être ſi grande ou bien (la hauteur étant faible) que la légèreté du corps projeté peut être telle qu'à cauſe de la réſiſtance de l'air l'accélération du mouvement diffère énormément de celle que nous avons calculée plus haut. Car en général à chaque corps qui tombe à travers l'air ou un autre liquide correſpond une viteſſe déterminée, dépendant de ſon poids et de ſa ſurface, qu'il ne peut jamais dépaſſer ou plutôt qu'il n'atteint jamais. C'eſt la viteſſe que l'air, ou le liquide, devrait avoir vers le haut pour pouvoir ſoutenir le corps nageant dans lui. Mais nous aurons peut-être l'occaſion de traiter ce ſujet plus amplement en un autre endroit [2]).

[1]) Voir les p. 384—385 du T. XVI.

[2]) Il existe des calculs de Huygens sur l'influence de la résistance des fluides sur le mouvement, qu'il n'a pas publiés. Nous réservons ces calculs pour un des Tomes suivants.

quando nimirumdiametrorum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni ſuberisve gravitatem. Tunc enim gravitates ſphærarum erunt inter ſe ſicut earum ſuperficies [1]). Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum ſenſu percipi poteſt, decidant corpora, quæ multum intrinſeca gravitate differunt, nequaquam opus eſt ut proportio illa dimetrorum ſervetur. Poſſunt enim inter ſe æqualia eſſe, dummodo utraque ſatis magna ſint; aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum eſt, tantam vel altitudinem eſſe poſſe; vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem; ut ob aëris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in ſuperioribus demonſtravimus, proportione plurimum receſſura ſit. Namque in univerſum, corpori cuilibet, per aërem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac ſuperficiei ſuæ, conſtitutus eſt; quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam poſſit. Quæ nempe celeritas ea eſt, quam ſi aër, aut liquor ille ſurſum tendens, haberet, ſuſpenſum corpus idem ſibi innatans ſuſtinere poſſet. Verum de his, alias fortaſſe, pluribus agendi occaſio erit [2]).

De centro oscillationis



CINQUIÈME PARTIE

DE L'HORLOGE À PENDULE.

Contenant une autre conſtruction baſée ſur le mouvement circulaire des pendules, et des théorèmes ſur la force centrifuge.

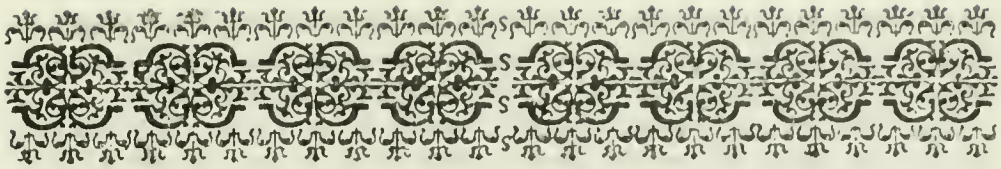
Il y a encore un autre genre de mouvement oſcillatoire outre celui que nous avons traité juſqu'ici: c'eſt le mouvement d'un poids ſuſpendu qui tourne en rond ſuivant une circonférence de cercle. Nous en avons déduit une autre conſtruction d'horloge preſque ſimultanément avec celle traitée ci-deſſus: elle eſt baſée de même que la première ſur un principe d'iſochroniſme bien établi; mais l'uſage de cette horloge ne s'eſt pas fort répandu à cauſe de la plus grande ſimplicité et commodité de la conſtruction de l'autre [1]). Toutefois pluſieurs horloges de ce genre ont auſſi été fabriquées, non ſans ſuccès [2]), et il y a en elles ceci de remarquable que l'on y voit tourner la dernière aiguille, celle des ſecondes, d'un mouvement continu et uniforme, tandis que dans notre première horloge et dans toutes les autres elle avance par bonds. Il faut encore noter cette autre particularité que les automates ainſi conſtruits ſe meuvent ſans aucun bruit. Il eſt vrai que pour les uſages aſtronomiques le ſon qui ſe répète toutes les ſecondes n'eſt pas ſans utilité. Et j'avais d'abord l'intention de publier la deſcription de ces horloges avec la théorie du mouvement circulaire et de la Force Centrifuge — c'eſt ainſi que je veux l'appeler — ſujet dont j'ai à dire plus que je n'en ai en ce moment le temps; mais pour que ceux qui s'intéreſſent à ces choſes jouiſſent déjà plus tôt de cette ſpéculation nouvelle et nullement inutile et que la publication ne ſoit pas empêchée par quelqu'accident, j'ai ajouté encore, contre mon deſſein, aux autres parties celle-ci par laquelle l'arrangement de l'appareil eſt brièvement expoſé et où j'énonce en même temps les théorèmes relatifs à la Force Centrifuge en réſervant leur démonſtration pour plus tard [3]).

Conſtruction de la deuxième horloge.

Je n'ai pas jugé néceſſaire d'exhiber ici la diſpoſition des roues qui compoſent la partie intérieure de l'horloge, puiſque celles-ci peuvent aiſément être arrangées com-

---

[1]) Voir les p. 242—243 du T. XVI, ainsi que les p. 88—91, 153 et 353 (note 2) du T. XVII.



HOROLOGII OSCILLATORII (p. 157).

Pars Quinta.

Conſtructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

Eſt & aliud Oſcillatorii motus genus, præter id quod hactenus pertractavimus. Ejuſmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Unde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud; certoque itidem æquabilitatis principio nixum; ſed cujus uſus minus pererebuit, propter alterius illius conſtructionem, quodammodo ſimpliciorem facilioremque [1]). Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec ſine ſucceſſu, conſtructa fuere [2]): eſtque in his ſingulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index poſtremus, qui ſecunda ſcrupula deſignat; cum in priore noſtro horologio, omnibuſque aliis, ſubſultim quaſi feratur. Item hoc quoque, quod abſque ſtrepitu, ſonoque omni, moveantur hac ratione conſtructa automata. quanquam, ad obſervationes aſtronomicas, ſonus ad ſingula ſecunda ſcrupula repetitus, utilitate non careat. Et conſtitueram quidem, deſcriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocare libet, attinent; de quo argumento plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili ſpeculatione maturius fruantur harum rerum ſtudioſi, neve caſu aliquo intercidat, hanc quoque partem, præter deſtinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, ſimulque Theoremata traduntur, ad Vim Centrifugam pertinentia; demonſtratione ipſorum in aliud tempus dilata *.

*Vide Auctoris Opera poſthuma p. 401. & ſeq. [3]).

Horologii ſecundi conſtructio.

Non neceſſarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii conſtant, diſpoſitionem hic exhiberem, cum ea ab artificibus facile ordinari, variiſque modis mutari (p. 158).

---

[2]) Comparez l'Appendice II à la Pars Quinta qui suit.

[3]) Voir outre la note 2 de la p. 353 du T. XVII, les p. 237—328 du T. XVI. La note marginale (comparez les p. 238—239 du T. XVI) a été ajoutée au texte latin par 's Gravesande.

Description d'une deuxième horloge.

me il convient par les artifans et que la difpofition peut être modifiée en diverfes manières: il fuffit d'expliquer la partie qui règle le mouvement d'une façon bien déterminée. On trouve ici une figure [Fig. 118] qui repréfente cette partie [1]).

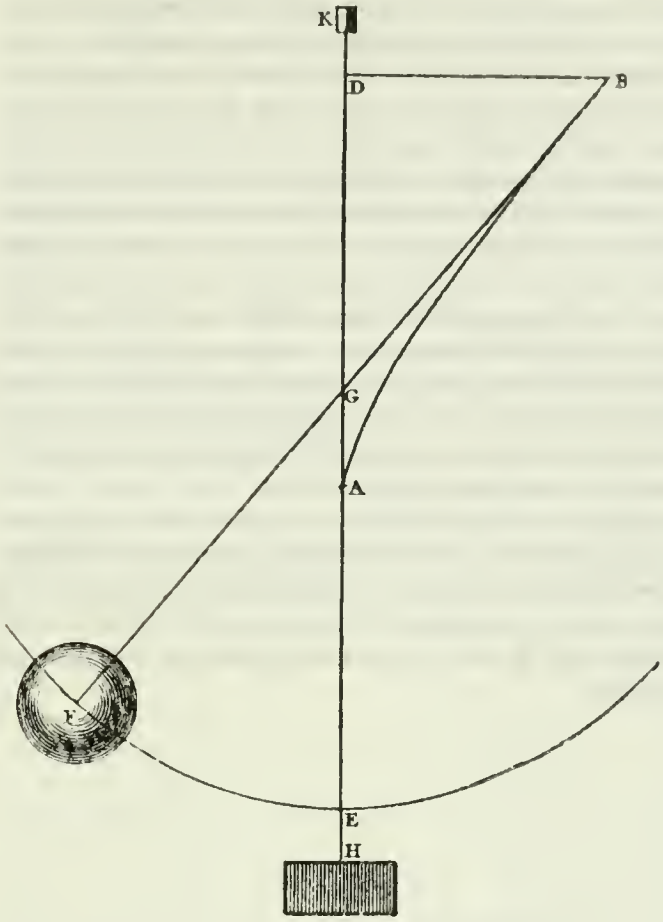
L'axe DH doit être fuppofé vertical et mobile fur deux pôles. En A une lame courbée affez large y eft attachée; elle eft courbée fuivant la ligne AB qui eft la paraboloïde de laquelle nous avons démontré dans la Prop. VIII de la 3ième Partie que par fon évolution, après qu'une certaine droite y a été ajoutée, une parabole eft décrite. Cette droite eft ici AE; et la ligne EF repréfente la parabole décrite par l'évolution de la ligne entière BAE. Le fil appliqué à la courbe BA par l'extrémité duquel la parabole eft décrite eft BGF. Le poids attaché au fil eft F. Or, tandis que l'axe DH tourne fur lui-même, le fil tendu BGF fait mouvoir le globule F avec lui de manière à lui faire parcourir des circonférences de cercle horizontales qui feront plus grandes ou plus petites felon que l'axe DH fera mu avec plus ou moins de force par les roues de l'horloge qui agiffent fur le petit tympan K; mais toutes ces circonférences feront fituées fur la furface d'un conoïde parabolique. Et par ce moyen les temps des révolutions feront toujours égaux comme il paraîtra par ce que nous dirons plus loin de ce mouvement.

Que fi nous voulons que l'horloge indique les demi-fecondes, il faut que le latus rectum de la parabole EF foit de $4\frac{1}{2}$ pouces de notre pied horaire, c.à.d. qu'il foit égal à la moitié de la longueur du pendule dont les ofcillations fimples fe feraient en une demi-feconde. Or, la grandeur du latus rectum de la paraboloïde AB dépend de celui de la parabole: le premier eft égal à $\frac{27}{16}$ fois le fecond; il en eft de même de la longueur AE qui eft la moitié du latus rectum de la parabole. Mais fi nous voulons que chaque révolution fe faffe en une feconde, les latera recta ainfi que la ligne AE devront être quatre fois plus grands que précédemment.

---

[1]) Comparez les figures de la p. 153 du T. XVII.

[Fig. 118.]



SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

poſſit; ſed eam partem explicari ſatis eſſe, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura [Fig. 118] expreſſa eſt [1]).

Axis DH ad horizontem erectus intelligendus eſt, ac ſuper polis duobus mobilis. Huic ad A affixa eſt lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque ſecundum lineam AB; quæ eſt paraboloides illa de qua oſtendimus, Propoſ. 8. partis 3, evolutione ejus, poſtquam ipſi recta quædam juncta fuerit, deſcribi parabolam. Ea recta hic eſt AE; parabolam vero, ex evolutione totius BAE deſcriptam, refert linea EF. Filum curvæ BA applicatum, cujus extremo puncto parabola deſcribitur, eſt BGF. Pondus illi affixum F. Dum autem axis DH in ſeſe vertitur, filum BGF, in rectam lineam extenſum, ſphærulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat; qui majores minoreſve erunt, prout majori aut minori vi axis DH, ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: ſed ita, ut omnes in ſuperficie conoidis parabolici contineantur. Atque hoc ipſo æqualia ſemper circuitus tempo|ra evadent, ut ex iis, quæ (*p.* 159). de hoc motu poſtea dicemus, apparebit.

Quod ſi circuitus ſingulos, ſecundorum ſcrupulorum ſemiſſes notare velimus, oportet latus rectum parabolæ EF eſſe $4\frac{1}{2}$ unciarum pedis Horarii noſtri, hoc eſt dimidium longitudinis penduli, cujus ſingulæ oſcillationes ſemiſcrupulum ſecundum impenderent. Ex parabolæ autem latere recto, pendet magnitudo lateris recti paraboloidis AB; quippe quod illius $\frac{27}{16}$ continet: atque item longitudo AE, quæ lateris recti parabolæ dimidium eſt. Si vero ſecunda ſcrupula unoquoque circuitu expleri deſideremus, quadrupla priorum accipienda ſunt, tum latera recta, tum linea AE.

DESCRIPTION D'UNE DEUXIÈME HORLOGE.

Il faut ſavoir en outre que, quoique nous ayons conſidéré juſqu'ici le fil BGF comme unique et ſimple, il vaut cependant beaucoup mieux qu'il ſoit double à ſa partie ſupérieure et du côté de F ſes deux parties ſe joignent ſous un angle de 20 ou 30 degrés. A cet effet la largeur de la lame AB doit être telle du côté B qu'elle eſt néceſſaire pour cet écartement des fils, ou bien elle doit, elle auſſi, être fourchue. Car de cette manière le mouvement circulaire du poids F continue ſans aucune autre aide et tend les deux fils attachés à lui, ce qu'il ne ferait pas s'il n'était retenu que par un ſeul fil. Il faut pourtant ſavoir que la force requiſe pour la continuation de ce mouvement circulaire provient des roues de l'horloge miſes en mouvement par un poids ou une autre puiſſance: cette force parvient à l'axe KH par le moyen du petit pignon K et entretient par une très legère preſſion le mouvement une fois commencé du globe F. Or, pour qu'elle puiſſe le faire d'autant plus facilement, il faut que la révolution de l'axe KH ſoit fort libre. L'expérience a montré que la meilleure façon d'obtenir cette liberté eſt de conſtruire en acier durci la partie inférieure de l'axe et de placer ſous elle une ſurface plane de diamant, dont une très petite particule eſt ici ſuffiſante, laquelle il faut mettre ſous une lame perforée.

On pourra d'ailleurs employer au lieu du fil BGF, là où celui-ci doit s'appliquer ſur la courbe AB, une fine chaînette d'or ou d'un autre métal, pour que la longueur reſte d'autant mieux conſtante. C'eſt ce que nous avons eſſayé auſſi dans la première horloge où le fil eſt ſuſpendu entre les cycloïdes. Mais dans ce cas l'inflexion continuelle de la chaînette nuit beaucoup à la libre agitation du pendule par la friction des mailles quelque petite qu'elle ſoit.

Porro, etſi filum BGF veluti unicum ac ſimplex hactenus deſignavimus, ſciendum tamen longe præſtare ut parte ſuperiori duplex ſit, ac F verſus in angulum coëat, 20 vel 30 partium. In quem finem & laminæ AB latitudo ad B tanta eſſe debet, quanta iſti filorum divaricationi ſufficit, vel & ipſa biſida facienda. Hoc pacto enim motus circularis ponderis F, abſque alio ullo adminiculo, continuatur, ac filum utrumque ſibi annexum in rectum extendit; quod non faceret, ſi unico tantum filo teneretur. Ubi tamen vim illam ab horologii rotis, vel pondere vel alia potentia motis, ad continuationem hujus motus circularis requiri ſciendum. Quæ nempe vis per tympanidium K ad axem KH pervenit, ac minimo niſu, motum ſphæræ F ſemel inditum, conſervat. SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

Hoc autem quo facilius poſſit, liberrimam axis KH revolutionem eſſe oportet. Quod nulla ratione melius perfici compertum, quam ſi, parte ſui ima, durato chalybe conſtet, ſuppoſitamque habeat adamantis ſuperficiem planam; cujus minima quævis particula hic ſufficit, ſubter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili BGF, qua parte curvæ AB applicari debet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit, quo melius invariata ſervetur longitudo. Atque hoc in priore quoque horologio, ubi pendulum inter cycloides ſuſpenſum eſt, experti ſumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum, perexiguo licet, non parum impedit liberam penduli agitationem.

THÉORÈMES SUR LA FORCE CENTRIFUGE RÉSULTANT DU MOUVEMENT CIRCULAIRE [1]).

I.

Lorſque deux mobiles égaux parcourent en des temps égaux des circonférences inégales, la force centrifuge correſpondant à la plus grande circonférence fera à celle qui correſpond à la plus petite dans un rapport égal à celui des circonférences elles-mêmes ou de leurs diamètres.

II.

Lorſque deux mobiles égaux ſe meuvent avec la même viteſſe dans des circonférences inégales, leurs forces centrifuges feront inverſement proportionnelles aux diamètres.

III.

Lorſque deux mobiles égaux ſe meuvent dans des circonférences égales avec des viteſſes inégales, mais conſtantes pour chacun d'eux comme nous voulons que cela ſoit entendu dans toutes ces propoſitions, la force centrifuge du plus rapide fera à celle du plus lent dans un rapport égal à celui des carrés des viteſſes.

IV.

Lorſque deux mobiles égaux, parcourant des circonférences inégales, ont une force centrifuge égale, le temps d'une révolution ſuivant la plus grande circonférence fera à celui d'une révolution ſuivant la plus petite circonférence dans un rapport égal à celui des racines carrées des diamètres.

V.

Lorſqu'un mobile ſe meut ſuivant une circonférence de cercle avec la viteſſe qu'il acquiert en tombant d'une hauteur égale au quart du diamètre, il aura une force centrifuge égale à ſa gravité; en d'autres termes, il tendra la corde, par laquelle il eſt attaché au centre, avec la même force que lorſqu'il y eſt ſuſpendu.

VI.

Dans la furface concave d'un conoïde parabolique à axe vertical toutes les révolu-

---

[1]) Nous ne publions ici que la traduction française des treize théorèmes, vu que le texte latin a déjà été publié aux p. 315—318 du T. XVI.

tions d'un mobile parcourant des circonférences horizontales petites ou grandes ſont accomplies dans des temps égaux: chacun de ces temps eſt égal à celui d'une oſcillation double d'un pendule ayant pour longueur la moitié du latus rectum de la parabole engendrante. DE LA FORCE CENTRIFUGE.

VII.

Lorſque deux mobiles ſuſpendus à des fils inégaux parcourent en tournant des circonférences horizontales, l'un des bouts du fil demeurant immobile, et que les hauteurs des cônes dont les fils décrivent la ſurface par ce mouvement ſont égales, les temps des révolutions ſeront auſſi égaux entre eux.

VIII.

Lorſque deux mobiles, ſuſpendus à des fils égaux ou inégaux, tournent comme précédemment d'un mouvement conique et que les hauteurs des cônes ſont inégales, les temps de révolution ſeront dans un rapport égal à celui des racines carrées de ces hauteurs.

IX.

Lorſqu'un pendule poſſédant un mouvement conique décrit des circonférences extrêmement petites, leur période aura au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale au double de la longueur du pendule un rapport égal à celui de la circonférence d'un cercle à ſon diamètre; par conſéquent cette période eſt égale au temps de deux oſcillations latérales fort petites du même pendule.

X.

Lorſqu'un mobile parcourt une circonférence et que la période de ce mouvement eſt égal au temps dans lequel un pendule ayant pour longueur le rayon de cette circonférence peut décrire d'un mouvement conique une circonférence extrêmement petite ou exécuter une fort petite oſcillation latérale double, il aura une force centrifuge égale à ſa gravité.

XI.

La période de révolution d'un pendule quelconque poſſédant un mouvement conique ſera égale au temps de la chute verticale d'une hauteur égale au fil du pendule, lorſque l'angle d'inclinaiſon du fil par rapport au plan horizontal eſt à peu près de 2°54′. Il en ſera exactement ainſi, lorſque le ſinus du dit angle eſt au rayon comme le carré inſcrit à un cercle eſt au carré de ſa circonférence.

XII.

Lorſque deux pendules de même poids, mais dont les fils ſont inégalement longs, décrivent en tournant des ſurfaces coniques et que les hauteurs des cônes ſont égales,

De la force centrifuge.

les forces avec lesquelles ils tendent leurs fils feront entre elles dans un rapport égal à celui des longueurs des fils.

XIII.

Lorsqu'un pendule simple exécute un mouvement latéral maximum, c.à.d. lorsqu'il descend par un quart entier de circonférence de cercle, il tendra son fil, au moment où il sera parvenu au point le plus bas de la circonférence, avec une force trois fois plus grande que s'il y était simplement suspendu [1]).

FIN.

[1]) Comparez la p. 45 de l'Avertissement qui précède.

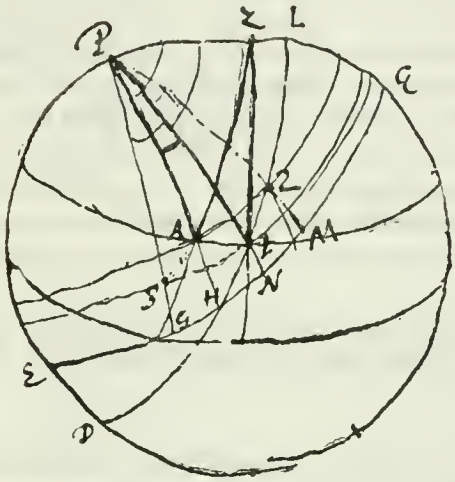
APPENDICE I

À LA PARS PRIMA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1668—1669.]

A. Ad inveniendas longitudines in mari, ex duabus æqualibus ſolis altitudinibus et hora pendulorum [1]).

[Fig. 119.]



PLQ meridianus. P polus. Z. zenit, EQ æquator. A 1 parallela horizontis. LD ecliptica.

1 locus ſolis in ecliptica cum ante meridiem obſervaretur ejus diſtantia a vertice Z 1 [2]).

2 locus ſolis in ecliptica cum poſt meridiem obſervatus fuit in eadem diſtantia a vertice atque ante meridiem. tranſlato nempe puncto eclipticæ 2 in A, et 1 in B.

Interceſſere autem inter obſervationem utramque horæ horologij 10. daturque punctum eclipticæ 1 puta 10 gr. ♈. Et altitudo poli. et diſtantia a vertice Z 1 vel ZA. Quæritur quot horis poſt primam obſervationem ſol fuerit in meridiano.

Ex ephemeride datur arcus eclipticæ BA, et ex tabula aſcenſionum rectarum dabitur proinde arcus æquatoris GH [3]) arcui BA

---

[1]) La Pièce *A* est empruntée aux p. 241—242 du Manuscrit C écrites entre février et mai 1668. Comparez sur des calculs de ce genre, où toutefois il n'est pas encore tenu compte du déplacement du soleil dans l'écliptique, l'avant-dernier alinéa de la p. 222 et le premier alinéa de la p. 226 du T. XVII.

[2]) Le point 1 (Fig. 119) ne désigne pas l'endroit où se trouvait le soleil au moment de l'observation matinale: dans la figure cet endroit a été transféré de l'Orient à l'Occident, à égale distance du méridien. Comparez le cinqième alinéa là où il est question du „duplus arcus QN".

[3]) C'est par hasard que dans la Fig. 119 le point H coïncide (ou peu s'en faut) avec l'intersection de l'équateur et de l'écliptique.

conveniens, unde itaque noſcitur angulus BPA. Porro ex 3 lateribus trianguli PAZ [1]), invenietur angulus APZ et ex 3 lateribus trianguli P1Z [1]) invenietur angulus 1PZ, qui ablatus ab APZ relinquit angulum AP1. cui addito BPA, cognoſcitur angulus BP1. Hic vero angulus BP1 menſurat tempus quod elapſum eſt dum punctum eclipticæ 1 [2]*) pervenit in B. Ponitur autem 1 eſſe in B cum ſol eſt in A. Itaque 10 horis tranſierunt meridianum duplus arcus QN et inſuper arcus NG. Ergo à 10 horis auferendo tempus quo tranſijt arcus NG, relinquitur tempus quo tranſijt duplus arcus QN. cujus itaque temporis dimidium additum horæ primæ obſervationis dabit horam qua punctum eclipticæ 1 fuit in meridiano. Tunc autem ſol nondum eſt in meridiano, ſed adhuc tranſire debet dimidium aſcenſionis rectæ NM. Ergo addendo tempus hujus dimidij arcus NM ad horam inventam qua punctum 1 erat in meridiano, habebitur hora qua ſol erat in meridiano.

Brevius vero ſic idem invenitur. Tempus quo punctum eclipticæ 2 eſt in A excedit tempus quo idem punctum 2 erat in circulo P1N [2]*) tempore arcus HN. Itaque ſi a 10 horis, hoc eſt, a tempore inter duas obſervationes æqualium ſolis altitudinum, auferatur tempus arcus HN, relinquetur tempus quo ſol æquales angulos horarios confecit ab utraque parte meridiani PQ, utrumque ſcilicet æqualem ipſi QPN. Cujus temporis ſemiſſe itaque à prima obſervatione ſol pervenit ad meridianum (quandoquidem mutatio aſcenſionis rectæ, dum percurrit exiguum arcum 1, 2, pro motu æquabili haberi poteſt) adeoque dicti temporis ſemiſſis additus horæ primæ obſervationis dabit horam qua ſol erat in meridiano. Itaque tantum invenire opus eſt angulum AP1 quem metitur arcus HN.

N. B. datur complementum declinationis primæ P1; deinde ex tempore dato 10 horarum cognoſcitur locus ſolis 2, et proinde et complementum declinationis P2 ſive PA.

His caſibus omnibus quibus P2 arcus major quam P1 [2]) addendum eſt tempus arcus HN ad horas elapſas inter obſervationes. tum ut prius ſummæ dimidium additum horæ primæ obſervationis dabit horam qua ſol erat in meridiano.

B. Pour mettre dans l'inſtruction [3]).

---

[2]*) Voir la note 2 de la p. 369 qui précède.

[1]) Les arcs PA et P1, compléments de déclinaisons, sont connus: comparez le troisième alinéa.

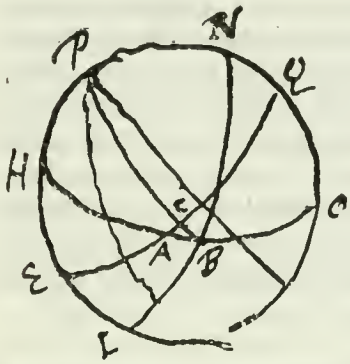
[2]) Les „casus omnes" où P2 > P1 se rapportent à quelques autres figures dans le genre de la Fig. 119.

[3]) La Pièce *B* est empruntée aux p. 20—21, datant de septembre 1668, du Manuscrit D. Comparez la p. 195 du T. XVII sur l'intention de Huygens de publier une traduction française retouchée de son „Kort Onderwijs aengaende het gebruyck der Horologien etc." de 1665 (T. XVII).

Il faut dans le vaiſſeau ſuſpendre les horologes dans la chambre du Capitaine ou autre lieu commode qui ſoit bien ſec et les defendre autant qu'on peut de la pouſſiere ſans avoir egard que ce ſoit pres du grand maſt ou non puiſqu'on a veu par experience que la difference pour le mouvement n'eſt pas conſiderable.

Puis que l'anneau graduè ne peut pas ſervir, ni l'arbaleſte ordinaire avec aſſez d'exactitude, il faudra faire un quartier Anglois [4]) ſelon les avis qu'en donneront de Combe [5]) et la Voye [6]). Mais il faudra ſe ſervir le plus qu'on peut du coucher et lever du ſoleil, parce que ces obſervations ſont incomparablement plus certaines que toutes celles qu'on ſcauroit faire avec les inſtruments [7]). Si on peut avoir le lever et le coucher en un jour l'on s'en peut ſervir ſans aucun calcul d'heure par les triangles. Mais ſi l'on n'a que l'un ou l'autre, l'on ſupputera l'heure du coucher ou lever par la declinaiſon du ſoleil connue et par la hauteur meridiene qu'on ne doibt pas manquer d'obſerver et qui ſe prend aſſez preciſement. Ce calcul ſe fait par le triangle rectangle BCA [Fig. 120], dont l'angle C que fait le meridien [8]) PB (paſſant par B lieu du ſoleil) fait [ſic] avec l'Equateur EQ. Et l'angle BAC eſt la hauteur meridiene du

[Fig. 120.]



[4]) D'après une note à la p. 334 de l'édition de 1880 des „Voyages and works of John Davis the Navigator" (London, Hakluyt Society"): „The back staff, invented by Davis, was the forerunner of Davis's quadrant, called by the French „Quartier Anglais". Ces instruments servent à mesurer la hauteur du soleil en lui tournant le dos. L'ouvrage „The Seamans Secrets" par John Davis parut en 1594: il n'existe aujourd'hui, paraît-il, que des exemplaires de la deuxième édition de 1607 (London, Th. Dawson). À la p. 334 nommée (les „Seamans Secrets" occupent les p. 229—337) on trouve une figure représentant l'instrument primitif. Le „quartier anglais" est représenté à la p. 356 du Vol. I de l'ouvrage „Early Science in Oxford" par R. T. Gunther (Oxford, printed for the subscribers, 1923). On peut le voir à Leiden dans le „Ned. hist. natuurw. Museum". Il est représenté aussi, sous une forme légèrement différente, à la p. 14 de l'ouvrage de W. J. Blaeu „De groote Zeespiegel, inhoudende een korte Onderwijsinge in de Konst der Zeevaert etc." (Amsterdam, J. Blaeu, MDCLV). Blaeu l'appelle „omgekeerden Graedboogh ofte dubbelden dryhoeck..... daer van den eenen 60 en den anderen 30 graden begrypt".

Dans son „Kort Onderwijs" de 1665 Huygens ne fait pas encore mention de cet instrument: comparez le deuxième alinéa de la p. 197 du T. XVII. Voir les Additions et Corrections à la fin du présent Tome sur quelques figures de Huygens relatives à ce sujet qu'on trouve plus loin.

[5]) Il s'agit sans doute de „de Combes" mentionné aussi par Huygens en février 1668 (voir la note 1 de la p. 24 qui précède). À la p. 223 du Manuscrit F, datant de 1685 ou 1686, on trouve quatre noms parmi lesquels figure celui de „Francois de Combe". Il paraît probable que le prénom était en effet François et non pas Francesco (p. 614 du T. VI).

[6]) Voir la Pièce *C* qui suit.

[7]) Comparez la note 2 de la p. 218 du T. XVII.

[8]) Lisez: „cercle de déclinaison". Il faut pourtant remarquer que, du moins en anglais, le mot

ſoleil [1]) ou le complement de la hauteur du Pole. Et le coſtè CB la declinaiſon du ſoleil [1]). d'ou l'on calcule le coſtè AC, arc de l'equateur. lequel on adjoute à 90 degr. quand les jours ſont plus longs que de 12 heures, ou on l'oſte des mesmes 90 deg. quand les jours ſont plus courts que de 12 heures. Et on convertit cette ſomme ou difference en heures. diſant . . . . . [2]).

On pourroit avoir des tables pour les heures du lever et du coucher du ſoleil dans toute l'annee et pour toutes elevations de pole de degrè en degrè.

Pour ajuſter les horologes quand le vaiſſeau eſt a la rade ou au port, il ne faut pas porter les horologes a terre. parce qu'en les remettant dans leur boetes pour les raporter au vaiſſeau on doit apprehender que tous ces remuemens ne les alterent et que les ſuſpendant dans le vaiſſeau elles [3]) ne conſervent preciſement la meſme meſure qu'ils [3]) avoient ſur terre. Il vaut donc mieux de les laiſſer ſuſpendues [3]) dans le vaisseau, et d'aller obſerver ſeulement a terre quelque azimut d'eſtoile fixe par des filets, ou quelque coin de maiſon, avec un point fixe d'ou l'on regarde [4]), et a l'inſtant que l'eſtoile y joint faire ſigne [5]) avec du feu ou par un coup de piſtolet ou de mouſquet a celuy qui regarde l'horologe dans le vaiſſeau afin qu'il marque l'heure qu'elle montre. et le lendemain ou quelques jours apres ayant fait la meſme obſervation avec la meſme eſtoile l'on connoiſtra la difference journaliere de l'horologe, comme il eſt dit dans l'inſtruction [6]).

Quand on ne ſcauroit pas preciſement la difference journaliere des horologes, il ne faut pas laiſſer de faire les obſervations des Longitudes parce qu'on pourra par apres rechercher cette difference journaliere et redreſſant par la les obſervations precedentes voir l'effet des horologes et meſme les veritables differences de Longitude des terres qu'on aura rencontrees.

„meridian" a parfois un sens plus général. Davis p.e. à la p. 293 de l'ouvrage cité dans la note 4, appelle „Eclipticall Meridian" un grand cercle quelconque passant par les pôles de l'écliptique.

[1]) ∠ BAC, complément de la hauteur du pôle, représente la hauteur méridienne du soleil non pas dans le cas considéré dans la Fig. 120, mais dans celui où le soleil se trouve dans l'équateur. Il est évident qu'il ne s'agit pas ici d'une erreur, mais seulement d'une expression peu heureuse. CB est la déclinaison du soleil de la figure.

[2]) Phrase inachevée. On obtient ainsi l'heure de l'horloge correspondant au temps où le soleil se trouvait dans le méridien.

[3]) Chez Huygens le mot „horologe" est généralement féminin: mais il n'en est pas toujours ainsi de son temps; voir p. e. les p. 420 du T. II, 399 du T. III (lettres de P. Petit) et 193 du T. XVII.

[4]) Comparez les p. 106—109 qui précèdent.

[5]) Comparez, à la p. 501 du T. VI, le huitième alinéa de la Piece *C* qui suit.

[6]) Voir la p. 208 du T. XVII, où il est toutefois question d'une détermination de la différence journalière d'une horloge par l'observation du soleil et non pas par celle d'une étoile fixe.

C. Sur l'Essay des Horologes sur mer par la Voye dans le vaisseau de M. de Beaufort au voiage de Candie en 1669 [7]).

[Voir les p. 501—503 du T. VI].

D. Om te weten hoeveel de dampheffing den opgangh der sonne verhaest of den ondergang verachtert [8]).

Den schrijver van 't Journael heeft de sons center sien opgaen den 9 Julij 1669 als het horologe wees op 2 uren 56′.6″.

En op den 19 Julij daer nae weder het sons center sien opgaen ten 2 uren 52′.28″. Het uren getal der horologien is dan 3′.38″ min als 10 dagen, dat is 9 daghen 23 uren 56′.22″. waer af getrocken het vereffeningh getal van den 9 Jul. dat is 11′.0″ en weder bij gedaen dat van den 19. Jul. te weten 9.58, soo vind men 9 dagen. 23 uren 55′.20″. Dit moet nu gelyck wesen (indien 't horologie wel gestelt was) aen het uren of tijdtgetal der sonne tusschen de twee observatien verloopen. 't Welck aldus gevonden werdt. De bereeckende ure der sons middelpunts opgang den 9 Julij was ten 4 uren 50′ 38″. waer af treckende 2′.54″ die de dampheffing den opgangh doet verhaesten, soo was de sightbare opgangh des centers ten 4 ur. 47′44″ [9]).

Wederom den 19 Jul. was des sons middelpunts berekende opgangh ten 4 ur. 56′2″. waer af treckende 2′.54″ voor de verhaesting der opgangh door de dampheffing komt de sichtbaere opgangh des centers ten 4 ur. 53′.8″. Hier af nu getrocken de voorgaende 4 ur. 47′.44″, soo komt voor het tijdtgetal der sonne tusschen de twee observatiën boven de 10 dagen, noch 5′.24″. Maer het tijdtgetal van 't horologie was gevonden 9 dag. 23 ur. 55′.20″ soo is dit minder als der sonne tijdtgetal om 10′.4″. dat is de daghelijcksche verachteringh der horologie $1'\frac{4''}{10}$. men konde de 2′54″ van de verhaesting der sonnen opgangh beijde de dagen achter laten. maer niet indien men den tijdt genomen hadt van een opgangh der sonne tot een ondergangh.

De getallen onder malkander te stellen [10]).

---

[7]) La Pièce *C* a été tirée du Manuscrit D (p. 226—227, datant de septembre 1669).

[8]) Traduction: „Pour savoir combien l'élévation apparente due aux vapeurs avance le lever ou retarde le coucher du soleil".

La Pièce *D*, comme la Pièce *C*, contient des remarques de Huygens sur le rapport de de la Voye que nous ne possédons plus. Elle est empruntée à la p. 215 du Manuscrit F. La p. 209 date du 20 octobre 1685 et la p. 227 du 5 mai [1686]; comparez la note 10.

[9]) En marge: men kan seggen, de berekende en door de dampheffing gecorrigeerde ure des opganghs was &c.

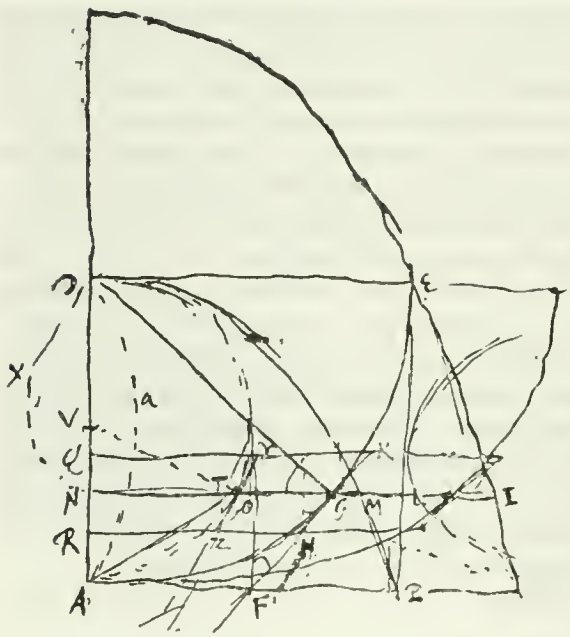
[10]) Voir la p. 61 du T. IX. En 1686 — comparez la note 8 — Huygens se servit, comme on voit, de quelques données du rapport de de la Voye dans la composition de la nouvelle Instruction de cette année (T. IX, p. 55—76). On trouve plus loin dans le présent Tome la traduction d'une partie de cette Instruction; voir les Additions et Corrections.

APPENDICE II

À LA PARS PRIMA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1659—1693 ou 1694]

[Fig. 121.]



A. [1]) Quæritur tempus per quadrantem Circumferentiæ circuli, quod dubito an inveniri possit.

Ut AT ad GF [Fig. 121] ita faciendum YZ ad aliam quæ erit tempus per KH, sed ut AT ad GF ita IN ad NL [2]).

Ratio temporis per KH ex EG ad tempus per QR cum motu æquabili dimidio ex DA [3]) componitur ex rationibus KH ad QR et $\frac{1}{2}$AP ad MN [4]), hoc est ex DG sive LN ad NG et $\frac{1}{2}$AP ad MN, hoc est eam quam $\frac{1}{2}$qu. AP ad ▭ MNG.

NG $\sqrt{aa - xx}$

MN $\sqrt{ax}$

▭ MNG $\sqrt{a^3x - ax^3}$

tempus per QR ——— tempus per KH

$$\sqrt{a^3x - ax^3} \text{ ——— } \tfrac{1}{2}aa \text{ ——— } a/y$$

$$\frac{\frac{1}{2}a^3}{\sqrt{a^3x - ax^3}} \infty\, y \text{ [5])}.$$

[1]) Chartæ Mechanicæ f. 73 verso, datant de décembre 1659. Consultez sur la f. 73 recto et verso les notes 1 et 4 des p. 392—393 du T. XVI. Nous n'avons pas reproduit en cet endroit le calcul de la p. 73 v. disant que Huygens ne trouva que plus tard une solution approchée pour le „tempus per quadrantem circumferentiæ". Ce n'est en effet que dans l'„Hor. osc." qu'on trouve la valeur numérique approchée 34 : 29 (inférieure à la vraie valeur) du rapport de la période d'une oscillation de 180° du pendule simple à la période de l'oscillation extrêmement petite du même pendule (voir la note 2 de la p. 101 qui précède). Evidemment ce rapport ne pouvait être déterminé avant que, dans ce même mois de décembre, la règle qui donne la formule de la période de l'oscillation extrêmement petite avait été trouvée (T. XVI, p. 410). Pour trouver ensuite le rapport 34 : 29 Huygens peut s'être servi (voir la note 2 de la p. 378) de l'équation $y = \frac{\frac{1}{2}a^3}{\sqrt{a^3x - ax^3}}$ de la f. 73 v. Il est intéressant de savoir que cette formule qu'on retrouve dans la Pièce *C* de 1669 qui suit, a déjà été trouvée par lui en 1659 au début de ses recherches sur ce sujet.

[2]) Nous conservons ce début quoique Huygens n'ait pas poursuivi ce calcul. Dans la proportion AT : GF = YZ : tempus per KH, il est évident que par „YZ" il faut entendre „tempus per YZ". La très petite droite KH est sans doute supposée parcourue avec la vitesse provenant d'une chute de E en G. Or, de quelle hauteur au-dessus de T Huygens suppose-t-il tombé le point pesant qui parcourt la petite droite YZ? En partant de la proportion du texte on constate, en faisant le calcul, que, pour toute position de T, le point de départ est situé à une hauteur $\frac{1}{4}$AD ou $\frac{1}{4}a$ au-dessus de lui. En d'autres termes: la demi-circonférence DTA est parcourue avec la vitesse constante $\frac{1}{2}ag$ (où g est l'accélération de la pesanteur), c.à.d. avec la moitié de la vitesse qui proviendrait d'une chute suivant DA.

La proportion AT : GF = IN : NL sert à introduire ensuite la grandeur constante NL ou a au lieu de la variable AT pour toute position du point G. La considération de la figure conduit à la relation AT : GF = $\sqrt{a(a+x)} : a$, où x = DN. Pour que $\sqrt{a(a+x)} : a$ = IN : a, il faut que les points I soient situés sur la parabole de la figure, qui passe par le point E et dont la distance du sommet au point D est égale à a.

On a maintenant: tempus per KH $= \frac{a.\text{YZ}}{\text{IN}}$ (où YZ désigne toujours le „tempus per YZ"), où le numérateur est constant lorsque tous les „arcs" YZ qui „composent" la demi-circonférence DTA sont pris égaux entre eux. Pour trouver le temps qui correspond à la chute le long de EA il faudrait intégrer l'expression trouvée pour toutes les valeurs de IN de a à $a\sqrt{2}$. Ce qui rend cette intégration, même approchée, difficile ou impossible, c'est que les éléments YZ ne se trouvent pas sur une droite mais sur une circonférence.

Observons que la demi-circonférence DTA réapparaît dans les démonstrations des propositions se rapportant à la chute cycloïdale; voir les p. 406 et suiv. du T. XVI et les figures de la Pars Secunda de l'„Hor. osc.".

[3]) De nouveau Huygens compare le mouvement accéléré suivant le quart de circonférence EKA avec un mouvement uniforme, mais cette fois il a soin de prendre ce dernier suivant une droite. Comparez sur le résultat du calcul la pièce *C* qui suit (note 1 de la p. 378).

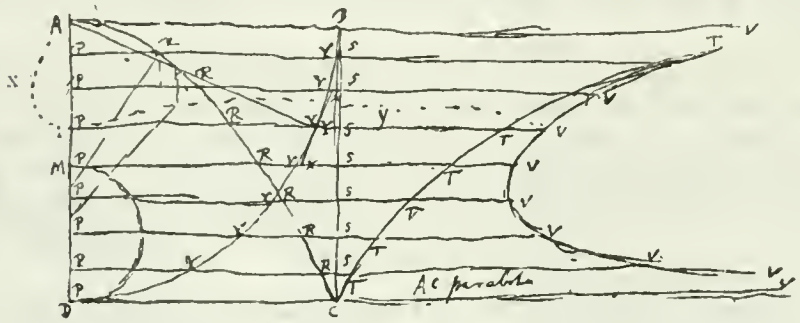
[4]) La ligne DMP est la parabole qui donne les vitesses. Comparez la Fig. 7 de la p. 398 du T. XVI. La vitesse constante le long de QR est à la vitesse accélérée en G comme $\frac{1}{3}$AP : MN.

[5]) Le temps nécessaire pour parcourir un élément QR, qui est constant lorsque tous les élements QR sont égaux entr'eux, étant représenté par la grandeur constante, d'ailleurs arbitrairement choisie, a, le temps nécessaire pour parcourir l'élément KH correspondant à QR aura la valeur y du texte.

B. [1]) De deſcenſu accelerato gravium. Hypotheſes. De compoſito motu. Theorema Galilei exactè demonſtratum. Aliud de aſcenſu. De æquali aſcenſu et deſcenſu. Eadem ſuper planis contingere &c. quæ de deſcenſu ſuper planis, et curvis ſuperficiebus, et de curva Cycloide. De motu pendulorum. Circularem non eſſe iſochronum contra Galilei et multorum opinionem, difficilem eſſe determinationem temporis per quadrantem circuli et arcus minores. quænam ſit proxima. Quænam ex motu per ſuperficies applicentur motui penduli circularis. Pendulum Cycloidicum. Proprietas evolutionis ad Theoremata de Evolutione et dimenſione curvarum remittitur.

C. [2]) De tempore deſcenſus per arcum quadrantis circumferentiæ.

[Fig. 122.]



AC [Fig. 122] parabola.

PR, PS, PT proportionales.

Item PY ad PS ut PT ad PV. Erit tempus per quadrantem BD ad tempus accelerati motus per AD [3]) ut ſpatium infinitè extenſum AVVVDA ad ſpatium infinite extenſum ATTCDA, hoc eſt ad duplum quadratum ABCD.

---

[1]) La Pièce *B* est empruntée à la p. 224 du Manuscrit D datant de septembre 1669 (la p. 225 porte la date du 29 septembre). En ce mois Huygens s'apprêtait donc à rédiger définitivement les théorèmes de la Pars Secunda sur le mouvement des corps tombants dont il s'était occupé aussi en 1659 (p. 125—141 du T. XVII). Les p. 222—223 du Manuscrit D contiennent des projets de rédaction de quelques théorèmes sur la chute que nous ne reproduisons pas. Nous plaçons la pièce *B* dans un Appendice à la Pars *Prima*, parce qu'il y est c. a. question de la détermination du „tempus par quadrantem circuli", comme dans les Pièces *A*, *C*, *D* et *E*.

[2]) La Pièce *C* est empruntée à la p. 68 v. du Manuscrit G, datant d'un des trois premiers mois de 1691.

[3]) Contrairement à ce qu'il avait fait en 1659 (p. 375, note 3). Huygens compare ici (voir la suite du texte) les temps nécessaires pour parcourir les éléments du quart de circonférence BD avec les temps dans lesquels les éléments correspondants de la droite verticale AD sont parcourus d'un mouvement *accéléré* par un point qui tombe de A. Il est évident que la formule qui donne le rapport du temps suivant BD au temps suivant AD devient néanmoins la même.

Si enim DC referat celeritatem qua infima PP percurritur, referet MR celeritatem qua percurritur MI.

Tempus autem per infimum PP ad tempus per IM ut MR ad DC, nempe in ratione contraria celeritatum. Ergo tempora ut DC ſeu MS ad MT. Hinc ſingulæ TP ad ſe invicem ut tempora motus accelerati ex A per ſingulas lineas PP iſtis ſpatijs reſpondentes. Tempora autem per ſingulos arcus YY ſunt ad tempora illa per ſibi reſpondentes PP ut ipſæ ſingulæ YY ad ſingulas PP longitudine, hoc eſt ut ſingulæ reſpondentes SP ad YP ut facile oſtenditur; hoc eſt ut ſingulæ reſpondentes VP ad TP. Hinc per propoſ. 2. Archimedis de Conoidibus et Sphæroidibus [4]) erunt omnia ſimul tempora per lineas PP, hoc eſt tempus motus accelerati per AD ad tempora omnia per arcus YY, hoc eſt ad tempus per arcum BD ut omnes TP ad omnes VP. hoc eſt [5]) ut ſpatium infinitum AVVDA ad ſpatium infinitum ATTCDA, ſeu 2 quadratum ABCD[6]).

PR	PS	PS	PT
$\sqrt{ax}$	a	a	$\frac{aa}{\sqrt{ax}}$

PY	PS	PT	PV
$\sqrt{aa-xx}$	a	$\frac{aa}{\sqrt{ax}}$	y

$$y\sqrt{\ .\ } \infty \frac{a^3}{\sqrt{ax}}$$

. . . . . .

$$y \infty \frac{a^3}{\sqrt{ax}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$y \infty \sqrt{\frac{a^5}{aax-x^3}}$$

---

[4]) Voir la note 1 de la p. 179 qui précède.

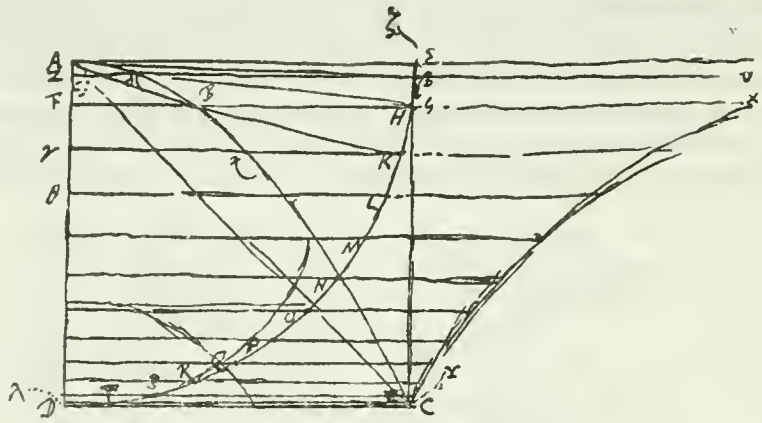
[5]) Huygens considère ici le rapport inverse, savoir celui du „tempus per arcum BD" à celui du „tempus motus accelerati per AD".

[6]) La courbe CTTT est une hyperboloïde. Son équation $y^1 x^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ permet de déterminer, d'après la méthode de Huygens de 1657 (note 8 de la p. 289 du T. XIV) le rapport de l'aire ABCD à l'aire BTTC. Puisque p (note nommée) a ici la valeur 1 et q la valeur $\frac{1}{2}$, on a $p-q:q=1:1$, c.à.d. les deux aires sont égales, en d'autres termes: le „spatium infinitum [c.à.d. l'espace s'étendant jusqu'à l'infini] ATTCDA" est égal au double du carré ABCD.

Oporteret hujus curvæ quadraturam dari [1]).
Stanni folium ſpecularis incidatur et pondus comparetur [2]).

D. [3]) Ad computanda tempora deſcenſus per arcus circumferentiæ [4]).

[Fig. 123.]



---

[1]) Le résultat du calcul est donc (lorsqu'on introduit le symbole de Leibniz $\int$):
tempus per arcum BD [Fig. 122]: tempus motus accelerati per AD =

$$\int_0^a \sqrt{\frac{a^5}{aax - x^3}}\, dx : 2a^2.$$

En 1659 (Pièce *A*) Huygens avait trouvé (sans toutefois se servir du symbole Σ d'Euler):

$$\text{tempus per arcum BD} = \Sigma \frac{\frac{1}{2}a^3}{\sqrt{a^3x - ax^3}} \text{ ou } \Sigma \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5}{aax - x^3}}.$$

Comme le temps nécessaire pour parcourir du mouvement uniforme considéré l'élément QR de la Fig. 121 était réprésenté par a (p. 375, note 5), le temps nécessaire pour parcourir la droite entière DA était $\frac{a^2}{\text{QR}}$. Ce temps est égal, d'après l'hypothèse faite pour la grandeur de la vitesse constante, à celui de la chute accélérée suivant DA. On a donc:
tempus per arcum BD: tempus motus accelerati per AD =

$$= \Sigma \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5}{aax - a^3}} : \frac{a^2}{\text{QR}} \qquad = \Sigma\, \text{QR}.\sqrt{\frac{a^5}{aax - x^3}} : 2a^2.$$

ce qui s'accorde avec le résultat du calcul de 1691 (début de la présente note).

[2]) Est-ce pas un pesage de ce genre que Huygens avait trouvé entre 1659 et 1673 la valeur approchée 34 : 29 (note 2 de la p. 101) du rapport en question? Nous ne le pensons pas, puisqu'il

§ 1. AF ∞ c [Fig. 123].
AD ∞ a ∞ latus rectum parabolæ ABC.
FB, FG, FX proportionales.

$$\text{FB} \infty \sqrt{ac} + \overset{\text{FG}}{a} - \overset{\text{FG}}{a} \Big/ \frac{aa}{\sqrt{ac}} \text{FX}$$ [5])

cujus igitur logarithmus eſt 2 log. a — $\frac{1}{2}$ log. a — $\frac{1}{2}$ log. c ſive $\frac{3}{2}$ log. a — $\frac{1}{2}$ log. c. $\frac{3}{2}$ l. a — $\frac{1}{2}$ l. c ∞ l. temporis per EG [6]), celeritate ex AF; ſive rectæ FX.
$\zeta\beta$ eſt ∞ $\frac{1}{4}$ arcus EH [7]).
$Z\delta$. $Z\beta$. ZV proportionales [8]).

Erit ZV pauxillo brevior tempore per EH quia eſſet æqualis tempori per rectam perpendicularem æqualem EH arcui ſeu per quadruplam Eβ. ſed poteſt ſumi tanquam æqualis [9]).

---

propose ici une méthode pratique qui ne pouvait pas servir pour obtenir, comme il le dit dans l'„Hor. osc.", une valeur du rapport „aussi proche qu'on voudra". Il s'agissait donc probablement avant 1673 d'un calcul approché de la surface représentée par l'intégrale de la note 1, à moins que Huygens n'ait suivi déjà en ce temps la méthode de la Pièce *E* qui suit ou une autre méthode que nous ne connaissons pas. Voir encore la note 2 de la p. 384 qui suit.

3) Manuscrit I, p. 100 et suiv. De ces deux pages la première date de 1693 ou 1694 suivant la place qu'elle occupe dans le Manuscrit. L'autre est le recto d'un feuillet collé dans le livre. La division en §§ est de nous.

4) En marge: „Vide lib. G. pag. 34. 1". C'est la page, numérotée par Huygens, que nous avons désignée par 68 verso (p. 376, note 2).

5) FX correspond donc à PT (ou MT) de la Fig. 122 de la Pièce *C*; x de la Fig. 122 s'appelle maintenant c.

6) En disant que la droite FX représente le „tempus per EG" Huygens considère cette droite comme une partie d'une surface. C'est en effet la bande découpée par deux horizontales de la surface XCDAX (Fig. 123, laquelle s'étend jusqu'à l'infini vers le côté droit), qui représente le temps d'une chute verticale suivant la largeur de cette bande. À droite la bande est limitée par une partie de la courbe CX et dans le cas du „tempus per EG", où EG est le premier élément de la verticale, la bande s'étend jusqu'à l'infini. Dans la Pièce *C* Huygens disait que la surface considérée est *proportionnelle* au temps. Ici il l'égale au temps. Un peu plus loin, il dit de même que le temps du mouvement accéléré suivant AD est *égal* au double du carré AC. Il est évidemment plus correct de dire que la droite FX représente non pas un temps mais l'inverse d'une vitesse.

7) L'élément $\zeta\beta$ (où le point ζ est identique avec le point E) est un élément de la *verticale* dont la longueur est égale par hypothèse à $\frac{1}{4}$ de *l'arc* EH.

8) Dans la Fig. 123 V est donc situé sur la courbe CX.

9) Huygens se propose apparemment de chercher une valeur approchée du temps nécessaire pour parcourir le quart de circonférence ED du mouvement accéléré tel qu'il a lieu en réalité; à cet effet il divise le quart de circonférence en 12 arcs égaux et suppose chacun d'eux parcouru

Porro incipiendo ab FX et finiendo in DC, ſumma applicatarum eſt minor tempore per quadrantem ED. ſi nempe ducatur in EH arcum [1]).

Sed incipiendo ab ZV et finiendo in λY ſumma applicatarum erit major tempore per eundem quadrantem ED. ducta nempe in arcum EH [2]).

AF, Aγ, Aθ &c. ſunt ſinus angulorum EAH, EAK &c.

Tempus motus accelerati per AD erit ∞ 2 quad. AC.

Ratio horum eſt, quia ſi arcus EH ponatur peractus æquabili celeritate quanta ex altitudine EG, vel per EH, acquirit, quam refert FB applicata in parabola AC, ſumetur tempus vero brevius. Item ſi pro tempore deſcenſus continuati per HK ſumatur illud quo HK percurreretur celeritate æquabili quanta ex EK, quam refert γz, rurſus ſumitur tempus vero brevius.

quia autem arcus æquales ponuntur, erunt tempora quibus percurri ponuntur in ratione contraria celeritatum, hoc eſt ut applicatæ in curva CX, ad rectam AD.

§ 2. Ponatur primo quadrantis arcus ED diviſus in 10 partes æquales [3]).

Ergo AF ∞ ſin 9. gr.

AF ∞ 1564345 cujus log. 9.1943324

4.5971662 $\frac{1}{2}$ log. *c*.

---

avec une vitesse constante. La droite verticale égale à l'arc EH dont il est question dans la note 7 est parcourue dans un même temps, soit qu'on considère le mouvement accéléré naturel, soit qu'on suppose cette droite verticale parcourue avec la vitesse constante qui résulte de la chute verticale le long de $E\beta = \frac{1}{4}EH$. C'est ce temps-là que Huygens désigne par „ZV" quoiqu'en réalité (comparez la note 6) il soit égal à l'aire de la bande limitée par les horizontales AE (de longueur infinie) et ZV. Le „tempus per EH", c.à.d. le temps dans lequel l'arc EH est parcouru dans le mouvement réel, est évidemment, comme le dit le texte, tant soit peu plus long que le temps nécessaire pour parcourir la verticale égale à EH.

[1]) On obtient une limite inférieure pour le temps de la chute le long de HD en supposant chacun des 12 arcs égaux, dans lesquels HD est divisé, parcouru avec la vitesse finale telle qu'elle est en réalité pour cet arc. Pour chaque arc le temps est alors égal au produit de EH par l'„applicata", c.à.d. par l'horizontale se terminant à la courbe CX qui passe par le point le plus bas de l'arc considéré. La limite inférieure totale est donc égale au produit de EH par la somme des horizontales de FX à DC.

[2]) On obtient une limite supérieure pour le temps correspondant aux 11 derniers arcs en les supposant parcourus avec la vitesse initiale. Il faut encore y ajouter le temps du premier arc. La suite du texte donne d'ailleurs l'explication exposée dans les notes 1 et 2.

Il est vrai que pour le premier arc la valeur trouvée était inférieure au vrai temps, de sorte que, lorsqu'on ajoute cette valeur à la limite supérieure obtenue pour les 11 arcs suivants, il n'est pas rigoureusement démontré qu'on obtient encore une limite supérieure du temps nécessaire pour parcourir le quart de circonférence. Mais Huygens avait dit que la valeur trouvée pour le premier arc diffère sans doute très peu de la vraie valeur.

[3]) Le § 2 a peu d'importance puisque Huygens retourne au §3 à la division du quart de circonférence en 12 parties, conformément à la Fig. 123.

10.0000000
5.0000000

15.0000000 ∞ $\frac{3}{2}$ log. a
4.5971662

10.4028338 l. 25280000000 ∞ FX [4]). 252800 FX, cum AD 100000 [5]).

§ 3. Sit arcus quadrantis ED divisus in 12 partes æquales.

Ergo AF ∞ sin 7°30′. cujus log. 9.1156977

4.5578488
15.0000000 [6])

10.4421512 l. 276800 (1).

	AG ∞ sin 15°			AΘ ∞ sin. 22.30′	
log.	9.4129962			9.5828397	
	4.7064981			4.7914198	
	15.0000000			15.0	
	10.2935019	l. 196600 (2)		10.2085802	l. 161600 (3)
30°.	9.6989700		37°30′.	9.7844471	
	4.8494850			4.8922235	
	15.			15.	
	10.1505140 [7])	l. 141300 (4)		10.1077765	l. 128200 (5)
45°.	9.8494850		52°30′.	9.8994667	
	4.9247425			4.9497334	
	15.			15.	
	10.0752575	l. 118900 (6)		10.0502666	l. 112300 (7)

---

[4]) D'après la formule $\frac{3}{2}$ log. $a - \frac{1}{2}$ log. c = log. temporis . . . . du § 1.

[5]) Quoique le rayon ait la longueur 10^5, le calcul de FX (note 4) a eu lieu comme si la longueur du rayon était 10^{10}.

[6]) La remarque de la note précédente s'applique aussi au calcul de AF et des horizontales suivantes. Mais dans la valeur finale obtenue pour chacune de ces lignes Huygens omet à bon droit les 5 zéros qu'il avait écrit dans la valeur de FX du § 2.

[7]) Le nombre est plus près de 10.1505150 que de 10.1505140, mais Huygens prend cette dernière valeur puisqu'il s'agit de trouver une „summa minor". Une remarque analogue s'applique à plusieurs autres nombres. Une somme plus exacte ne peut évidemment être obtenue que lorsqu'on tire de la table des logarithmes une valeur plus exacte pour chaque nombre séparément.

60°.	9.9375306		67.30'.	9.9656153	
	4.9687653			4.9828076	
	15.....			15.....	
	10.0312347.	107400 (8)		10.0171924.	104000 (9)
75°.	9.9849438		82.30'.	9.9962686	
	4.9924719			4.9981343	
	15.....			15.....	
	10.0075281.	101800 (10)		10.0018657.	100400 λY (11)

per 4 $\frac{13052}{3263.}$ [1])

fit 3263. l. 8.5136171
4.2668085
15.....
10.7331915 l. 541400 ZV

7 ——— 11 ——— 100000 / 157143

13095 ∞ $\frac{1}{12}$ quadrantis.

276800 FX
196600
161600
141300
128200
118900
112300
107400
104000
101800
100400
100000 DC
1649300 ſumma minor
276800 FX } s. [3])
1372500 } s.
DC 100000 }
1272500 } ad.
541400 ZV }
1813900 ſumma major [4])

1649300
13095
.....
21597583500 [2])

1813900
13095
.....
23753020500 ——— 20000000000

E. [5])

2768	13095
5536 2	20031
2290	.....
1770	262305945 — 200000000 ratio pauxillo minor quam temporis per quadrantem circumferentiæ ad tempus defcenfus perpendicularis per radium.
1510	
1345	
1230	
1145	
1095	
1055	
1032	
1018	
1005	
20031	

ratio temporis per radium ad tempus ofcillationis minimæ, eadem quæ lateris quadrati in circulo ad arcum quadrantis.

113 — $177\frac{1}{2}$ — 10000 / 15708

141420 — 15708 — 200000000 / 22214

2623 — 2222 ratio minor quam temporis per quadrantem circumferentiæ ad tempus ofcillationis minimæ. Sed antehac experienti videbatur mihi effe proxime quæ 12 ad 11, non 13 ad 11 ut hic.

34 — 29 — 2623 — 2222

29	34
.....	.....
76067	75548

10000 — 14142 — 20000

2

28284

2623 — 2828

2623 — 2221 — 13 — 11

/ $11\frac{20}{2623}$

13 — 14 ratio prox. temporum per arcum quadrantis et per arcus fubtenfam.

---

[1]) D'après ce qui a été dit à la p. 379 (note 7) il faut, pour calculer ZV (inverse d'une vitesse),

prendre la longueur c égale à $\frac{1}{4}$ de l'arc EH lui-même. Il n'est donc pas évident pourquoi Huygens prend le nombre 13052 au lieu de 13095. Apparemment il prend $\frac{1}{4}$ de la projection de l'arc EH sur la verticale, c.à.d. du sinus de 7°30′, ce qui fait d'ailleurs bien peu de différence. Les mots „sit 3263" indiquent qu'il ne s'agit pas d'une erreur, mais qu'il croyait pouvoir se contenter de cette valeur de ZV. Comme on voit, il n'a calculé qu'ensuite (en prenant $\pi = \frac{22}{7}$) la longueur 13095 de l'arc EH.

2) C'est le produit de la „summa minor" par la longueur de „$\frac{1}{12}$ quadrantis". C'est donc (note 1 de la p. 380) la limite inférieure cherchée du temps d'une chute le long du quart de circonférence, le temps de la chute le long de la verticale étant représenté (note 6 de la p. 379) par 2.10^{10}. Mais ce dernier temps est à celui d'une demi-oscillation simple le long d'un très petit arc dans le rapport $\sqrt{2} : \frac{1}{2}\pi$ (comme Huygens le dit dans la Pièce *E*). Le rapport cherché est donc $2159758350 0 : 2.10^{10} \times 2 : 2.22145$ ou $2.15976 : 2.22145 =$ **0.97.** En d'autres termes: cette limite inférieure n'est d'aucun usage puisqu'elle est même inférieure à l'unité. Avant 1673 Huygens avait trouvé la limite inférieure 34:29 ou **1.1724** beaucoup plus approchée (note 2 de la p. 378).

3) s. = subtrahendo.

4) Pour passer de la „summa minor" à la „summa major" (note 2 de la p. 380) il faut retrancher de la première la droite CD et y ajouter la droite ZV. C'est par erreur que Huygens retranche aussi la droite FX qui dans la „summa major" correspond au temps du deuxième arc d'en haut. Il aurait donc dû trouver pour la „summa major" 2090700, et par conséquent (note 2) pour la limite supérieure du rapport cherché $2.0907 \times 1.3095 : 2.22145 = 2.73777 : 2.22145 =$ **1.232.** (Le nombre erroné de Huygens donne pour cette limite du rapport la valeur $2.23753 : 2.22145 =$ **1.007** *inférieure* à la vraie valeur).

5) La Pièce *E* fait suite à la Pièce *D*. Elle occupe le verso du feuillet mentionné dans la note 3 de la p. 379.

Le calcul de la Pièce *D* ne pouvant apparemment conduire à des limites convenables à moins que la subdivision du quart de circonférence ne fût poussée beaucoup plus loin — nous trouvons en effet, que pour atteindre la limite inférieure **1.1724** d'avant 1673 (note 2) il ne suffit même pas de diviser le quart de circonférence en mille arcs égaux — Huygens chercha une autre méthode, tout en conservant la division du quart de circonférence en douze parties seulement. Il n'explique point cette méthode. La colonne des nombres qu'il additionne donne une „summa minor" (20031) beaucoup plus grande que la „summa minor" (16493) de la Pièce *D*, et la valeur 2623:2222 ou **1.18047** qui en résulte pour la limite inférieure du rapport cherché ne s'écarte pas notablement de la vraie valeur. La méthode fait donc l'effet d'être bonne. Le premier nombre de la colonne, 2768, correspondant à 276800 (FX) de la Pièce *D* — on trouve son logarithme au début du § 3 — peut évidemment être déterminé plus exactement — il deviendra un peu plus petit — et il serait sans doute également possible de déterminer exactement les autres nombres de la colonne si nous savions comment, d'après Huygens, il faut les calculer. Le nombre 13095 doit être remplacé par 13090 puisque Huygens l'a calculé en prenant $\pi = \frac{22}{7}$. On trouvera donc par cette méthode une valeur qui s'écarte quelque peu de 1.18047 et peut constituer une limite inférieure se rapprochant beaucoup de la vraie valeur 1.18033 (voir la fin de la présente note). En laissant aux nombres de la colonne leurs valeurs, mais en remplacant 13095 par 13090 et 2222 par 2221, 45 on trouve (par hasard?) pour la limite du rapport précisément **1.18033.**

Quelle peut avoir été la méthode suivie? On peut représenter graphiquement par des aires

les 12 quantités qu'il s'agit de sommer en écartant la première horizontale ainsi que les horizontales FX.... DC de la Fig. 123 l'une de l'autre à des distances égales entre elles (savoir des distances de $\frac{1}{12}$ quadrantis). Pour trouver une forme de plus en plus exacte de la courbe déformée XC il faudrait pousser la subdivision plus loin et prendre toujours des distances égales entre chaque paire d'horizontales correspondant aux extrémités d'arcs égaux dans la Fig. 123. La courbe XC restera partout concave, puisque plus la partie considérée de la courbe est petite, plus aussi la déformation est uniforme.

Dès lors il est facile de trouver une limite *supérieure* pour les 11 dernières quantités: il suffit de remplacer la courbe XC déformée par une droite brisée, de sorte que toutes les horizontales conservent leurs longueurs et que chacune des 11 quantités est représentée par un trapèze. On trouve ainsi, en partant des valeurs de la Pièce *D*, les 11 quantités

2367
1791
1514½
1347½
1235½
1156
1098½
1057
1029
1011
1002

presque toutes supérieures aux quantités correspondantes de Huygens (les trois dernières seulement sont inférieures) et dont la somme 14609 n'est pas beaucoup plus grande que la somme correspondante, 14495, de ses quantités à lui. Pour obtenir la somme 14609 il suffit d'ailleurs de prendre le nombre 12725 de la colonne de la Pièce *D* et d'y ajouter $\frac{1}{2}$ (2768 + 1000) ou 1884.

Pour trouver une limite *inférieure* pour les 11 dernières quantités on pourrait limiter chaque trapèze non pas par une corde de la courbe FX déformée, mais par une tangente à cette courbe, de sorte que l'une des horizontales qui limitent le „trapèze" est quelque peu raccourcie (ou bien que les deux horizontales soient raccourcies, si le point de contact choisi ne se trouve pas sur une d'elles, mais entre elles). Ce n'est pas là cependant la voie suivie par Huygens puisque de cette façon les rrois dernières quantités trouvées par lui devraient, comme les autres, être inférieures à celles que nous venons de calculer.

Quant à la première quantité Huygens prend apparemment pour une limite du temps cherché le *double* du produit de FX par $\frac{1}{12}$ quadrantis (ce qui explique peut-être l'erreur signalée dans la note 4; il est possible qu'en ce moment il était déjà d'avis qu'on peut prendre le *double* de FX dans la „summa minor"; or, s'il avait réellement pris le double, il eût fallu retrancher FX, comme il le fait, dans le calcul de la „summa major"). En effet, la bande supérieure de la figure déformée dont il est question un peu plus haut s'étend jusqu'à l'infini (comme celle de la figure non déformée) et a donc une aire beaucoup supérieure à celle du rectangle formé par FX et la droite verticale égale à $\frac{1}{12}$ quadrantis. Pour démontrer que la valeur prise par Huygens est bonne, il faudrait faire voir (comparez la Fig. 121 de la Pièce *A*):

$$\int_0^b \frac{a^3 \mathrm{d}x}{\sqrt{ax}\,\sqrt{a^2 - x^2}} > \frac{\pi a^3}{12\sqrt{a.b}}$$

où $b = a \sin 7°30'$ est la projection du premier $\frac{1}{12}$ quadrantis sur la verticale. Ou plus brièvement

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\,(a^2 - x^2)}} > \frac{\pi}{12}\,\frac{1}{\sqrt{b}}, \text{ où } b = \mathrm{k}a = 0.13053a.$$

Le développement en serie de l'intégrale donne

$$\int_0^b \left\{ \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a^3}\, x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8a^5}\, x^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{16a^7}\, x^{\frac{11}{2}} \ldots\ldots \right\} dx.$$

Il faudrait donc faire voir que

$$\frac{1}{a}\left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2a^3}\left(\frac{b^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) + \frac{3}{8a^5}\left(\frac{b^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\right) + \frac{5}{16a^7}\left(\frac{b^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2}}\right)\ldots > \frac{\pi}{12}\cdot\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}$$

ou $$2k + \tfrac{1}{5}k^3 + \tfrac{1}{12}k^5 + \tfrac{5}{104}k^7 \ldots > \frac{\pi}{12}$$

ou 0.26106 + 0.00045 .... > 0.26180, ce qui pourtant n'est pas vrai.

Mais on voit que la valeur prise par Huygens, tout en étant quelque peu supérieure à la vraie valeur, en est très rapprochée. Il est donc *possible*, quoique sa méthode nous soit inconnue, que l'ensemble de toutes les quantités qu'il considère constitue en effet une limite inférieure.

Ajoutons qu'en prenant le double du produit FX par $\frac{1}{12}$ quadrantis comme premier nombre de la „summa major", telle que nous l'avons considérée, celle-ci devient 5536 + 14609 = 20145, ce qui donne pour la limite supérieure du rapport cherché $\frac{2.0145 \times 1.3090}{2.22145} = \mathbf{1.1871}$.

Quant à la vraie valeur de ce rapport, elle est, d'après la note 1 de la p. 378,

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{2a^2}\int_0^a \sqrt{\frac{a^5}{a^2x - x^3}}\, dx \text{ ou } \frac{\sqrt{2a}}{\pi}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x\,(a^2 - x^2)}}\ ^{1)}$$

ou, en posant $x = a\,(1 - y^2)$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)\,(1 - \frac{1}{2}y^2)}}$$

ou $$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y^2 + \frac{1.3}{3.4}\cdot\frac{1}{2^2}y^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3}y^6 \ldots\right).$$

Or, on a $$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \int_0^1 \frac{y^n dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{n}{n + 1}\int^1 \frac{y^{n-1} dy}{\sqrt{1 -}}$$

Le rapport cherché s'écrit donc

$$1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{1}{8} +$$

Il est quelque peu inférieur à **1.18033** [2]).

[1]) Ou, si l'on veut,

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}.$$

[2]) On peut consulter sur ce calcul L. Euler „De Motu oscillatorio penduli cuiuscunque, dum arcus datae amplitudinis absolvit", Act. Ac. Scient. Imp. Petrop. pro Anno MDCCLXXVII, Pars Posterior, Petropoli, Typ. Ac. Scient. MDCCLXXX, p. 159—182. Euler considère plus généralement le cas où l'amplitude d'une vibration simple est 2ζ; le rapport de la période d'une oscillation à celle d'une oscillation fort petite s'écrit alors

$$1+\frac{1^2}{2^2}.c^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}c^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}c^6+\ldots,\text{ où } c=\sin.\tfrac{1}{2}\zeta.$$

Cette série a d'ailleurs déjà été trouvée sous une forme peu différente de celle d'Euler par P. P. Elvius — qui s'inspire de la méthode de Newton, exposée dans le „Tractatus de Quadratura Curvarum" de 1704, pour développer l'intégrale trouvée par lui-même indépendamment de Huygens dont il ne connaît que les ouvrages imprimés — et publiée par lui dans son travail „Theorema de oscillationibus pendulorum in arcubus circularibus" (Acta Literaria et Scientiarum Sueciæ, Anni MDCCXXXIV, Upsaliæ, Sumtibus Reg. Soc. Lit. & Scient.), après que G. Vallerius eut publié dans les Acta de 1731 son article „Observatio & Experimentum de Funependulorum Vibrationibus". Vallerius trouve e. a. pour le rapport de la période d'une oscillation de 180° à une oscillation de 20°, 225 : 189 ou **1,191**.., donc une valeur trop grande mais fort proche de la valeur véritable.

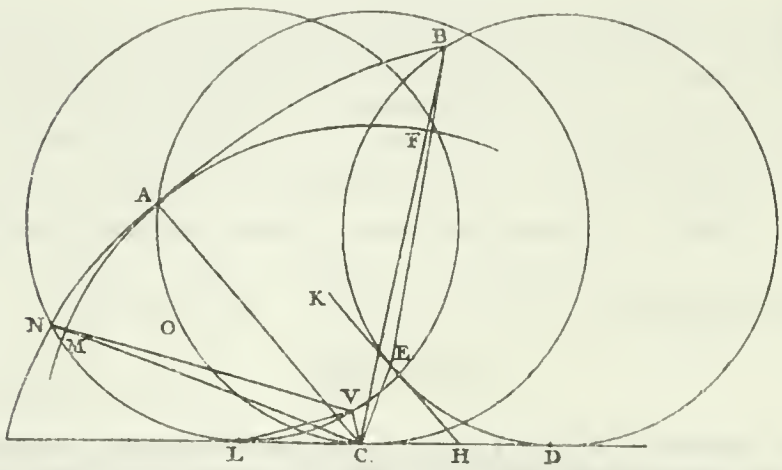
APPENDICE

À LA PARS SECUNDA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

1670.

A.[1]) *Demonſtratio propoſitionis Carteſij, de qua Schotenius in commentarijs in geometriam illius.*

[Fig. 124.]



[1]) La partie *A* de cette Pièce est empruntée aux p. 250—252 du Manuscrit D. Le texte et les figures correspondent presqu'exactement aux p. 155—157 qui précèdent, ce qui prouve, comme nous l'avons dit dans l'Avertissement (p. 36), que ces pages ont été rédigées au commencement de 1670 peu avant la maladie de Huygens. Dans ces Commentaires sur la „Géométrie" de Descartes (voir les p. 374 et 411 du T. XIV) van Schooten parle (p. 264 de l'édition de 1659) de la lettre de Descartes à Mersenne (publiée en partie en 1667 aux p. 350 et 404 du Tome III de l'édition des lettres de Descartes par Clerselier), où il est dit que la droite qui joint ce que nous appelons le centre instantané de rotation à un point de la cycloïde, ou autre courbe C, décrite par le roulement d'une figure sur une ligne droite, est normale à la courbe C, d'où résulte e. a. une construction de cette normale dans le cas de la cycloïde. Descartes démontre ce théorème en considérant la courbe roulante comme la limite d'un polygone. Comparez la note 4 de la p. 401 qui suit. Huygens donne ici une démonstration plus exacte. Quant à la lettre de Descartes à Mersenne, qui est du 23 août 1638, elle a été publiée intégralement en 1898 dans les „Oeuvres de Descartes", éd. Adam et Tannery, T. II, p. 307.

1670. 9 Jan.

AB [Fig. 124] [2]) curva genita circumvolutione figuræ AOC ſuper recta CD, deſcribente nempe puncto A in circumferentia figuræ AOC ſumto.

Dico, ſi ducatur CA, a puncto contactus figuræ et lineæ CD, ad punctum curvæ A ubi tunc invenitur punctum deſcribens, ipſam CA occurrere curvæ ad angulos rectos, ſive circumferentiam MAH [3]) deſcriptam centro C radio CA tangere curvam in puncto A.

Ducatur enim CB primum ad punctum curvæ altius quam A. Et fuerit poſitus figuræ in BED cum punctum deſcribens eſſet in B. contactus in D. Et punctum curvæ quod antea erat in C, hic jam ſublatum ſit in E, et jungantur EB, EC. tangatque figuram in E recta KH. Quia ergo recta CD æqualis eſt curvæ ED, eâdem vero curvâ major utraque ſimul EH, HD, Erit EH major quam CH; unde angulus ECH major quam CEH. Et proinde ECL minor quam CEK, atqui addendo angulo KEB, qui æqualis LCA ad KEC fit angulus CEB. Et auferendo ab ECL angulum LCB, fit ECB. Ergo angulus CEB major angulo ECB. Itaque in Δ° CEB latus CB majus erit quam EB. Atqui EB æquale patet eſſe CA, cum ſit hoc ipſum una cum figura tranſpoſitum. Ergo CB etiam major quam CA, hoc eſt quam CF. Unde punctum B erit extra circumferentiam MAF.

Sit rurſus punctum N in curva inferius ſumtum puncto A. cumque punctum deſcribens eſſet in N ponatur ſitus figuræ fuiſſe in VLN, punctumque contactus L, punctum vero quod tangebat primam in C, ſit jam ſublatum in V, et jungantur CN, NV, VC, VL. Eritque VN æqualis CA, imo ipſa erit CA in VN tranſlata. Jam quia recta LC æquatur curvæ LV, ac proinde major eſt recta LV, erit in Δ° CLV angulus LVC major quam LCV. Unde addito inſuper angulo LVN ad LVC, fiet ſimul totus NVC major utique quam LCV ac proinde omnino major angulo NCV qui pars eſt LCV. Ergo in Δ° CVN latus CN majus erit latere VN, cui æqualis CA. Quare et CN major quam CA, hoc eſt quam CM. unde apparet punctum N cadere extra circulum MAF qui proinde tanget curvam in puncto A.

Hæc demonſtratio convenit partibus curvarum infra regulam deſcendentibus, quæ curvæ generantur a puncto extra figuram revolutam ſumto.

EH [Fig. 125] [4]) tangens in E. DH + HE majores quam curva DE, hoc eſt quam recta DC. Ergo HE major quam HC. Ergo angulus HCE major quam HEC. Atqui

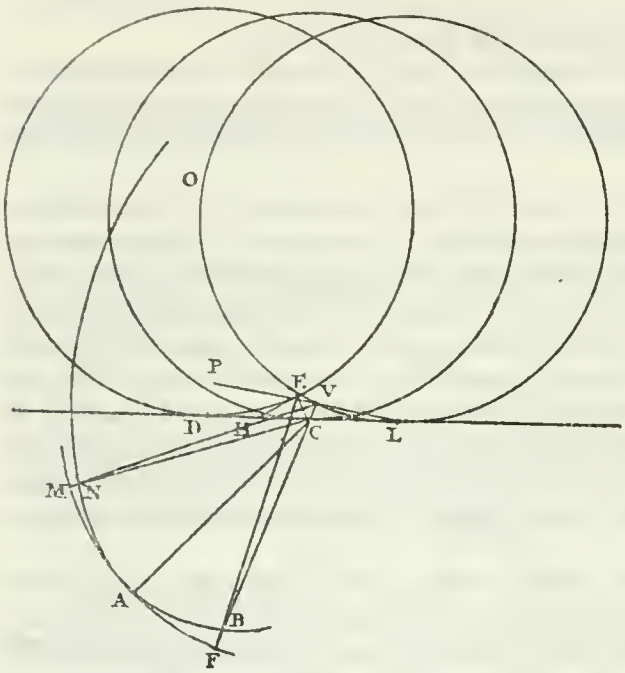
---

[2]) Notre Fig. 124 n'est autre que la Fig. 37 de la p. 155 qui précède. La figure de Huygens, tracée à la main, y correspond exactement.

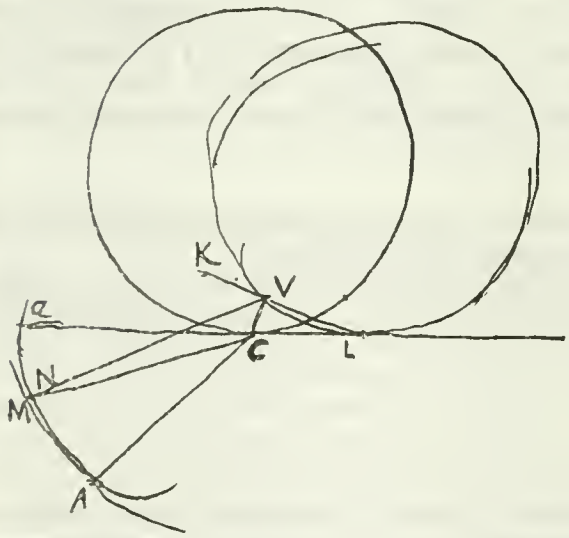
[3]) Lisez MAF.

[4]) Notre Fig. 125 n'est autre que la Fig. 38 de la p. 158 qui précède: comparez la note 2.

[Fig. 125.]



[Fig. 126.]



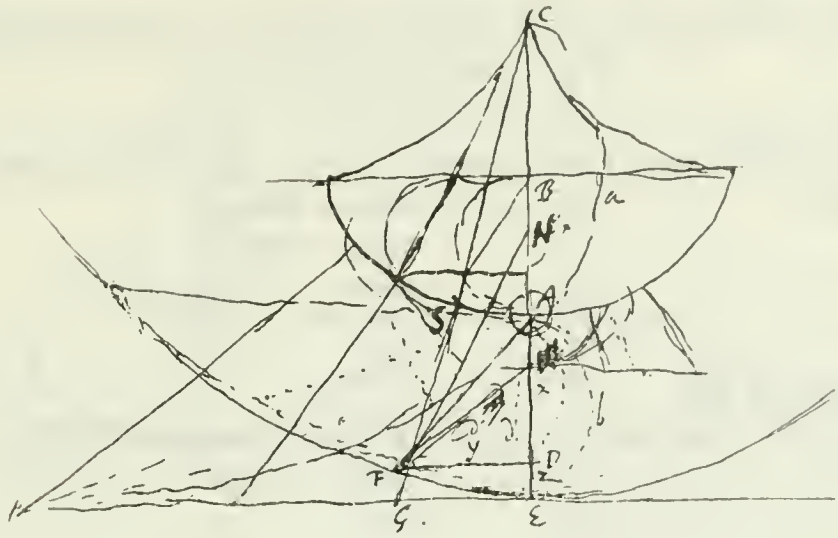
ad HCE addito HCB fit angulus ECB. Et ab HEC auferendo HEB, qui æqualis DCA, fit angulus CEB. Ergo ECB major quam CEB. Unde in Δ^{lo} ECB latus EB majus quam CB. Sed ipſi EB æqualis eſt CA ſive CF. Ergo et CF major quam CB. Ergo punctum circumferentiæ F eſt extra curvam AB.

Sit jam revoluta figura [Fig. 126] in partem L ita ut recta CA tranſlata in VN jam magis inclinetur ad regulam CQ. Sitque contactus in L, et punctum quod erat in C ſublatum in V. et jungantur LV, VC, CN.

Ergo quia CL æqualis curvæ VL, erit eadem CL major recta VL, Unde in Δ CVL, angulus LVC major LCV. ac proinde CVP minor VCQ. Sed addendo ad VCQ angulum QCN, fit angulus VCN. Et auferendo ab CVP angulum PVN, fit angulus CVN. Ergo in Δ^{o} CVN, latus VN majus erit quam CN. Eſt autem ipſi VN æqualis CA, ſive CM. Ergo et CM major quam CN. Ideoque punctum circumferentiæ M radio CA deſcriptæ eſt extra curvam AN.

[1]) La partie *B* que nous divisons en trois §§ est empruntée aux p. 253 (§ 1 et § 2) et 257 (§ 3) du Manuscrit D. La p. 254 porte la date du 15 janvier 1670.

[Fig. 127.]



B.[1]) § 1[2]).

$\sqrt{xx + yy}$ AF [Fig. 127].
CS ∞ CA
SG ∞ AF
AF + AC $a + \sqrt{xx + yy}$
$b - z \infty x$. z minima[3]).

---

[2]) Huygens considère ici, comme dans les §§ 2 et 3, un poids punctiforme A attaché à un plan rigide qui roule sur une droite horizontale.

Dans la Fig. 127, comme dans les Fig. 129 et 130, la courbe qui limite ce plan vers le bas a par hypothèse une forme telle que le point A décrit une cycloïde. Huygens se propose de trouver le rayon de courbure — voir sur cette expression les p. 41 et suiv. de l'Avertissement qui précède — de la courbe mentionnée en son sommet E. L'arc infiniment petit AS de la cycloïde peut être considéré comme faisant partie d'une circonférence de cercle à centre C et rayon CA = a. CS est donc la normale a la cycloïde au point S et, d'après les considérations de la partie *A* qui précède, son prolongement coupe la droite horizontale sur laquelle le plan rigide roule au point G, centre instantané de rotation au moment où le poids se trouve en S. Lorsqu'on prend l'arc EF = EG, AF est donc la droite du plan roulant qui va prendre la position SG. Comme l'arc EF est infiniment petit, FG est perpendiculaire à EG et DF = EG (= y). AE ou b est donnée, Huygens prend en outre AD = x et DE = z. FN est une normale à la courbe roulante; c'est donc NF ou NE (d) qu'il s'agit de calculer.

[3]) En termes plus modernes: L'arc EF étant infiniment petit, la droite z est infiniment petite du deuxième ordre.

$$\text{CA} + \text{AF}\ a + \sqrt{bb - 2bz + zz + yy}$$

$$\text{qu. CA} + \text{AF}\ \frac{aa + 2a\sqrt{\ } + bb - 2bz + zz + yy \infty aa + 2ab + bb + yy}{2a\sqrt{\ } \infty 2ab + bz - zz}\ \text{qu. CG.}$$

NE ∞ d

$$\frac{4a^2bb - 8a^2bz + 4aazz + 4aayy \infty 4aabb + 8abbz + 4bbzz - 4abzz - 4bz^3 + z^4}{\text{DE} \infty z}$$

$$yy \infty \frac{z^4 - 4bz^3 - 4abzz + 8abbz + 4bbzz + 8aabz - 4aazz}{4aa}$$

qu. ND + qu. DF

$$dd - 2dz + zz + z^4 - 4bz^3 \frac{- 4ab + 4bb - 4aa}{4aa} zz + \frac{8abbz + 8aabz}{4aa} \infty dd \text{ qu NF.}$$

$$- 2dz + \frac{8abbz + 8aabz}{4aa} \infty 0$$

$$8aadz \infty 8abbz + 8aabz$$

$$ad \infty bb + ab \qquad ad - ab \infty bb$$

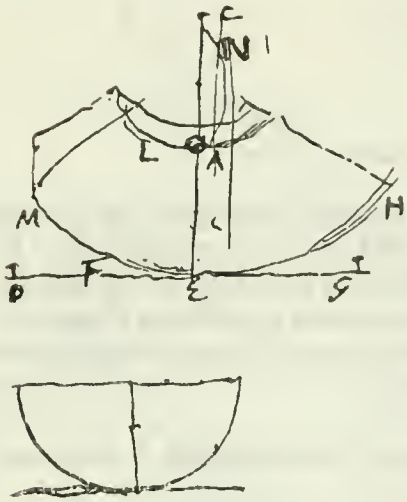
$$d \infty \frac{bb + ab}{a} \qquad a \infty \frac{bb}{d - b}\ ^{1)}.$$

§ 2 [2]). Si NE ∞ d [Fig. 128] ſit radius circumferentiæ EF quæ ſuper plano volvitur motu reciproco, Et EA ∞ b diſtantia ponderis A, plano affixi, à puncto E. Erit $\frac{bb}{d-b} \infty$ CA, longitudo penduli iſochroni oſcillationibus ponderis A ita agitati, ſive CA erit radius circumferentiæ maximæ curvam AL, in qua pondus A fertur, intus tangentis.

Poteſt EF curva eſſe ejus figuræ ut pondus A verſetur in cava cycloide [3]), ac tunc oſcillationes fient iſochronæ [4]). ſaltem mechanicè ſatis prope inveniri poterit.

Fila ſeu faſciolæ planæ ſint MEG, HEO. altera affixa in M et G, altera in H et O. his retinebitur ſolidum volutatum. ut ſit portatile.

[Fig. 128.]



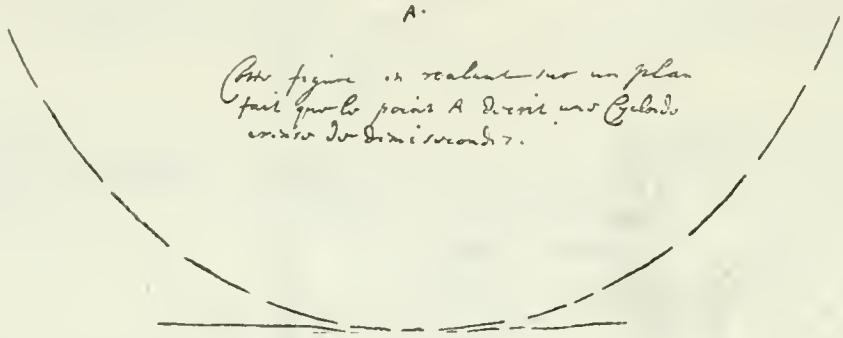
[Fig. 129.]

[1]) Le rayon de courbure d ayant été trouvé égal à $b + \frac{b^2}{a}$, il en résulte que a a la valeur indiquée, lorsque la longueur b et le rayon de courbure sont donnés.

[2]) Dans le § 1 il n'a été fait usage que d'une seule propriété de la cycloïde, savoir celle de posséder en son sommet un rayon de courbure a de longueur connue. Le résultat du calcul fait donc connaître généralement la relation qui existe entre les rayons de courbure a et d. La courbe inférieure peut p. e. être une circonférence de cercle auquel cas la courbe décrite par le point A sera une cycloïde allongée. D'ailleurs Huygens ne dit rien sur la forme de la courbe décrite dans ce cas dont il est aussi question chez Descartes et van Schooten (note 1 de la p. 388 qui précède). On voit que Huygens désigne ici ce qu'il appellera plus tard le „radius curvitatis" — voir la p. 43 de l'Avertissement — en un sommet comme le rayon de la plus grande circonférence de cercle qui touche la courbe considérée intérieurement en ce point. Apollonios dans le cinquième livre de ses „Conica" — Huygens avait reçu en 1662 (T. IV, p. 165) l'édition de Borelli et Ecchellensis de 1661 annoncée déjà en 1658 (T. II, p. 252) — parle longuement des droites minimæ et maximæ qu'on peut mener à une section conique d'un point donné situé sur l'axe principal (ou ailleurs). Comparez sur Huygens et Apollonios la note 10 de la p. 41 de l'Avertissement.

On peut aussi consulter sur l'édition de 1661 la p. 501 du T. III: Golius — dont le manuscrit arabe fut un de ceux employés plus tard par E. Halley, comme celui-ci le dit dans la

[Fig. 130.]



§ 3 [5]). ALM [Fig. 129] Cycloides cujus axis SA. AE ∞ $\frac{1}{2}$AS, ſed et major minorve poteſt accipi. EH perpend. AE. LG, MH cycloidi ad angulos rectos. EF ∞ EG. AF ∞ LG; ita invenitur punctum F. Rurſus FK ∞ GH. AK ∞ MH. &c.

curva EFK revoluta in plano EH faciet ut punctum A verſetur in Cycloide ALM, ſemiſecundorum. Pondus ergo in A affixum, ſi cetera gravitate careant faciet hoc modo oſcillationes iſochronas.

Ceſte figure [Fig. 130] en roulant ſur un plan fait que le point A decrit une Cycloide creuſe de demiſecondes.

„Præfatio" de son édition de 1710 — disait à bon droit que le texte arabe dont s'étaient servis Borelli et Ecchellensis était écourté; voir la p. 7 de „Das Fünfte Buch der Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Uebersetzung des Thabit ibn Corrah" par L. M. L. Nix (Leipzig, W. Drugulin, 1889). À la p. 562 de notre T. IV il est dit à tort que l'édition de 1661 est de Abalphatus Aspahanensis: c'est de ce dernier (Abu'l-fath ibn Mohammed al-Isfahâni) que provient le texte arabe (datant de 983) traduit en latin par Ecchellensis.

[3]) C'est de nouveau le cas du § 1.

[4]) Il est évident que le tautochronisme des oscillations exige, comme cela est dit expressément au § 3, que le plan roulant soit impondérable.

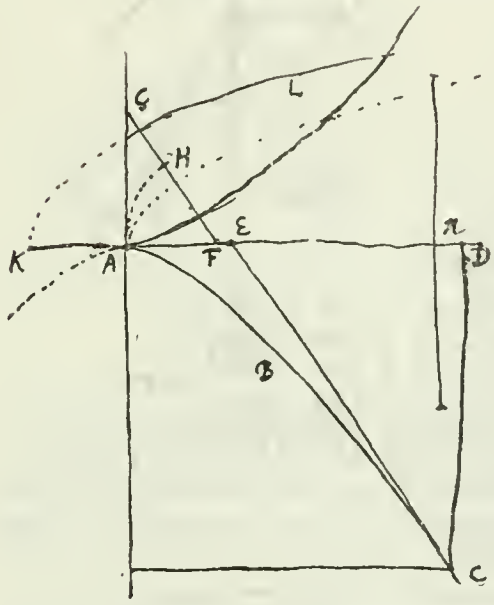
[5]) Comparez le § 1. La Fig. 130 et le texte correspondant sont empruntés à une feuille détachée qui se trouve dans le Manuscrit D. Nous reproduisons ici les Fig. 129 et 130 à petite échelle. Chez Huygens les courbes roulantes des deux figures sont identiques. Dans le première de ses figures SA a une longueur de 12,4 cm. Le double de cette longueur correspond en effet à une oscillation simple accomplie en une demi-seconde.

APPENDICE I

À LA PARS TERTIA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[?][1])

[Fig. 131.]



ABC [Fig. 131] eſt Paraboloides; axis ejus AE, vertex A. Proprietas autem iſta ut ducta ex puncto ejus quolibet C, perpendiculari in axem, CD; cubus abſciſſæ AD æquetur ſolido baſin habenti quadratum ab CD, altitudinem vero æqualem rectæ datæ *n*. Hujus curvæ parti datæ, ut AC, invenietur linea recta æqualis hoc modo: Sit AE parallela DC, et in ea ſumatur AF æqualis $\frac{8}{27}$ rectæ *n*. AE vero æquetur $\frac{1}{3}$DC, junctâque CE, quæ curvam tanget in C, ducatur ei parallela FG, quæ cum producto axe DA conveniat in G; et abſcindatur ab ea FH æqualis ipſi AF. Erit jam curva ABC æqualis rectæ CE una cum reſidua HG.

Evolutione curvæ CA junctæ AK rectæ æquali AF ſive $\frac{8}{27}$ *n*, deſcribitur Parabola KL, cujus latus rectum duplum AK, vertex K, axis KA.

Sit KL [Fig. 132] Ellipſis vel Hyperbola. axis tranſverſus KP. centrum ſectionis A. lateris recti dimidium KC. LNH occurrat ſectioni ad angulos rectos, ſecetque axem in N. LN ad NH rationem habeat compoſitam ex ratione quadrati AK ad rectangulum POK, et ratione KC ad CA. Punctum H erit in curva CH, cujus evolutione ſimul cum recta CK deſcribitur linea ſectionis KL. unde curvæ CH recta æqualis in-

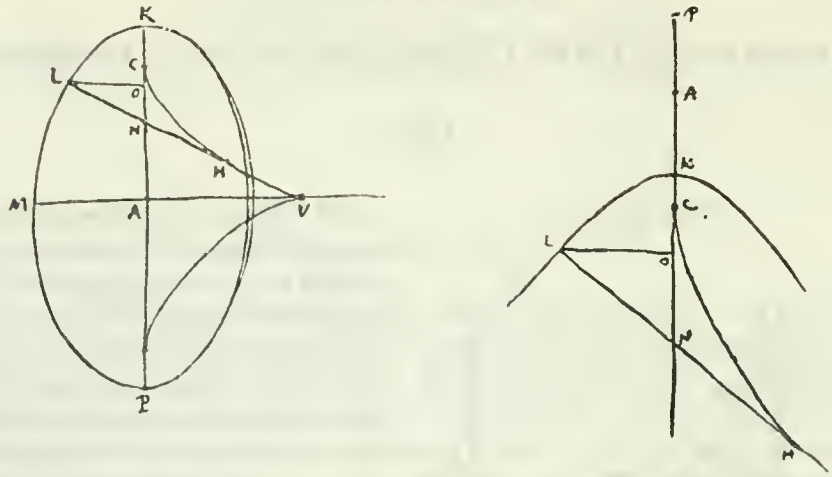
---

[1]) Les Fig. 131—134 et le texte correspondant sont empruntés aux p. 35—37 du Manuscrit 13. La date est incertaine et d'ailleurs peu importante: voir la note 2 de la p. 149 du T. XVII.

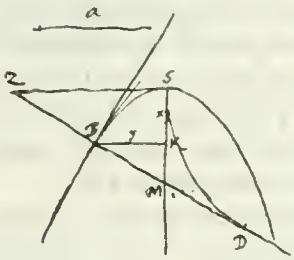
Le contenu de la Pièce correspond aux Prop. VIII et X. ainsi qu'à une partie de la Prop. XI de la Pars Tertia de l' „Hor. osc.".

veniri poterit. Eſt autem, in ellipſi, terminata in V puncto, quod invenitur ponendo duabus AM, AK tertiam proportionalem MV.

[Fig. 132.]

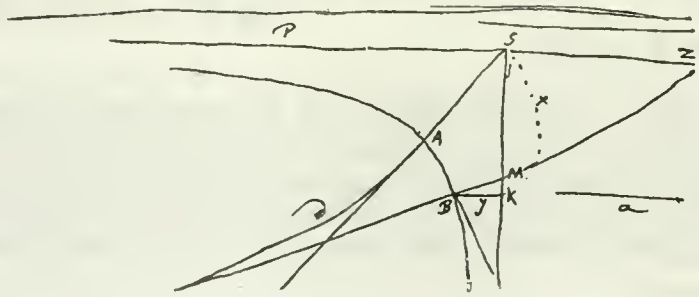


[Fig. 133.]



$$\left.\begin{array}{l|l} ax \infty y^2 & BM + 2BZ \\ a^2x \infty y^3 & \frac{1}{2}BM + \frac{3}{2}BZ \\ ax^2 \infty y^3 & 2BM + 3BZ \\ ax^3 \infty y^4 & 3BM + 4BZ \\ a^3x \infty y^4 & \frac{1}{3}BM + \frac{4}{3}BZ \end{array}\right\} \infty BD$$

[Fig. 134.]



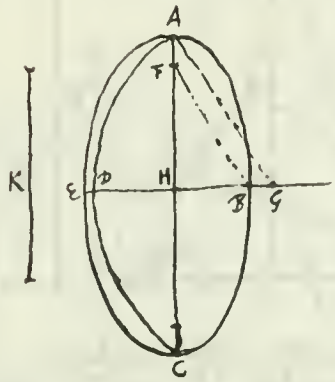
$$\begin{array}{l|l} xy \infty aa & \frac{1}{2}BM + \frac{1}{2}BZ \\ x^2y \infty a^3 & \frac{2}{3}BM + \frac{1}{3}BZ \\ xy^2 \infty a^3 & \frac{1}{3}BM + \frac{2}{3}BZ \infty BD \text{ [Fig. 134].} \\ x^3y \infty a^4 & \frac{3}{4}BM + \frac{1}{4}BZ \\ xy^3 \infty a^4 & \frac{1}{4}BM + \frac{3}{4}BZ \end{array}$$

APPENDICE II

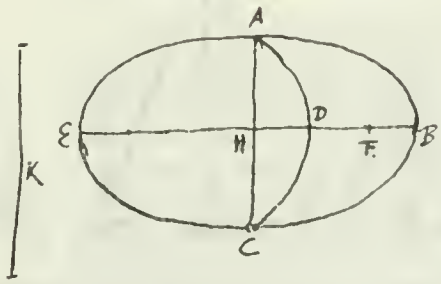
À LA PARS TERTIA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[?][1]

[Fig. 135.]



[Fig. 136.]



Superficiei ſphæroidis æqualem circulum invenire.

AECB [Fig. 135] eſt ſphæroides oblongum. AC axis. F alter focorum ellipſis AECB. AG parallela FB. arcus ADC deſcriptus centro G. Recta K eſt media proportionalis inter ſemidiametrum HB et æqualem utrisque ſimul, diametro EB et arcui ADC. Jam erit circulus, deſcriptus radio K, æqualis ſuperficiei ſphæroidis AECB.

AECB [Fig. 136] eſt ſphæroides compreſſum axis AC. F alter focorum ellipſis AECB. punctum D dividit biſariam ipſam FH quæ inter focum et centrum. ADC eſt parabola vertice D. Recta K eſt media proportionalis inter diametrum EB et rectam æqualem curvæ parabolicæ ADC. Erit jam circulus deſcriptus radio K æqualis ſuperficiei ſphæroidis AECB.

---

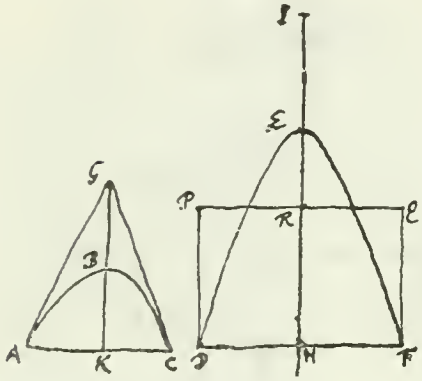
[1]) Les Fig. 135—138 et le texte correspondant sont empruntés aux p. 39—40 du Manuscrit 13. Comparez la note 1 de la p. 395.

Le contenu de la Pièce correspond à la plus grande partie de la Prop. IX de la Pars Tertia de l'„Hor. osc.".

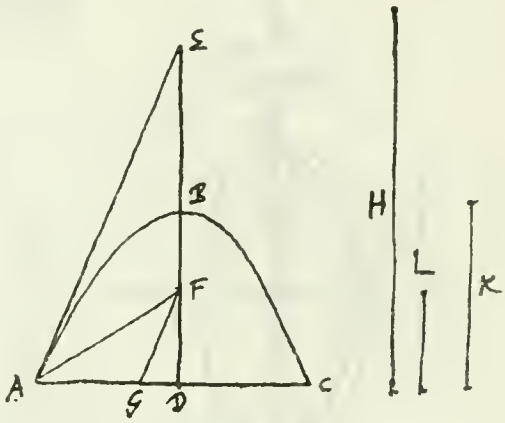
Curvæ Parabolicæ æqualem rectam invenire.

ABC [Fig. 137] eſt parabolæ portio recta. triangulum AGC iſoſceles in eadem baſi, duplum altitudine. IE æqualis AC. IH æqualis duabus ſimul AG, GC. DEF eſt hyperbole, vertice E. centro I. rectangulum PF æquale portioni hyperboles DEF. PQ ſecat IH in R. Jam erit IR æqualis curvæ parabolicæ ABC.

[Fig. 137.]



[Fig. 138.]



Superficiei conoidis parabolici dati circulum æqualem invenire, perfectè.

Sit Conoides [Fig. 138] cujus ſectio per axem parabola ABC. axis BD; vertex B. Sit AE tangens parabolæ quæ occurrat axi producto in E. Et dividatur bifariam angulus EAD, rectâ AF. et ſit FG parallela AE. Deinde ſit H æqualis utrique ſimul AE et DG. L autem æqualis trienti AC. Et inter H et L inveniatur media proportionalis K. Jamque erit circulus deſcriptus radio K æqualis ſuperficiei conoidis ABC præter baſin.

Si fuerit AE dupla AD erit ſuperficies conoidis ad circulum baſeos ut 14 ad 9.

Si AE tripla AD, ut 13 ad 6.

Si AE quadrupla AD, ut 14 ad 5.

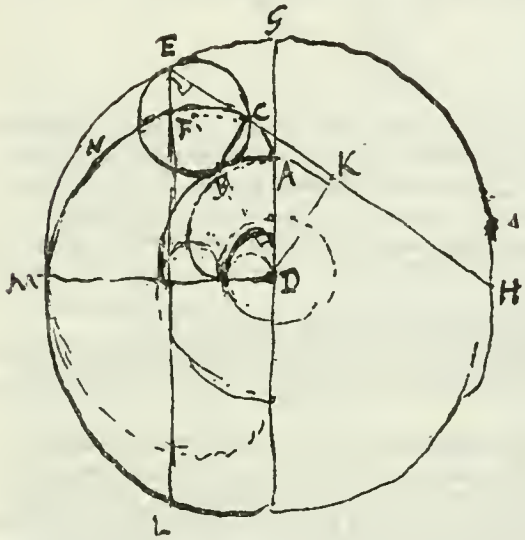
Quum ſit in univerſum, ſicut AE una cum GD (eſt autem GD ad DA ut hæc ad DAE) ad $\frac{3}{4}$AC.

APPENDICE III

À LA PARS TERTIA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

1678.

[Fig. 139.]



§ 1 [1]). Omnis Epicyclicæ evolutione ſimilis Epicyclica deſcribitur.

Ut radius circuli ſuper quo revolutio ad diametrum circuli revoluti ita utriusque ſumma ad aliam; Hæc juncta diametro circuli revoluti efficiet dimidiam longitudinem Epicyclicæ ex revolutione deſcriptæ. Vel curva Epicyclicæ eſt ad diametrum circuli genitoris ut dupla diameter circuli manentis cum dupla diametro revoluti ad ſemidiametrum manentis.

DA ∞ AG [Fig. 139]. arcus BC ∞ BA. punctum C in cycloide. DBE linea recta. ECH recta. EL parall. GD. Dico EL eſſe ∞ EH. Et EC ∞ $\frac{1}{4}$EH. Ducatur BC. et DK perp. EH. ∠ ECB eſt rectus. Ergo ut DE ad EB ita KE ad EC. Ergo EC ∞ $\frac{1}{2}$EK ſive ∞ $\frac{1}{4}$EH. Ducatur FC. quia jam radius FB ∞ $\frac{1}{2}$ rad. AD et arcus BC ∞ BA, erit ang. BFC dupl. BDA. Ergo ∠ BEC ∞ BDA ∞ DEL. Ergo EH ∞ EL.

Hinc video MNCA curvam quæ terminat ſpatium radioſum in ſpeculo cavo MGH, a radijs axi DG parallelis, eſſe cycloidem a circulo EB, ſuper duplo majoris diametri circulo AB revoluto [2]).

---

[1]) Le § 1 — la division en §§ est de nous — de cet Appendice provient de la p. 164 du Manuscrit E. Voir sur la date le début du § 2. On trouve à la p. 164 quelques autres figures dans le genre des Fig. 139 et 140 que nous ne reproduisons pas. Les deux premières propositions du § 1 sont démontrées au § 2.

[2]) LE, rayon incident sur un miroir cylindrique, étant réfléchi suivant EH qui touche l'épi-

§ 2 [1]). 26 Nov. 1678.
lu a l'aſſemblée le 3 dec. 1678.

La meſure des lignes Epicycloides.

Monſ. de Vaumeſle Religieux de Normandie m'ayant mandè qu'il avoit trouvè la meſure de la ligne Epicycloide, lors que le cercle generateur et le cercle immobile ſont egaux, cela m'a donnè occaſion de chercher cette demonſtration generale [2]).

Propoſ. 1.

Par l'évolution de la moitiè d'une Epicycloide, en commencant par le ſommet, il s'engendre la moitiè d'une autre Epicycloide ſemblable à la premiere [3]).

---

cycloïde au point C, on peut en conclure que tous les rayons provenant de rayons incidents parallèles à LE la toucheront également. Comparez la p. 41 de l'Avertissement qui précède: dans son article de 1727 Krafft dit à tort: „Cum vero dubitaretur pluresne una possibiles sint hujus indolis nec ne [c.à.d. s'il existe d'autres courbes que la cycloïde où la développée et la développante sont pareilles]: non longe post Tschirnhusius Causticis fortasse suis probe intentus secundam invenit, Causticam nempe Semicirculi quæ Epicyclois est, quam protulit deinde in Actis Lips. 1682, M. Novembri".

Voir encore sur l'évolution et la courbure d'après Huygens la p. 183 du T. X.

L'hypocycloïde et sa développée semblable à elle-même furent considérées par Newton dans son ouvrage de 1687; voir les notes 5 de la p. 168 et 19 de la p. 514 du T. IX, ainsi que la note 000 de la p. 000 qui suit.

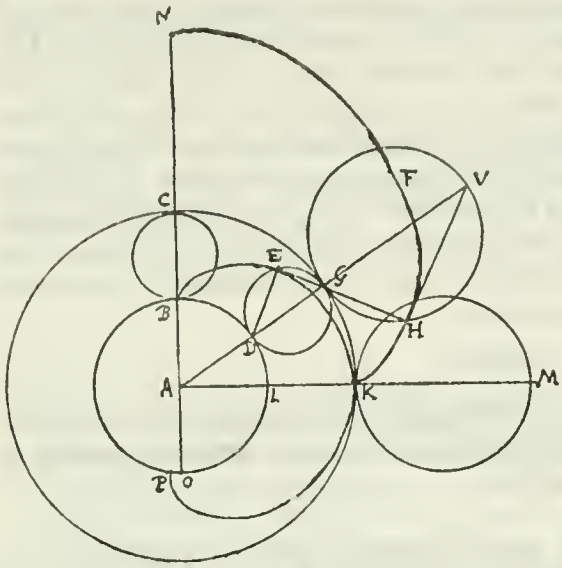
[1]) Les §§ 2 et 3 sont empruntés à deux feuilles détachées (f. 175 et 176) se trouvant dans le portefeuille „Chartæ mathematicæ". Toutefois, sauf la première et la dernière phrase, et sauf quelques différences insignifiantes dans le texte, le § 2 se lit également à la p. 165 du Manuscrit E. Comme nous l'avons indiqué dans la note 6 de la p. 117 du T. VIII, les §§ 1—3 ont déja été publiés en 1833 (dans un ordre différent) par P. J. Uylenbroek dans les „Chr. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium Exercitationes Mathematicæ et Philosophicæ, Hagæ Comitum, Ex Typographia Regia". Uylenbroek s'est servi, pour le § 2, du texte du Manuscrit E.

[2]) On trouve aux p. 115 et 125 du T. VIII les deux lettres de 1678 (resp. du 29 oct. et du 19 nov.) de de Vaumesle à Huygens. Elles furent suivies en juillet 1679 par une troisième lettre non moins intéressante (T. VIII, p. 189). Huygens connaissait déjà l'épicycloïde, quoiqu'il n'en eût apparemment pas encore considéré les propriétés; voir la note 6 de la p. 127 du T. VIII ainsi que les remarques publiées plus loin dans le présent Tome sur la forme des dents d'un engrenage.

Mons. A. Legoy, archiviste départemental à Saint-Lo, nous a fait savoir que d'après différentes liasses du fonds de l'abbaye d'Hambye „dom Pierre de Vaumesle" fut prieur en 1698, 1704, 1705, 1707 et probablement jusqu'à 1711, lorsqu'un successeur fut élu. En 1690 Huygens lui donne déjà le titre de Presbyter (T. IX, p. 515). Il est mentionné comme religieux en différentes années, depuis 1676 jusqu'à 1691.

[3]) Dans sa première lettre de Vaumesle dit déjà „que par leuolution de la cycloïde circulaire est decrite une autre cycloïde circulaire triple de la premiere". Il ne considère que le cas où les rayons des cercles immobile et mobile sont égaux: sa „cycloïde circulaire" est la cardioïde.

[Fig. 140.]



Soit BEK [Fig. 140] la moitiè d'une Epicycloide, deſcrite par le roulement du cercle BC ſur le cercle immobile BL. Et le cercle KM eſtant ſuppoſè eſtre au cercle KC comme le cercle CB au cercle BL, ſoit, par le roulement du cercle KM ſur le cercle KC immobile, deſcrit la demie Epicycloide KFN, qui ſera terminée à la droite AB prolongée; et ſera ſemblable a la demie Epicycloide BEK, à cauſe de la proportionalité des cercles.

Je dis que la meſme courbe KFN ſera deſcrite par l'Evolution de la courbe BEK, commencée par K.

Car ayant pris dans BEK quelque point E, poſons que le cercle geniteur de cette courbe, lors que le point qui la trace eſtoit en E, ait eu la poſition GED, touchant le cercle BL en D. Et ayant joint ED, ſoit EG perpendiculaire à elle, qui touchera l'Epicycloide BEK au point E, par notre propos. . . . du traitè de l'Evolution des lignes courbes, car il eſt aiſè de la rendre generale [4]).

Il faut donc ſeulement demonſtrer que EG eſtant prolongée rencontre l'Epicycloide KFN à angles droits. car il s'en ſuit de la que cette courbe ſe deſcrit par l'evolution de la courbe BEK, par notre prop. . . . de l'Evolution des courbes [5]). Il eſt certain que EG rencontre la circonference KC au point de contact du cercle ED, parce que DEG eſt un demicercle à cauſe de l'angle droit DEG.

---

[4]) Voir la Prop. XV de la Pars Secunda de l'„Hor. osc." ou bien la partie *A* de notre Appendice à la Pars Secunda. La proposition doit en effet être généralisée, car dans la lettre de Descartes à Mersenne citée dans la note 1 de la p. 388, ainsi que dans le Commentaire de van Schooten (même endroit) et dans la Prop. XV de Huygens il n'est question que d'une courbe roulant *sur une droite*. Ici Huygens admet que la droite qui relie le point considéré de la figure roulante au centre instantané de rotation est également normale à la courbe décrite par ce point, lorsque la figure roule *sur une courbe*. Descartes (quoiqu'il dise pouvoir démontrer la proposition dans le cas considéré par lui „d'une autre façon, plus belle a mon gré & plus Geometrique") se contente d'en faire voir la vérité en assimilant la courbe roulante à „un polygone qui a une infinité de costez". Or, cette même considération peut servir à établir le théorème lorsque la

Soit VG le cercle generateur de l'Epicycloide KFN, et qu'il touche auſſi le cercle KC en G: Et que EG prolongée couppe la circonference GV en H. Puis donc que l'arc BDL eſt egal à la demie circonference DEG; et que l'arc DB eſt egal à l'arc DE, par la nature de la courbe BEK; l'arc DL ſera auſſi egal a l'arc EG. Mais l'arc EG eſt a l'arc GH comme le diametre DG a GV, c'eſt à dire comme AD a AG, (parce que AD, AG, AV ſont proportionelles) ou comme l'arc DL à l'arc GK. Donc les arcs EG, DL eſtant egaux, les arcs GH, GK ſeront egaux de meſme. d'ou s'enſuit que le point H eſt le point traçant de l'Epicycloide KFN, lors que ſon cercle generateur eſt en GV. Et par la propos. ſusdite du Traitè de l'Evolution [6]), il paroit que GH, qui eſt la continuation de la droite EG, rencontre la courbe KFN en ce point H à angles droits, ce qui reſtoit à demonſtrer.

Propoſ. 2.

La courbe d'une Epicycloide eſt au diametre de ſon cercle generateur comme deux fois la ſomme des diametres du cercle generateur et du cercle immobile qui ſert de baſe, au rayon du meſme cercle immobile.

Il eſt evident que l'evolution de la demie Epicycloide BEK ſe terminant en N, comme il a eſtè dit, la droite BN eſt egale a la courbe BEK. et parce que AN, AC, AB ſont proportionelles il s'en ſuit que NC eſt a CB, comme CA à AB ou AO [7]). Et en compoſant, NB à BC, c'eſt a dire la demie Epicycloide au diametre de ſon cercle generateur comme CO a OA, Et l'Epicycloide entiere BKP à BC, comme deux fois CO à OA; ce qu'il fallait demonſtrer.

---

figure roule sur une courbe: il suffit d'assimiler cette dernière à un polygone, dont les côtés correspondent exactement à ceux de la figure roulante qui viennent s'y appliquer. C'est la probablement la voie suivie par de Vaumesle qui dit (T. VIII, p. 117) avoir „trouvé la tangente de la cijcloïde circulaire par la methode de mr. des Cartes", puisqu'il ajoute „Jay reconnu que les tangentes de lvne et de lautre cycloïde se trouvent de mesme maniere": il connaissait (T. VIII, p. 127) „la geometrie de mr. des cartes commentéé par Scoothen" et considère (même endroit) fort ingénieusement des polygones réguliers roulant l'un sur l'autre. C'est à ce sujet que se rapporte la petite figure de Huygens de la p. 108 du Manuscrit E que nous insérons ici [Fig. 141]. Il ne paraît pas que Huygens se soit appliqué à généraliser la démonstration plus rigoureuse de la Prop. XV de la Pars Secunda. Comparez la note 9 de la p. 403 qui suit.

[Fig. 141.]

5) Il s'agit de la Prop. IV de la Pars Tertia de l'„Hor. osc."

6) C.à.d. par la Prop. XV de la Pars Secunda, supposée généralisée (note 4).

7) Cette dernière équation est d'ailleurs équivalente à l'hypothèse initiale: „le cercle KM estant supposè estre au cercle KC comme le cercle CB au cercle BL".

Il eſt à noter que ces Epicycloides ſont des lignes geometriques quand les diametres des cercles generateur et immobile ſont commenſurables [8]).

§ 3. Spatium epicycloide et baſi ſua comprehenſum, eſt ad circulum genitorem Epicycloidis, ut tripla ſemidiametrus circuli baſeos cum diametro circuli genitoris ad radium circuli baſeos [9]).

---

[8]) Dans le Livre Second de sa Géométrie Descartes parle comme suit: „Pour comprendre ensemble toutes celles [c.à.d. toutes les courbes planes] qui sont en la nature, et les distinguer par ordre en certains genres, je ne sache rien de meilleur que de dire que tous les points de celles qu'on peut nommer géometriques, c'est a dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimée par quelque équation, en tous par une même".

Or, l'épicycloïde extérieure s'exprime en coördonnées rectangulaires par les équations

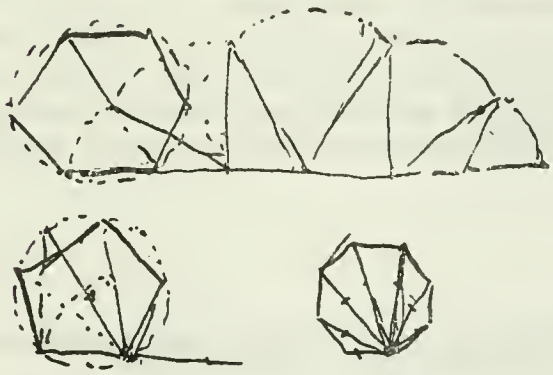
$$\frac{x}{r} = \frac{n+1}{n} \cos n\varphi - \cos (n+1)\varphi$$

$$\frac{y}{r} = \frac{n+1}{n} \sin n\varphi - \sin (n+1)\varphi$$

$$n = \frac{r}{R},$$

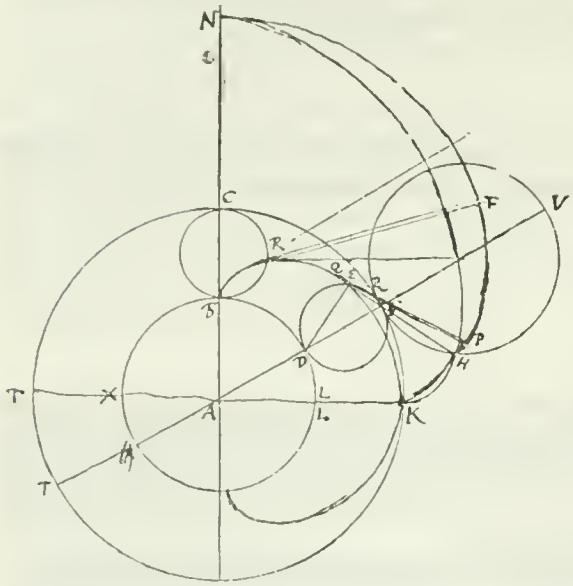
où R et r désignent les rayons du cercle immobile et mobile; lorsque n est commensurable, le paramètre φ peut être éliminé. La cycloïde au contraire n'est pas „géométrique".

[Fig. 141 bis.]



[9]) De Vaumesle avait trouvé, par la considération de polygones réguliers et égaux roulant l'un sur l'autre, que la surface de la cardioïde, y compris le cercle générateur, est le double de celle de la cycloïde ordinaire engendrée par un cercle de même grandeur (T. VIII, p. 117); en d'autres termes que la surface de la cardioïde sans le cercle générateur, est le quintuple de ce dernier (même endroit et p. 127). C'est ce résultat — c'est à la méthode de de Vaumesle que se rapportent les figures (Fig. 141 bis) de Huygens de la p. 174 du Manuscrit E — que Huygens généralise en suivant une méthode différente.

[Fig. 142.]



Dans la mesme figure [Fig. 142] soit pris un autre point Q dans l'Epicycloide BQK, pres du point E, et soit QP sa tangente, qui rencontrera donc l'Epicycloide KHN à angles droits, comme en P; Et coupera necessairement la circonference CK; prenons que ce soit en R. Or les points de contact E Q peuvent estre infiniment pres l'un de l'autre et aussi les points d'intersection G R; la raison de HE a GE et de PQ a QR demeurant tousjours les mesmes que de VD a DG. Partant HQP, GQR peuvent estre considerez comme des triangles des quels la proportion est la mesme que du qu. HE au qu. EG, ou du qu. VD au qu. DG [1]). Donc tout l'espace BEKN à l'espace BEKC aura la raison du qu. VD au qu. DG, parce qu'en concevant de tangentes infinies [2]) le long de la courbe BQK, elles diviseront tout l'espace KPNBQK en une infinitè de triangles tels que PQH, qui auront chacun à leur partie RQG la mesme raison que le qu. HE au qu. EG, ou que le qu. VD au qu. DG. Donc aussi dividendo, l'espace KHNC sera à BEKC comme l'exces du qu. VD sur le qu. DG est au qu. DG. Mais l'espace BEKL est à KHNC comme le qu. DG au qu. GV. donc ex æquo [3]) in propositione perturbata, l'espace BEKL sera à BEKC, comme le qu. VD — qu. DG au qu. GV, c'est a dire comme le rectangle de VG + 2GD et VG, au qu. VG, ou comme VG + 2DG à VG. Et l'espace BEKL à BLKC comme VG + 2DG a 2VG + 2DG. ou comme AK + 2AL à 2AK + 2AL. Sed BLKC est ad semicirc. BRC comme 2BL + 2CK à BL: Parce que BLCK est egal au ▭ $\frac{1}{2}$BL + $\frac{1}{2}$CK et BC. Et le demicercle BRC egal au ▭ $\frac{1}{4}$BL et BC. Et partant en ostant la commune hauteur BC et quadruplant, sera BLKC au demicercle BRC comme 2BL + 2CK à

[1]) Ou plutôt: „Partant HQP, GQR, lesquels peuvent être considérés comme des triangles dont la proportion est égale à $HE^2 : EG^2$, sont aussi entre eux comme $VD^2 : DG^2$."

[2]) C.à.d. une infinité de tangentes.

[3]) Comparez la p. 396 du T. XVI.

BL, ou comme 2AK + 2AL à AL. Mais l'eſpace BEKL eſtoit à BLKC comme AK + 2AL à 2AK + 2AL, donc ex æquo BEKL au demicercle BRC comme AK + 2AL à AL. C'eſt a dire comme 3AL + LK a AL.

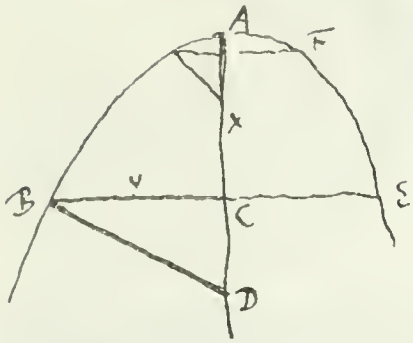
§ 4. [Voir la p. 406 du T. XIV (p. 166 du Manuſcrit E). Le calcul ſe rapportant à la cycloïde, découpée de la même manière que l'épicycloïde, eſt une ſuite du calcul des §§ précédents. La page 166 du Manuſcrit date ſans doute également de 1678, non pas de 1679, puiſque les pages ſuivantes ſe rapportent encore en partie au même ſujet: voir la Fig. 141 bis et auſſi la Fig. 141 aux p. 402—403 qui précèdent].

APPENDICE IV

À LA PARS TERTIA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1691.][1]

[Fig. 145.]



Parte tertia Horologij oſcillatorij, ubi de curvarum evolutione agitur, Propoſ. 11 [2]), dixi data quavis curva geometrica, aliam inde reperiri curvam geometricam, cujus longitudo lineæ rectæ adæquetur. Qua in re difficultas quædam occurrit quæ tamen tolli poteſt [3]).

Sit curva data AB [Fig. 145]. AC ∞ x, applicata CB ∞ y. Sit etiam BD curvæ perpendicularis in B, et rectam AC ſecans in D. Jam ad inveniendam curvam alteram cujus dimenſio detur, neceſſe eſt prius curvam effingere AFE, in qua applicatæ CE ſint ſemper æquales rectis CD [4]). ac neceſſe eſt ut CD exprimatur in terminis qui tantum incognitam x contineant non autem y. Quod Methodo Tangentium Carteſiana plerumque efficere licet. at non ſemper tamen niſi AC ſit axis curvæ AB, ita ut ex puncto D, ducta ad curvam perpendiculari DB una tantum poſſit eſſe longitudo interceptæ DC.

Velut ſi ABEb [Fig. 146] ſit curva illa Huddenij [5]), quæ ad rectam AD ita refera-

---

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 70 du Manuscrit G. La date du 1 janvier 1691 se trouve à la p. 57 et la p. 74 est datée: „1691. Maj".

[2]) Voir la p. 225 qui précède.

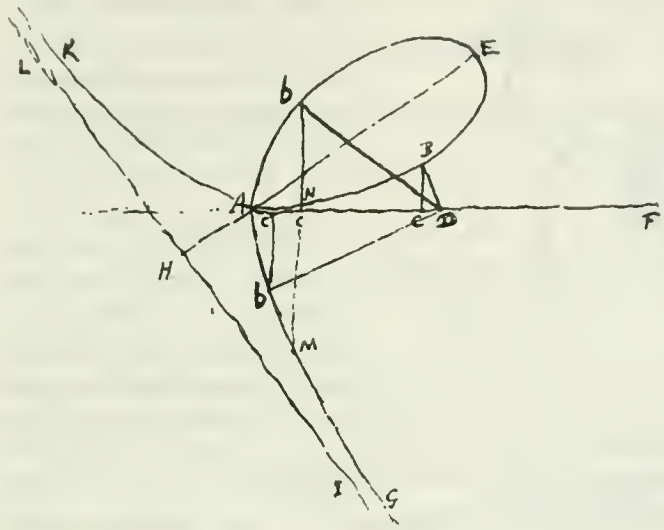
[3]) Comme il est dit dans la suite, la difficulté consiste dans le fait qu'on peut en général mener d'un point donné D plusieurs normales à la courbe, d'où résultent des complications mathématiques. La droite AD, axe des x, peut avoir par rapport à la courbe une position quelconque. Huygens fait voir comment on peut, dans un cas spécial, lever la difficulté par un changement d'axes.

[4]) D'après la construction de la Prop. XI nommée. Voir la Fig. 70 à la p. 231.

[5]) Il s'agit du „folium Cartesii". Comparez la p. 351 du T. X, où Huygens désigne cette courbe comme celle que „Mr. des Cartes . . et nostre Mr. Hudde ont considerée".

Plus tard Huygens écrivit en marge: Hujus curvæ quadraturam inveni in libro H. Folium

[Fig. 146.]



tur, ut ſi AC vocetur x, CB y. AF linea data ſit a, fiat $x^3 + y^3 - xya \infty 0$. In hac ſi ex puncto D rectæ AD, ducenda ſit curvæ perpendicularis DB, non invenietur ex Carteſij methodo [6]), neque ea quam inde deduxit Flor. de Beaune [7]), ut intercepta DC inter D et perpendicularem BC, exprimi poſſit ſolis quantitatibus x et a. Sed ad cubicas æquationes pervenietur valde implicitas in quibus quæſita AC tertiam dimenſionem attingat. Quod hanc cauſam habet, quod perpendicularis ex puncto D ad curvam hanc, aliquando tripliciter vel quadrupliciter duci poteſt, ut in hac figura conſpicitur, adeo ut AC longitudo trifariam accipi poſſit, præterquam quod et ipſa DA curvæ occurrit ad angulos rectos in A. Hoc autem non fiet ſi curvæ hujus puncta ad axem ejus referantur qui eſt recta EAH, angulo ſemirecto ad AD inclinata, ut ex æquatione ſuperiori non difficulter intelligitur. Ut autem ex æquatione illa inveniatur alia, qua ad axem EA curva referatur, conſideretur [Fig. 147], quod poſita AC ∞x,

---

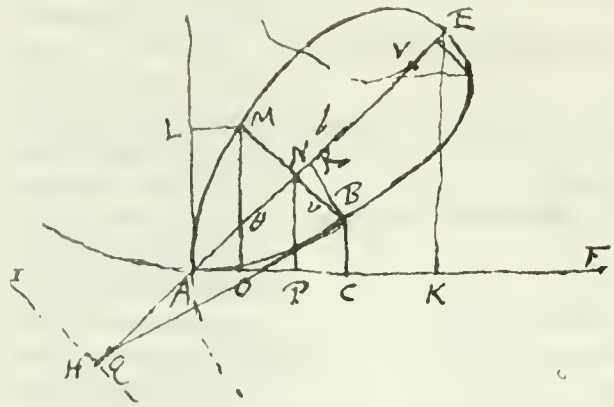
nempe ABEb, esse $\frac{1}{3}$ quadrati ab axe AE. Spatium vero utrimque infinitum KAGIHL, esse folio æquale. AH est $\frac{1}{3}$ AE. CM applicata semper æqualis duabus CN, Cb, radix falsa nimirum duabus veris [c.à.d. à chaque valeur de y correspondent trois valeurs de x dont la somme algébrique est nulle].

Cette quadrature, dont nous n'avons pas à nous occuper ici, se trouve à la p. 141 et suiv. du manuscrit H qui porte la date du 21 novembre 1692. Nous l'avons déjà publiée à la p. 374 et suiv. du T. X.

6) Exposée dans le deuxième livre de la „Géométrie".

7) Voir „Florimondi de Beaune in Geometriam Renati des Cartes Notæ breves", p. e. dans l'édition de 1683 (ex typ. Blaviana, Amsterdam) de F. van Schooten („Geometria à R. des Cartes anno 1637 Gallicè edita; postea autem cum Notis Fl. de Beaune, operâ atque studio F. v. Schooten"); les remarques „de modo inveniendi contingentes linearum curvarum" s'y trouvent aux p. 130—133.

[Fig. 147.]



et CB ∞ y, si ducatur BM, axem normaliter secans in N, sitque MO perpendicularis in AC, ML perpendicularis in AL quæ angulo recto insistit in AC, consideretur inquam ML esse æqualem BC, ideoque et AO æqualem BC sive y. Item demissâ perpendiculari NP in AC, esse OP ∞ $\frac{1}{2}$OC, sive $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$: Ideoque AP ∞ $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Sicut autem AP ad PC ita AN ad NB. Itaque si AN vocetur θ, et NB v; erit ut AC ad AO, sive CB ita $\theta + v$ ad $\theta - v$. Sit AE ∞ b, et EK perpendicularis AK: Eritque AK ∞ $\frac{1}{2}a$. Itaque $\theta + v$, $\theta - v$ et $2b$ inter se sicut x, y et a. Cumque sit $x^3 + y^3 - axy \infty 0$, Erit cubus ex $\theta + v$ + cubo ex $\theta - v$ — solido ex $\theta + v$ in $\theta - v$ in $2b \infty 0$, hoc est his tribus additis

$$\begin{array}{rl} \theta + v & \text{AN} + \text{NB} \\ \theta - v & \text{AN} - \text{NB} \\ \hline \theta\theta - vv & \\ 2b & 2\text{AE} \\ \hline 2b\theta\theta - 2bvv & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \theta^3 + 3\theta\theta v + 3\theta vv + v^3 \\ & \theta^3 - 3\theta\theta v + 3\theta vv - v^3 \\ & \qquad - 2b\theta\theta + 2bvv \\ \hline \text{Summa} & 2\theta^3 + 6\theta vv - 2b\theta\theta + 2bvv \infty 0 \\ \hline \text{sive} & \theta^3 + 3\theta vv - b\theta\theta + bvv \infty 0 \\ \hline & \dfrac{b\theta\theta - \theta^3}{3\theta + b} \infty vv. \end{array}$$

Hinc facile invenitur ubi latitudo MNB sit maxima in spatio AMEB per regulam de max. et min. nam $\dfrac{3b\theta^3 + 2bb\theta\theta - 6\theta^4 - 3b\theta^3 \infty 0}{bb \infty 3\theta\theta}$

$\sqrt{\frac{1}{3}bb} \infty \theta$ ut ab Huddenio fuit inventum [1]).

[1]) Cette détermination de la plus grande largeur de la boucle est ici un πάρεργον.

Celle de Hudde se trouve aux p. 493 et 497—499 des „Exercitationes Mathematicæ" de F. van Schooten de 1656 (voir le titre complet à la p. 184 du T. I).

Hic si pro θ sit $-\theta$, hoc est si AN versus H accipiatur fiet $\frac{b\theta\theta + \theta^3}{-3\theta + b} \infty vv$.

unde erit v infinita si $3\theta \infty b$, hoc est posita AH $\infty \frac{1}{3}$AE, erit HI asymptotos, quod aliter quoque ostenditur infra [2]).

Porro et tangens curvæ in puncto B invenitur ex æquatione $\theta^3 - b\theta\theta + 3\theta vv + bvv \infty 0$.

Si enim tangens sit BQ, invenitur NQ $\infty \frac{6\theta vv + 2bvv}{2b\theta - 3\theta\theta - 3vv}$.

Unde, si fiat BR perpend. in AE [3]), erit NR $\infty \frac{2b\theta - 3\theta\theta - 3vv}{6\theta + 2b}$, sive quia vv est $\frac{b\theta\theta - \theta^3}{3\theta + b}$, fiet NR $\infty \frac{2b\theta - 3\theta\theta}{6\theta + 2b} - \frac{3b\theta\theta - 3\theta^3}{\frac{1}{2}\text{qu. } 6\theta + 2b}$, sive tandem $\frac{bb\theta - 3\theta^3}{\text{qu. } 3\theta + b}$.

ubi una tantum incognita quantitas θ reperitur, ideoque secundum propositionem nostram undecimam de Evolutione Curvarum, poterit inveniri curva rectifianda, cujus nempe Evolutione curva EBA describitur. Incipiet autem a puncto V [Fig. 147], posita EV $\infty \frac{1}{8}b$ [4]). Cum enim inventa sit NR $\infty \frac{bb\theta - 3\theta^3}{\text{qu. } 3\theta + b}$, si ponatur θ hoc est AN ∞b, fit NR $\infty -\frac{1}{8}b$, hoc est ab E versus A accipienda.

Porro si ponatur $b - \theta$, hoc est NE ∞z, sive $b - z \infty \theta$, fit pro æquatione superiori ℵ, hæc altera $2bzz - z^3 - bbz - 3vvz + 4bvv \infty 0$,

Et $$\frac{2bzz - z^3 - bbz}{3z - 4b} \infty vv.$$

Unde apparet v infinitam fieri si $3z \infty 4b$, sive $z \infty \frac{4}{3}b$, unde HI curvæ asymptotus, si EH $\infty \frac{4}{3}b$ [2]).

---

[2]) On peut faire sur cette détermination de la position de l'asymptote une remarque analogue à celle du début de la note 1.

[3]) BR est une perpendiculaire à la tangente BQ, en d'autres termes une normale à la courbe, coupant l'axe AE en R.

[4]) Le point V est donc le centre de courbure de la boucle au point E.

APPENDICE V

À LA PARS TERTIA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1692]

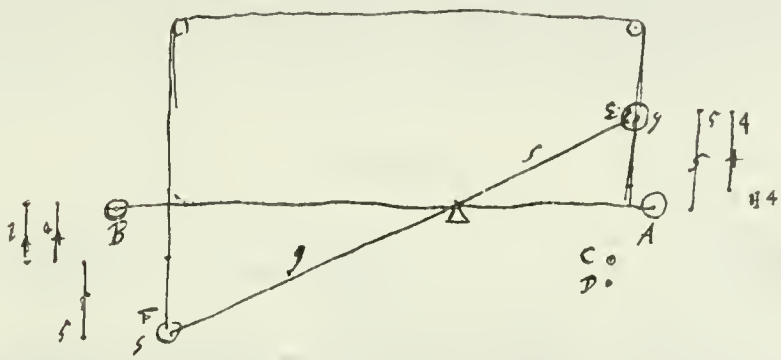
Calcul du rayon de courbure minimal de la courbe logarithmique: voir le N° 2770, p. 333—335 du T. X.

APPENDICE I

À LA PARS QUARTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1666.] [1])

[Fig. 146.]



§ 1 [2]). Datis duobus gravibus æqualibus, ratio æquilibrij patitur ut descensu unius ex certa altitudine, alterum attollatur ad altitudinem æqualem [3]).

Nullum grave ascendere potest nisi aliud grave descendat [3]).

Si non æquiponderent, prævaleat B [Fig. 146] [4]). Ergo addenda gravitas aliqua

---

[1]) La Pièce, que nous divisons en deux §§, est empruntée à la p. 105 du Manuscrit C. La p. 102 est datée sept. 1666 et la p. 107 porte la date du 2 nov. 1666.

[2]) Dans la Pars Quarta de l'„Hor. osc." Huygens consacre quelques pages à l'élucidation de son Hypothèse I d'après laquelle le centre de gravité d'un système de corps ne peut pas s'élever spontanément. Les considérations du présent Appendice, écrites à Paris quelques mois après son arrivée, se rapportent à ce sujet. Remarquons en passant que Huygens ne définit nulle part le centre de gravité d'un corps unique, ce qui d'ailleurs n'est pas facile (voir les notes 1 et 2 de la p, 340 du T. XVI).

[3]) C'est évidemment l'expérience, indépendante de toute théorie sur la nature de la pesanteur, qui est invoquée ici, comme dans les élucidations mentionnées dans la note 2 où il est dit que deux corps égaux, pouvant tourner autour de leur centre de symétrie ou de gravité, „moventur . . . absque vi ulla".

[4]) Les chiffres écrits dans la Fig. 146 font voir que les poids sont supposés inversement proportionnels aux bras de levier.

ad A ut fiat æquilibrium, ſit ea C. et ſit D gravitas minor quam C. Ergo D appoſitâ ad A non fiet æquilibrium ſed utraque ſurſum tolletur puta in E, dum B perveniet in F. Atqui A ſola oſtenditur [3]) deſcendendo ad priſtinum locum reducere poſſe etiam B unde digreſſa erat. Ergo jam gravitas D in E remanens motu ſpontaneo gravitatum A et B eo ſublata eſt, illis in priſtinum locum reſtitutis unde rurſus quoties libuerit pondus ipſi D æquale eodem modo in E attollent quod eſt abſurdum [5]).

§ 2. Primum oſtendendum [6]) cum minus pondus metitur majus [7]).

Auferendo minorem altitudinem à majori, et minus pondus a majori pondere ſemper reliqua altitudo ad minorem altitudinem, ut reliquum pondus ad minus pondus [8]). Ideoque pondera duo quibus deſcendendum reſtat ſemper converſam rationem habent ſpatiorum per quæ deſcendere debent.

---

[3]) Voir la note 3 de la p. 411 qui précède.

[5]) Comparez le „quod est absurdum" du troisième alinéa de la Prop. VI de la Pars Secunda de l'„Hor. osc.". Huygens considère comme absurde l'idée qu'on pourrait construire un système mécanique accomplissant continuellement et spontanément un travail utile (voir à ce sujet la note 7 de la p. 243 du T. XVI).

[6]) Apparemment Huygens se propose de démontrer rigoureusement plus tard (en effet, le § 1 ne contient pas de démonstration rigoureuse; on ne distingue pas nettement les hypothèses suggérées par l'expérience et les conséquences logiques qui en découlent) que lorsque deux poids attachés au fléau d'une balance impondérable sont en équilibre, le rapport de leurs distances au point fixe est l'inverse de celui des poids. C'est là le sujet de son mémoire „Demonstration de l'Equilibre de la Balance" publié en 1693 aux p. 313 et suiv. des „Divers Ouvrages de Mathematique et de Physique, par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences", Paris, Impr. Royale, où il part des données suivantes: „I. L'on demande avec Archimede que deux poids égaux attachez chacun au bout des bras égaux d'une balance fassent équilibre. II. Et que les poids estant égaux, & les bras de la balance où ils sont attachez, inégaux, elle incline du costé du bras qui est le plus long. III. L'on demande aussi qu'on puisse concevoir que les lignes & les plans dont il sera parlé dans cette démonstration soient inflexibles & sans pesanteur". Dans ce mémoire — les considérations qu'on y trouve, postérieures à celles du présent Appendice, datent d'ailleurs de longtemps avant 1693; nous y reviendrons dans un des Tomes suivants — Huygens ne part donc pas de l'hypothèse de la non-existence d'un mécanisme accomplissant continuellement et spontanément un certain travail, tandis qu'ici, d'apres la fin du § 1, il se propose de fonder sa démonstration e. a. sur cette dernière hypothèse.

[7]) En 1693, comme en 1666, Huygens suppose les poids commensurables entre eux.

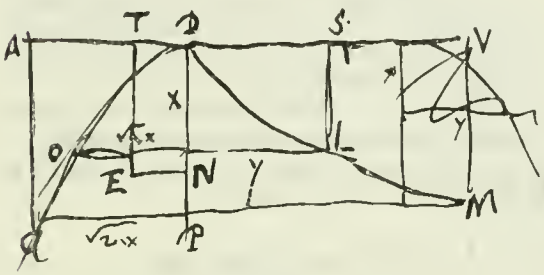
[8]) La dernière phrase du texte fait voir que Huygens suppose la proposition rigoureusement établie pour des poids commensurables entre eux. Il indique comment il faut ensuite étendre cette démonstration aux poids incommensurables.

APPENDICE II

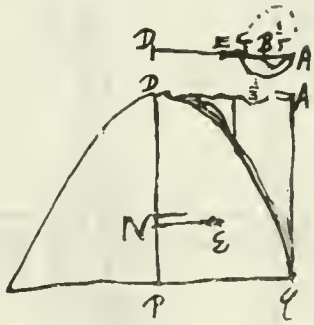
À LA PARS QUARTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

A. Dans la Prop. XXI Huygens indique e.a. la longueur du pendule isochrone avec un segment droit de parabole oscillant latéralement soit autour de son sommet soit autour du milieu de sa base. Son calcul repose e.a. sur quelques données qu'on trouve à la p. 60 (numération nouvelle) du Manuscrit B. Nous avons publié à la p. 475 du T. XVI la plus grande partie de ces données qui servaient en cet endroit à expliquer le calcul des p. 473—474 de la longueur du pendule isochrone avec un ellipsoïde de révolution suspendu en un point de son axe. Ici nous reproduisons de nouveau les deux figures de la page nommée, mais pour le texte de Huygens nous renvoyons le lecteur au T. XVI.

[Fig. 147.]



[Fig. 148.]



La Fig. 148 représente le segment entier. D'après la Fig. 147 et le texte correspondant on a DN = $\frac{5}{7}$ DP, où DP est l'axe du segment de parabole dont la Fig. 147 ne représente que la moitié gauche, tandis que DN, subcentrique d'un onglet, est la longueur du pendule isochrone, lorsque la parabole, suspendue en D, exécute une oscillation solide, c.à.d. une oscillation autour de la tangente au sommet D. Comme le centre de gravité Z se trouve à une distance $\frac{3}{5}$ DP du sommet, le „premier rectangulum" — voir la p. 48 de l'Avertissement qui précède — correspondant à cette oscillation solide est DZ × ZN ou $\frac{3}{5}$ DP × $\left(\frac{5}{7} - \frac{3}{5}\right)$ DP ou $\frac{12}{175}$ DP². La fraction $\frac{12}{175}$ a été notée en marge par Huygens sur la page en question.

Pour calculer la longueur du pendule isochrone dans le cas d'une oscillation latérale du segment autour du sommet D, il faut en considérer le „deuxième rectangulum", celui, peut-on dire, qui se rapporte à l'oscillation solide de la demi-parabole autour de DP. Comme la distance de DP au centre de gravité de la demi-parabole est $\frac{3}{8}$ PQ (p. 474 du T. XVI) et la distance de DP au centre de l'oscillation solide considérée vaut $\frac{8}{15}$ PQ, le „deuxième rectangulum" s'exprime par $\frac{3}{8}$ PQ. $\frac{8}{15}$ PQ ou $\frac{1}{5}$ PQ².

La somme des deux „rectangula" que nous venons de calculer constitue le „spatium applicandum" qui est donc $\frac{12}{175}$ DP² + $\frac{1}{5}$ PQ². En le divisant par $\frac{3}{5}$ DP, distance du sommet au centre de gravité, et en ajoutant $\frac{3}{5}$ DP au quotient, on trouve $\frac{5}{7}$ DP + $\frac{1}{3}\frac{PQ^2}{DP}$, ce qui est la valeur donnée par Huygens dans l'„Hor. osc.".

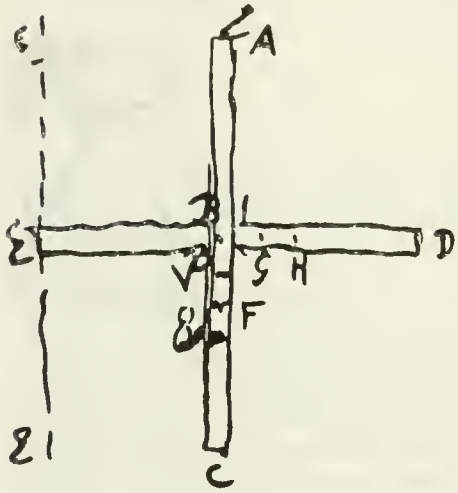
On pourrait aussi commencer par ajouter DN^2 ou $(\frac{3}{5}\ DP)^2$ au „premier rectangulum". On trouve ainsi pour les deux grandeurs respectivement $\frac{3}{7}\ DP^2$ et $\frac{1}{5}\ PQ^2$. La somme $\frac{3}{7}\ DP^2 + \frac{1}{5}\ PQ^2$ constitue alors ce que nous avons appelé ρ^2 dans la note 1 de la p. 48 de l'Avertissement. En le divisant par $\frac{3}{5}$ DP, distance du sommet au centre de gravité de la parabole, on trouve de nouveau pour la longueur du pendule isochrone $\frac{5}{7}\ DP + \frac{1}{3}\ \frac{PQ^2}{DP}$.

Lorsque l'oscillation latérale du segment a lieu autour du point P, il faut, pour trouver ρ^2, ajouter $(\frac{2}{5}\ DP)^2$ au „premier rectangulum" $\frac{12}{175}\ DP^2$ et $(\frac{3}{8}\ PQ)^2$ au „deuxième rectangulum" $(\frac{1}{5} - \frac{9}{64})\ PQ^2$. La somme totale est donc dans ce cas $\frac{8}{35}\ DP^2 + \frac{1}{5}\ PQ^2$, ce qui donne en divisant cette expression par $\frac{2}{5}$ DP, la longueur du pendule isochrone $\frac{4}{7}\ DP + \frac{1}{2}\ \frac{PQ^2}{DP}$, comme le dit Huygens.

Ajoutons que l'expression „spatium applicandum" est employée déjà, dans un autre calcul, à la p. 60 du Manuscrit B. Voir la partie *C* du présent Appendice.

D'ailleurs on peut fort bien ne pas se servir d'une terminologie correspondant au texte de l'„Hor. osc." et faire usage de la formule de la note 3 de la p. 482 ou de la note de la p. 492 du T. XVI.

[Fig. 149.]



B. La Pièce *B*, écrite au crayon (Huygens était alité en ce temps, voir la p. 36 de l'Avertissement), est empruntée à la p. 262 du Manuscrit D (les p. 254 et 264 portent les dates du 15 janvier et du 27 mai 1670 respectivement).

Huygens y considère l'oscillation latérale d'une croix, composée de deux lignes pesantes égales, autour d'un de ses sommets. Il s'agit de trouver la longueur du pendule isochrone.

AC vel ED ∞ a [Fig. 149].
EH ∞ $\frac{2}{3}$ AC.
BH ∞ $\frac{1}{6}$ ED vel AC.

Cunei super cruce AECD abscissi plano per EE, centrum gravitatis bifariam dividet BH. BG ∞ $\frac{1}{12}$ ED.

La subcentrique BG de l'onglet considéré est le centre d'une oscillation solide de la croix autour de l'axe EE. L'onglet se compose de deux plans égaux, l'un triangulaire, l'autre rectangulaire, dont les centres de gravité se projettent en H et B respectivement.

AB ∞ $\frac{6}{12}\ a$
AV ∞ $\frac{7}{12}\ a$
$\square$ BAV $\frac{12}{144}$
$+ \frac{1}{24}\ \square$ EBG
$\frac{48}{144}$
$\frac{1}{3}$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \infty \frac{2}{3} a \infty \text{AO}.$$

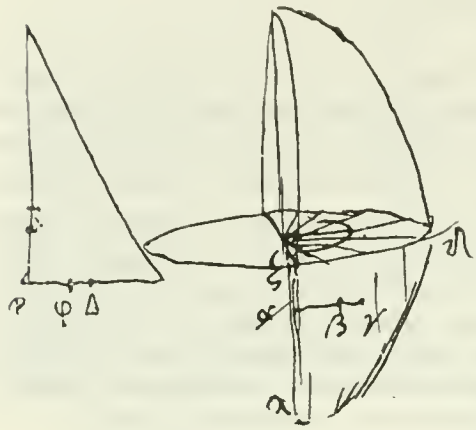
Le point de ſuſpenſion dans le cas de l'oſcillation latérale de la croix eſt A (l'oſcillation ſolide conſidérée plus haut avait lieu autour d'un axe paſſant par E, mais il eſt évident que les points A et E ſont équivalents). V eſt le centre de l'oſcillation ſolide de la croix autour d'un axe horizontal paſſant par A. Le „premier rectangulum" eſt donc le ▭ ABV ou $\frac{1}{24} a^2$. En y ajoutant, comme dans l'application de la deuxième méthode au cas du ſegment de parabole, le carré AB^2, c. à. d. $\frac{1}{4} a^2$, on obtient $\frac{1}{24} a^2 + \frac{1}{4} a^2 = \frac{42}{144} a^2$, ce qui ſe calcule directement en prenant le ▭ BAV. Le „deuxième rectangulum" ▭ EBG ou $\frac{1}{24} a^2$ doit reſter tel qu'il eſt, puiſqu'il ſe rapporte à un centre de gravité B ſitué ſur l'axe de ſymétrie du corps oſcillant. La ſomme $\frac{48}{144} a^2$ ou $\frac{1}{3} a^2$ eſt la grandeur totale — nous ne diſons pas le „ſpatium applicandum"; comparez la note 1 de la p. 48 de l'Avertiſſement — correſpondant à l'oſcillation plane autour de A; en le diviſant par $\frac{1}{2} a$, diſtance du ſommet au centre de gravité, on obtient $\frac{2}{3} a$, longueur du pendule iſochrone cherché.

$$\begin{array}{l}
\text{AB} \infty \frac{1}{2} a \\
\text{BV} \infty \frac{1}{12} a \\
\hline
\qquad \frac{1}{24} aa \;▭\; \text{ABV} \\
\qquad \frac{1}{24} aa \;▭\; \text{EBG} \\
\hline
\qquad \frac{1}{12} aa \text{ ſumma} \\
\text{div. p. } \frac{1}{2} a \infty \text{AB} \\
\hline
\qquad \frac{1}{6} a \infty \text{BO} \\
\qquad \frac{2}{3} a \infty \text{AO}.
\end{array}$$

Dans ce deuxième calcul, conduiſant au même réſultat, et analogue au premier calcul dans le cas du ſegment de parabole, la ſomme $\frac{1}{12} a^2$ du „premier rectangulum", et du „deuxième rectangulum", ſe rapportant par définition l'un et l'autre au centre B de la figure, conſtitue le „rectangulum oſcillationis", „totum ſpatium applicandum" ou „ſpatium applicandum". Après l'avoir diviſée par $\frac{1}{2} a$, il faut ajouter $\frac{1}{2} a$ au quotient, d'après la formule $l = \frac{\rho'^2}{b} + b$ ou $l = \frac{\Sigma r'^2}{nb} + b$ de la p. 48 de l'Avertiſſement.

C. Le calcul qui ſuit eſt emprunté à la p. 60 du Manuſcrit B, conſidérée auſſi plus haut (partie *A*). Comme il s'agit d'une feuille collée dans le Manuſcrit, la date eſt incertaine. Huygens y calcule le „ſpatium applicandum" d'un demi-paraboloïde de révolution. Ailleurs (Manuſcrit B, p. 174 ou T. XVI, p. 483, p. 333 du préſent Tome) il conſidère le paraboloïde (ou conoïde) entier. Il paraît extrêmement probable que le calcul de la p. 483 du T. XVI, quoiqu'il ſe trouve plus loin dans le Manuſcrit B, ſoit antérieur à celui de la p. 60, d'autant plus qu'on trouve à la p. 60 la Fig. 150, dont la figure a latere où ſe trouvent les lettres P, Φ et Δ correſpond à la Fig. 90 de la p. 289 du préſent Tome et ſe rapporte à la nouvelle méthode de calcul pour les corps de révolution (voir la note 4 de la p. 554 du T. XVI), dont nous avons dit dans le deuxième alinéa de la p. 372 du T. XVI qu'elle correſpond plus ou moins à la détermination de Σz^2 de la note 4 de la p. 483 du T.

[Fig. 150.]



XVI, c.à.d. à une méthode dont Huygens fait uſage (note 5 de la p. 483 nommée) dans le cas du conoïde entier. Vers la fin de la Prop. XXII de la Pars Quarta Huygens parle généralement de la détermination du centre d'oſcillation de la moitié d'un corps de révolution, évidemment toujours coupé en deux (comme le conoïde) par un plan paſſant par l'axe. Il ne développe le calcul que pour le demi-cône (nous ne poſſédons pas de brouillon de ce calcul) en ajoutant qu'il laiſſe à d'autres le ſoin d'exécuter un calcul analogue pour le demi-cylindre et le demi-conoïde. Or, voici ce qu'on trouve ſur le demi-conoïde à la p. 60 du Manuſcrit B outre le texte de la p. 475 du T. XVI ſe terminant par les mots NE [Fig. 147] $\frac{8}{15}$ brachium cunei ſuper PDQ abſciſſi per DP:

r radius c arcus quadrantis

$$c \text{ ——— } r \text{ ——— } \frac{8}{15} \Big/ \frac{8}{15}\frac{rr}{c}$$

$\alpha\beta$ [Fig. 150] brachium ſemiconoidis parabolici vel figuræ proportionalis $\zeta\lambda\delta$.

$$\frac{\frac{1}{6}rr}{\frac{8}{15}\frac{rr}{c}}$$

$\frac{5c}{16}$ brachium cunei per $\zeta\lambda$ ſuper figura proportionali $\zeta\lambda\delta$.

$$\frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \infty \left.\begin{matrix}\frac{1}{12}\\ \frac{2}{3}\end{matrix}\right\} \text{m.}}{\frac{1}{18}aa.}$$

$$\frac{5}{16}c - \frac{8}{15}\frac{rr}{c}\ \beta\gamma$$

$$\frac{8}{15}\frac{rr}{c}\ \alpha\beta$$

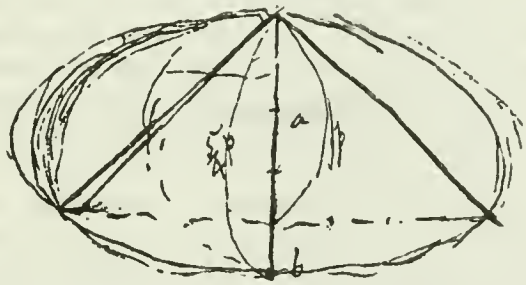
$\frac{1}{6}rr - \frac{64}{225}\frac{r^4}{cc} + \frac{1}{18}aa$ ſpatium applicandum in ſemiconoide parabolico.

Voici l'explication de ce calcul. $\frac{8}{15}r$, où r eſt le rayon de la baſe du demi-conoïde, eſt la diſtance à l'axe vertical de la Fig. 150 du centre de gravité d'une partie du demi-conoïde limité par deux plans paſſant par l'axe et faiſant l'un avec l'autre un angle infiniment petit. Le lieu de tous ces centres de gravité eſt la demi-circonférence de cercle horizontale qu'on voit dans la figure.

$\frac{8}{15}\frac{rr}{c}$ ou $\alpha\beta$ eſt la diſtance de l'axe vertical au centre de gravité de cette demi-circonférence, donc auſſi la diſtance de l'axe au centre de gravité du demi-conoïde. Les deux figures proportionnelles, à gauche et au-deſſous de la figure principale, ſont conſtruites comme l'enſeigne la Prop. XIV de la Pars Quarta. D'après la fin de la Prop. XV de la Pars Quarta le „deuxième rectangulum" du conoïde entier s'exprime, puiſque le corps conſidéré eſt de révolution, par le produit $P\Phi . P\Delta$, où $P\Delta = \frac{1}{2} r$ et $P\Phi = \frac{1}{3} r$, Φ étant la projection ſur la baſe du centre de gravité de la figure a latere qui, pour le conoïde, eſt un triangle. Ce „deuxième rectangulum" eſt donc $\frac{1}{6} rr$. Or, il s'exprime auſſi par le produit $\alpha\beta . \alpha\gamma$, où $\alpha\gamma$ eſt le „brachium cunei per $\zeta\lambda$ ſuper figura proportionali $\zeta\lambda\delta$". On obtient donc par diviſion $\alpha\gamma = \frac{5c}{16}$. Le produit de $\beta\gamma$ par $\alpha\beta$ donne enſuite le „deuxième rectangulum" ſe rapportant au demi-conoïde. Pour obtenir le „ſpatium applicandum" du demi-conoïde il faut encore y ajouter le „premier rectangulum" qui a la valeur $\frac{1}{18} aa$, où a déſigne la hauteur du triangle a latere égale à celle du conoïde; en effet, il s'obtient, tant pour le demi-conoïde que pour le conoïde entier, en multipliant dans le triangle la diſtance $\frac{1}{12} a$ de ſon centre de gravité au centre de l'oſcillation ſolide du triangle autour d'un axe paſſant par ſon ſommet — on prend donc la différence de $\frac{3}{4} a$ (ſubcentrique d'un onglet) et de $\frac{2}{3} a$ — par la diſtance $\frac{2}{3} a$ du centre de gravité au ſommet.

Comme Huygens le dit dans le paragraphe ſur le demi-cône, le „ſpatium applicandum" calculé permet de trouver le „centrum agitationis ... in omni ſuſpenſione, ... dummodo ab axe qui ſit parallelus" au diamètre qui limite la baſe du demi corps de révolution. On obtient, comme toujours — comparez la partie *D* qui ſuit — la longueur du pendule iſochrone en diviſant le „ſpatium applicandum" par la diſtance du ſommet au centre de gravité du corps, et en ajoutant enſuite cette même diſtance au quotient.

[Fig. 151.]



D. La même p. 60 verſo contient encore le calcul ſuivant:

$$\frac{\frac{\frac{3}{80}aa + \frac{3}{80}bb}{\frac{3}{4}a} + \frac{3}{4}a \infty p \text{ [Fig. 151]}}{\frac{3}{80}aa + \frac{3}{80}bb + \frac{9}{10}aa \infty \frac{3}{4}ap}$$

$a \infty x, b \infty 2y.$

$$\frac{\frac{48}{80}aa + \frac{3}{80}bb \infty \frac{3}{4}ap}{\frac{6}{10}xx + \frac{3}{20}yy \infty \frac{3}{4}px}$$

$$\frac{yy \infty 5px - 4xx}{y \infty \sqrt{5px - 4xx}.}$$

Huygens ſe propoſe de trouver le lieu des baſes d'un groupe de cônes droits ſuſpendus à un ſommet commun et correſpondant tous au même pendule iſochrone de longueur p. La hauteur du cône conſidéré eſt d'abord appelé a, puis x, et le diamètre de la baſe d'abord b, enſuite $2y$.

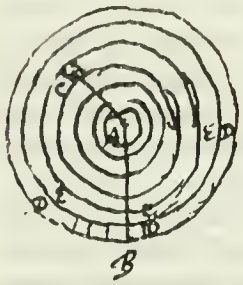
Le „ſpatium applicandum" $\frac{3}{80}aa + \frac{3}{80}bb$ du cône de révolution eſt donné par Huygens — qui laiſſe au lecteur le ſoin d'exécuter le calcul de ce „ſpatium" ce que nous faiſons comme lui — dans le paragraphe „centrum oſcillationis coni" de la Prop. XXII de la Pars Quarta. Il en tire ici la longueur du pendule iſochrone comme il a été dit à la fin de la partie B qui précède. Le lieu cherché eſt l'ellipſoïde de révolution aplati engendré par la rotation de l'ellipſe à axes $\frac{5}{4}p$ et $\frac{5}{2}p$. C'eſt ce qui réſulte auſſi du calcul de Huygens de la p. 481 du T. XVI, où l'on trouve [Fig. 50] une ellipſe de la même forme; ceci en vertu de la remarque que nous avons faite à la p. 368 (troiſième alinéa) du T. XVI.

APPENDICE III

À LA PARS QUARTA DE L'HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1669—1670.][1]

[Fig. 152.]



[Fig. 153.]

§ 1. Si circulus vel circuli ſector in particulas minimas æquales diviſus intelligatur a quibus ſingulis rectæ ad centrum ductæ ſint. Erunt harum omnium quadrata ſimul ſumta æqualia dimidio quadrato radij, multiplici ſecundum particularum ipſarum numerum.

Sit Circulus [Fig. 152] in annulos æqualis latitudinis diviſus. Et annuli omnes in particulas æquales, adeo ut in unoquoque ſit numerus particularum pro ratione magnitudinis annuli [2]). Triangulum EGG [Fig. 153] lineis baſi parallelis dividatur in ſegmenta annulis proportionalia. Et ſegmenta omnia diviſa in particulas æquales inter ſe, non opus autem ut et particulis circuli æquales ſint. Sit vero numerus particularum in ſegmento GG idem qui in annulo DD. Unde neceſſario et in reliquis deinceps ſegmentis erunt numeri ijdem qui in annulis ipſis reſpondentibus, et in toto proinde Δ^{lo} EGG idem numerus particularum qui in circulo AB.

EF [Fig. 153] ∞ AB [Fig. 152]. GG ad arbitrium, KE parallela GG.

GG ſecta in tot particulas inter ſe æquales quot ſunt in annulo DD. Ergo quadrata omnia LM æqualia quadratis omnibus ex annulo D in A ductarum. Et quadrata a diſtantijs particularum ſegmenti HH ab KE [Fig. 153], æqualia omnibus quadratis EA [Fig. 152] &c. Atqui ſumma quadratorum a diſtantijs particularum trianguli EGG æquatur rectangulo OEN [3]), multiplici ſecundum particularum numerum.

---

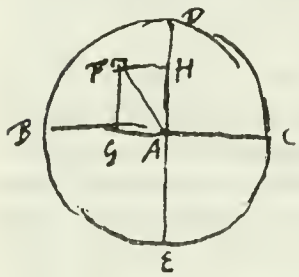
[1]) Cet Appendice est emprunté aux p. 245—249 du Manuscrit D. La p. 235 porte la date du 21 nov. 1669 et la p. 250 (comparez la note 1 de la p. 388 du présent Tome) celle du 9 janvier 1670. Nous divisons cette Pièce en §§.

[2]) Comparez le troisième alinéa de la p. 443 du T. XVI.

[3]) N est le centre de gravité du triangle, EO la subcentrique de l'onglet obtenu en coupant le prisme élevé sur le triangle par un plan oblique passant par KK. EN × NO est le „rectangu-

posita EN $\frac{2}{3}$ EF, et EO $\frac{3}{4}$ EF, unde ▭ OEN ∞ $\frac{1}{2}$ qu. EF. Ergo et summa quadratorum a distantijs particularum circuli AB a centro A æquabitur $\frac{1}{2}$ qu. EF sive $\frac{1}{2}$ qu. AB multiplici secundum particularum numerum qui sunt in triangulo vel in circulo[1]).

[Fig. 154.]



Si circulus in particulas minimas æquales divisus intelligatur, et a singulis in diametrum circuli perpendiculares duci. Erunt harum omnium quadrata simul sumta æqualia quartæ parti quadrati radij, multiplici secundum numerum particularum.

Sit circulus [Fig. 154] centro A diametro BC, et diviso cogitatione plano ejus in particulas minimas æquales. sint ab ijs singulis ductæ in diametrum BC perpendiculares sicut a particula F ducta est FG. dico harum omnium perpendicularium quadrata æquari $\frac{1}{4}$ qu. AB mult. s.n.p.

Sit enim ducta altera circuli diametrus ipsi BC ad angulos rectos DE et in eam cadat perpendicularis FH et jungatur FA. Sunt igitur quadrata FG et FH simul æqualia quadrato FA. Eademque ratione quadrata bina perpendicularium quæ ab unaquaque particula ducuntur ad diametros BC, DE, æqualia esse constat quadrato distantiæ ejus particulæ a centro A. Et quadrata omnia a distantijs particularum a diametris BC, DE æqualia omnibus quadratis distantiarum a centro A. Atqui quadrata perpendicularium omnium ad diametrum BC æquari liquet quadratis omnibus perpendicularium ad diametrum DE. Ergo quadrata perpendicularium omnium ad diametrum unamquamque BC vel DE æquantur semissi quadratorum a distantijs particularum a centro A. hoc est per præc. $\frac{1}{4}$ qu. radij AB multiplici s.n.p. quod erat demonstrandum.

§ 2. Si sphæra [Fig. 155] vel sector sphæræ in particulas minimas æquales dividi intelligatur, a quibus singulis ad centrum sphæræ rectæ ducantur. Erunt harum

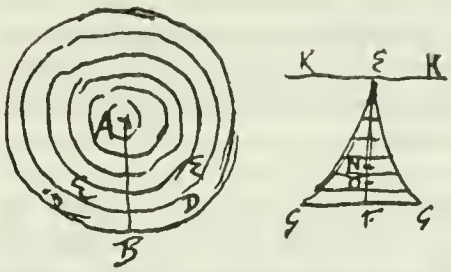
---

lum distantiarum" par rapport au centre de gravité qui doit être augmenté de EN^2 (de sorte qu'on obtient EN $\times$ OE) lorsque le point de suspension est en E. Voir p. e. la partie *B* de l'Appendice précédent.

[1]) Ceci peut s'écrire en notations plus modernes

$$2\pi \int_0^r r^3 dr = \pi r^2 . \tfrac{1}{2} r^2 \text{ ou } \tfrac{1}{2}\pi r^4; \text{ donc } \int_0^r r^3 dr = \frac{r^4}{4}.$$

[Fig. 155.]



omnium quadrata ſimul ſumta æqualia $\frac{3}{5}$ quadrati radij multiplicibus ſec. p. n.

Sit ſphæra primum diviſa in involucra ſphærica minimæ et æqualis craſſitudinis omnia circa idem centrum ordinata, et hæc deinde ſecta in particulas æquales, quarum in unoquoque involucro multitudo erit pro ratione magnitudinis, deinde accepta EF æquali radio AB, conſtituantur ad eam bina complementa $\frac{1}{2}$ parabolarum verticem habentium E punctum axem vero EK quæ ipſi FE perpendicularis ducatur. ſigura autem ex iſtis compoſita EGG ſecetur totidem lineis baſi GG parallelis et æqualibus interſtitijs a ſe invicem remotis quot ſunt ſuperficies ſphæram in involucra dirimentes. Sitque ſegmentum GG diviſum in partes æquales totidem quot ſunt in involucro ſphærico DD, itemque reliqua ſegmenta figuræ EGG ſecta ſint in ejuſdem magnitudinis particulas ijs quæ in ſegmento GG. Ergo cum involucra ſphærica ſint ſicut quadrata ſuorum radiorum, et ſegmenta quoque figuræ EGG ſint ut quadrata diſtantiarum ſuarum ad recta EK. patet ſegmenta involucris proportionalia eſſe ſi eodem in ordine ſumantur. Unde unicuique etiam ſegmentorum idem inerit numerus partium qui involucro ipſi reſpondenti. Et ſi a ſingulis proinde particulis ſegmentorum ad rectam EK perpendiculares cadant, erunt quadrata a particulis cujuſque ſegmenti eodem numero ac magnitudine cum quadratis a rectis quæ a particulis involucri reſpondentis ducuntur ad centrum A. &c. [2]).

---

[2]) En marge: „potest EGG conus poni de quo antea sit demonstratum". Suivant la Prop. XXII de la Pars Quarta (Fig. 112 de la p. 329 qui précède) les sections d'une pyramide ou d'un cône de même hauteur r sont proportionnelles à celles de la figure plane EGG ici considérée. La somme cherchée est donc égale à celle des carrés des distances de toutes les particules du cône au plan de la base GG, évidemment en supposant que le cône contient le même nombre de particules que la sphère.

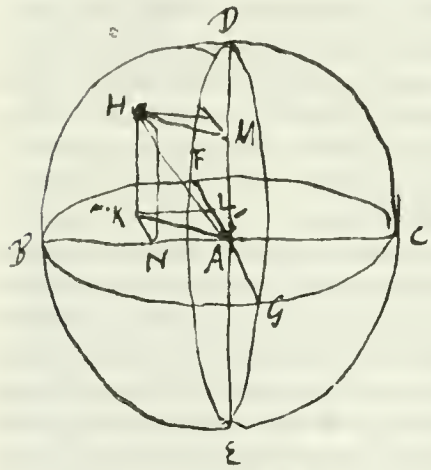
Son „premier rectangulum" — voir sur ce terme la p. 48 de l'Avertissement — est alors $\frac{3}{80} r^2$ d'après le paragraphe „Centrum oscillationis coni" de la Prop. XXII de la Pars Quarta. Pour obtenir la grandeur cherchée il faut y ajouter le carré de la distance du sommet au centre de gravité, c.à.d. $\frac{9}{16} r^2$. Comparez les calculs de l'Appendice précédent. On obtient alors la somme $\frac{3}{5} r^2$. L'on pourrait dire (comparez la note 1) que Huygens a ainsi démontré la formule

$\int_0^r r^4 dr = \frac{r^5}{5}$, ou encore qu'il a trouvé que le moment d'inertie d'une sphère homogène par rapport à son centre est $\frac{3}{5} Mr^2$, où M désigne la masse.

Propositio.

Si ſphæra in particulas minimas æquales diviſa intelligatur, et a ſingulis in planum per centrum ſphæræ ductum perpendiculares actæ, erunt harum omnium quadrata ſimul ſumta æqualia $\frac{1}{3}$ quadratorum a diſtantijs omnium particularum a ſphæræ centro, hoc eſt $\frac{1}{5}$ quadrati radij multiplici ſec. p. num.

[Fig. 156.]



Sit ſphæra [Fig. 156] cujus centrum A, ſectio per centrum circulus BGCF, cujus diameter BC. et intelligantur a ſingulis ſphæræ particulis perpendiculares ductæ ad planum BGCF. ſicut a particulis H ducta eſt HK. dico &c.

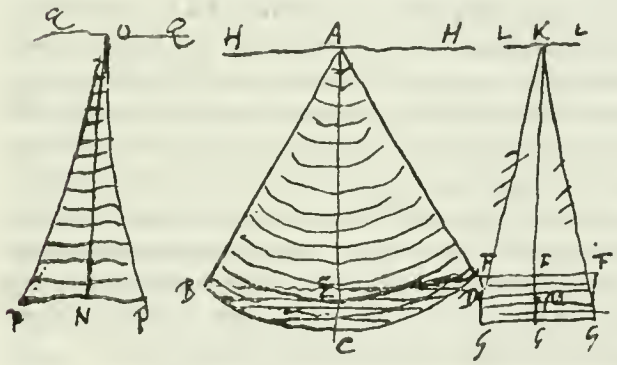
Secetur enim ſphæra alio plano per diametrum BC, quod ſit priori BGCF ad angulos rectos. Itemque tertio plano DGEF quod ſit rectum ad utrumque jam dictorum faciens in circulo BGCF ſectionem GF, et in circulo DBEC ſectionem DE. Et a puncto K ducantur ad BC, FG perpendiculares KN, KL, et jungantur KA, HA. Eſt igitur quadratum HA æquale quadratis HK et KA. Sed quadratum KA æquale quadratis KN, NA, ſive quadratis KN, KL. Ergo quadratum HA æquale quadratis tribus HK, KN, KL. Eſt autem KN æqualis perpendiculari quæ a puncto H duceretur in planum DBEC, et KL æqualis perpendiculari quæ duceretur ab eodem puncto H in planum DGEF. Ergo quadrata tria HK, KN, KL ſeu quadratum HA æquale quadratis diſtantiarum particulæ H a tribus planis quibus ſphæram per centrum ſecuimus. Eademque ratione erit quadratum diſtantiæ uniuscujuſque particulæ à centro A æquale quadratis diſtantiarum ejus particulæ a tribus dictis planis, et proinde quadrata omnium diſtantiarum a centro A æqualia quadratis omnibus perpendicularium a particulis in tria plana per centrum ſphæræ ducta. Atqui manifeſtum eſt quadrata omnium perpendicularium in quodlibet trium planorum ſimul ſumta eandem efficere quadratorum ſummam. Ergo ſumma perpendicularium in unum horum planorum velut BGCF æquatur $\frac{1}{3}$ quadratorum à diſtantijs omnium particularum a centro A. hoc eſt, per præc. $\frac{1}{5}$ quadrati radij multiplici ſec. num. part. in quas ſphæra diviſa intelligitur. quod erat demonſtrandum.

Propositio.

Poſita ſit prius ſphæra in particulas diviſa. ſi ab omnibus ducantur perpendiculares in axem ejus, erunt harum omnium quadrata æqualia $\frac{2}{3}$ quadratorum a diſtantijs particularum a centro ſphæræ, hoc eſt $\frac{2}{5}$ quadrati radij multiplicibus ſec. num. part.

In eadem figura ſit HM perpendicularis a particula H in axem DE, eodemque modo a ſingulis particulis in eundem axem perpendiculares ductæ intelligantur, cætera vero conſtructa ſint ut prius. Eſt ergo HM æqualis KA, cujus quadratum æquale quadratis KN, KL, quare et quadratum HM æquale quadratis KN, KL, hoc eſt quadratis perpendicularium a puncto H ductarum in planum DBEC, DGEF. Eademque ratione quadratum perpendicularis ab unaquaque particula in axem DE, æquale oſtendetur quadratis perpendicularium ejus particulæ a planis ijſdem duobus. Unde patet quadrata omnia perpendicularium a ſingulis ſphæræ particulis in axem DE ductarum æquari quadratis omnibus perpendicularium ab ijſdem particulis ductarum in plana DBEC, DGEF. Sunt autem quadrata perpendicularium a particulis omnibus in alterutrum horum planorum ductis æqualia quadratis perpendicularium ab omnibus ijſdem particulis ductarum in reliquum planum. Ergo quum, ex præc. ſit ſumma iſta quadratorum in unum planum æquale parti quintæ quadrati radij AB multiplici s.n.p. Erunt duæ ſummæ quadratorum a perpendicularibus particularum in duo plana DBEC, DGEF, hoc eſt, ſumma quadratorum a perpendicularibus quæ in axem DE ducuntur ab omnibus particulis æqualis $\frac{2}{5}$ quadrati AB multiplicibus s.n.p. quod erat demonſtrandum.

[Fig. 157.]



§ 3. In ſphæræ ſectore quoque centrum oſcillationis inveniri poteſt conſtituta ad latus figura plana proportionali quæ ex complemento parabolæ ad circumſcriptum rectangulum et ſegmento item parabolæ conflata erit [1]). in qua figura invenire licet omnia quibus ad ſolutionem problematis opus eſt. Sed alia ratione multo breviori atque hic peculiari res conficietur hoc modo.

Sit [Fig. 157] ſector ABCD, ex ſphæra cujus centrum A. axis vero ſectoris ſit AC

[1]) La partie supérieure de cette figure a latere, composée, comme celle de la Fig. 155, de deux „complementa parabolæ", correspondrait évidemment à la partie conique du secteur de sphère, tandis que la partie parabolique inférieure correspondrait au segment de la sphère qui termine le secteur (comparez la p. 470 du T. XVI ou plutôt la p. 331 qui précède).

ſuſpendique intelligatur ab axe horizontali per A punctum ducto. Itaque invenienda eſt ſumma quadratorum a diſtantijs particularum ſinguli ſectoris ab axe illo. ſive ſummæ duæ diſtantiarum a plano horizontali AH, et a plano per axem ſectoris AC ducto. Hæ enim diviſæ [1]) per diſtantiam quæ eſt à ſuſpenſione A ad centrum gravitatis ſectoris multip. s.n.p. dabit diſtantiam centri oſcillationis ab eadem ſuſpenſione A.

Ut ergo primum inveniatur ſumma quadratorum a plano horizontali AH. intelligatur ſector diviſus ſuperficiebus ſphæricis æquali intervallo diſtantibus et quarum omnium centrum idem A, fietque ut involucra ſphærica hoc modo formata eandem habeant inter ſe rationem quam quadrata radiorum ſuarum ſphærarum utque in ſingulis involucris pro ratione magnitudinis numerus particularum minimarum contineatur.

Quod ſi vero involucrum ejuſmodi, puta extremum BCF ſecetur planis horizontalibus æqualiter inter ſe diſtantibus, ſcindetur ijs involucrum in partes æquales æque ac ſphærica ſuperficies, de qua ex Archimede facile hoc ita ſe habere oſtendetur [2]). Itaque figura uni iſti involucro proportionalis a latere ponenda erit rectangulum FG, parem involucro altitudinem habens adeo ut ſi ▭ hoc in totidem particulas æquales ſectum intelligatur ac involucrum BCD quadrata a diſtantijs earum ab recta LL quæ eadem ſit altitudine cum plano HH, æqualia futura ſint quadratis diſtantiarum particularum involucri BCD a plano HH. Sunt autem quadrata diſtantiarum particularum ▭^{i} FG ab KL æqualia $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis FG [3]) una cum quadrato MK (poſito ſcilicet M centro gravitatis ▭^{i} FG) multiplicibus per numerum particularum ipſius rectanguli. ergo et quadrata a diſtantijs particularum involucri BCF æquantur $\frac{1}{12}$ quadrati FG et quadrato MK, multiplicibus ſec. num. part. ▭^{i} FG ſive ſec. num. part. ipſius involucri BCD. Sit recta NO quæ poſſit [4]) quadratum MK cum $\frac{1}{12}$ quadrati ab FG. Et conſtituantur ad ipſam NO complementa ſemiparabolarum ONP quarum vertices ad O, figuraque ab his compoſita ſecetur rectis baſi NP parallelis, quæ dividant axem NO in partes totidem æquales quot ſunt in axe AC factæ a ſuperficiebus ſphæricis. unde quidem ſegmenta figuræ OPP proportionalia erunt involucris ſphæricis ſectoris ABCD. Et ſi figura OPP in totidem particulas minimas æquales quot ſector diviſa intelligatur, erunt earum particularum totidem comprehenſæ ſegmento imo PP quot ſunt in involucro imo BCD. et in reliquis item ſegmentis ſingulis idem numerus particularum qui in involucris ordine ipſis reſpondentibus.

---

[1]) Il s'agit de la somme des „summæ duæ". C'est pourquoi Huygens met le verbe au singulier.

[2]) La proportionnalité de deux calottes sphériques, faisant partie de la méme surface sphérique, avec leurs hauteurs découle aisément de la Prop. XLII du Livre I „De Sphæra et Cylindro" d'Archimède, suivant laquelle chaque calotte est égale au cercle dont le rayon est la distance du point central de la calotte à un point de son contour.

[3]) $\frac{1}{12}$ FG^2, produit de $\frac{1}{2}$ FG par $\frac{1}{6}$ FG, est le „premier rectangulum" du rectangle; il faut y ajouter MK^2 pour obtenir la grandeur cherchée. Comparez la note 2 de la p. 421.

[4]) C.à.d. dont le carré est égal à . . .

Quia autem quadrata omnia diſtantiarum particularum involucri BCD à plano HH æqualia oſtendimus quadrato MK + $\frac{1}{12}$ quadrati FG multiplicibus ſec. n. partic. involucri ipſius. Ergo et quadrata eadem diſtantiarum æqualia quoque erunt quadrato NO multiplici ſecundum num. part. ſegmenti PP. hoc eſt quadratis omnibus a diſtantijs particularum ſegmenti PP ab recta OQ baſi figuræ parallela. Eademque ratione quadrata à diſtantijs particularum quæ in ſingulis involucris à plano HH æqualia erunt quadratis a diſtantijs particularum ſegmenti reſpondentis figuræ OPP ab recta OQ. Quamobrem cum ſumma quadratorum a diſtantijs omnium particularum figuræ OPP ab recta OQ æquetur $\frac{3}{5}$ quadrati ON, ſicut cum de pyramide ageremus oſtenſum eſt [5]), etiam ſumma quadratorum a diſtantijs omnium particularum ſectoris ABCD a plano HH æquabitur $\frac{3}{5}$ quadrati ON.

Dicatur radius AC a; EC vel FG b, altitudo nempe ſuperficiei ſphæricæ BCD. Quia ergo qu. ON æquale fecimus qu. KM quæ eſt $a - \frac{1}{2}b$ et $\frac{1}{12}$ qu. FG ſive b. Erit qu. ON æquale $aa - ab + \frac{1}{3}bb$, cujus tres quintæ ſunt $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{5}ab + \frac{1}{5}bb$. quibus proinde multiplicibus per num. part. ſectoris ſphærici ABCD æqualia erit dicta ſumma quadratorum a diſtantijs omnium particularum ſectoris ejuſdem a plano AH.

Jam porro quadrata diſtantiarum a plano per axem ſectoris AC invenienda eſſent. Sed eorum ſumma facile inveſtigabitur ex ſumma jam inventa quadratorum a diſtantijs a plano AH et ex ſumma cognita quadratorum a diſtantijs a centro A, quæ æqualia ſunt $\frac{3}{5}$ qu.i AC multiplicibus ſec. num. p. ſectoris [6]). Nam ſi a ſingulis his quadratis à diſtantia alicujus particulæ a centro A auferantur ſingula illorum quæ fiunt a diſtantia ejuſdem particulæ a plano AH, manifeſtum eſt relinqui ſingula quadrata diſtantiæ ejuſdem particulæ ab axe AC. ac proinde ſi a ſumma quadratorum diſtantiarum a centro A, hoc a $\frac{3}{5}aa$, auferatur ſumma quadratorum a diſtantijs à plano AH, hoc eſt $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{5}ab + \frac{1}{5}bb$, relinquetur ſumma quadratorum a diſtantijs omnibus ab axe AC, quæ erit $\frac{3}{5}ab - \frac{1}{5}bb$. Hujus vero ſummæ quadratorum à diſtantijs ab axe, ſemiſſis eſt ſumma quadratorum a diſtantijs a plano per axem AC, ut facile intelligitur ex ijs quæ de circulo oſtendimus prop. . . [7]) ſi nempe ſector totus in ſegmenta circularia dividi intelligatur. Ergo ſumma quadratorum a diſtantijs a plano per axem erit $\frac{3}{10}ab - \frac{1}{10}bb$. quibus additis ad ſummam ſupra inventam quadratorum a diſtantijs a plano AH, nempe $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{5}ab + \frac{1}{5}bb$, fit ſumma quadratorum a diſtantijs ab axe oſcillationis per A punctum ducto, $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{10}ab + \frac{1}{10}bb$. quæ nempe multiplicia intelliguntur s. n. part. ſectoris.

Applicando itaque planum æquale his $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{10}ab + \frac{1}{10}bb$ ad intervallum inter

---

[5]) Comparez la note 2 de la p. 421.

[6]) D'après la première partie du § 1.

[7]) Il s'agit de la proposition qui constitue la deuxième partie du § 1 [Fig. 154].

centrum A et centrum gravitatis ſectoris, quod eſt $\frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b$ [1]), fiet diſtantia centri oſcillationis ab eodem centro A, $\frac{4}{5}a + \frac{4bb}{30a - 15b}$, hoc eſt quatuor quintæ radij, cum quatuor decimisquintis rectæ cujuſdam, quæ ſit ad ſinum verſum ſectoris EC [2]), ſicut hic ad reliquam partem diametri ſphæræ. Unde ſi pro ſectore hemiſphæra fuerit, erit hæc diſtantia $\frac{16}{15}a$. Ut autem in alia quavis ſuſpenſione ſectoris, dummodo ab axe qui ſit æquidiſtans plano circuli BD, habeatur longitudo penduli iſochroni, oportet a plano invento $\frac{3}{5}aa - \frac{3}{10}ab + \frac{1}{10}bb$, auferre quadratum dictæ diſtantiæ $\frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b$, unde relinquitur $\frac{3}{80}aa + \frac{21}{80}ab - \frac{13}{320}bb$ rectangulum diſtantiarum [3]). quod nempe applicatum ad diſtantiam centri gravitatis ab axe oſcillationis quolibet [1]) dabit intervallum quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis.

Quod autem diximus centrum gravitatis ſectoris diſtare a centro A $\frac{3}{4}a - \frac{3}{8}b$ facile oſtenditur diviſo ſectore ut fecimus in involucra concentrica, quorum ſingulorum centrum gravitatis altitudinem ipſorum bifariam dividit [4]).

---

[1]) C.à.d. en divisant la première grandeur par la deuxième.

[2]) La flêche EC ou b constitue le „sinus versus" de l'arc BCD, donc aussi celui du secteur.

[3]) Comparez p. e. la note 3 de la p. 419 ou la note 2 de la p. 421.

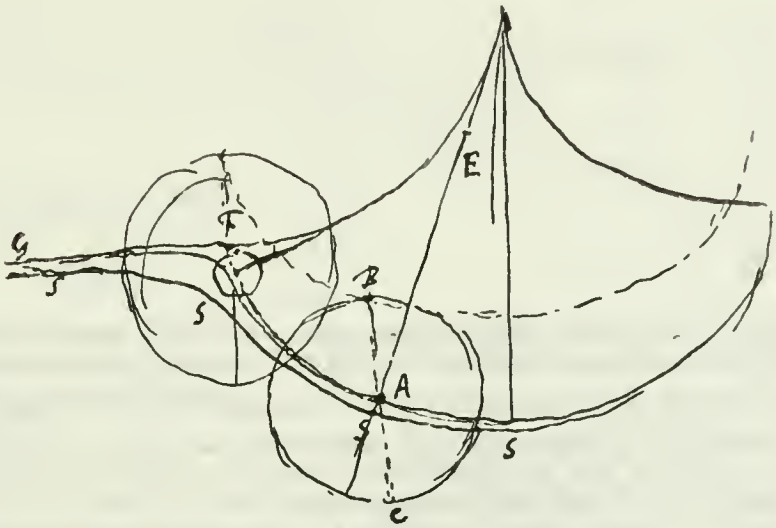
[4]) Il résulte en effet de ce théorème sur le centre de gravité d'une calotte sphérique que le centre de gravité d'un secteur sphérique coïncide avec celui d'un cône de hauteur $a - \frac{1}{2}b$ dont le centre de la sphère constitue le sommet.

APPENDICE IV

À LA PARS QUARTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

1670[1]).

[Fig. 158.]



Poteſt ſphæra ſeu pondus quodcumque BC [Fig. 158] imo pendulo ita affigi ut ſit mobile circa axem A, quo fiet ut ſingula puncta ponderis ſeu particulæ deſcribant cycloides easdem. Nam ſi immobiliter affixum ſit virgæ EA, videtur ex ratione centrorum agitationis quæ continuè mutabuntur, aliqua inæqualitas timenda. quam tamen inſenſibilem puto. Nam licet linea illa centrorum agitationis ſit verbi gratia SSS, non ideo putandum ſphæram BC ea lege moveri ac ſi incederet [2]) per curvam SSS. quæ in infinitum extenditur juxta aſymptoton FG. Nunquam enim rediret [3]).

---

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 254 du Manuscrit D, qui porte la date du 15 janvier 1670. Comparez la Prop. XXIV de la Pars Quarta, ainsi que le paragraphe B. à la p. 46 de l'Avertissement.

[2]) Le sujet de ce verbe n'est évidemment pas la „sphaera BC" mais le „centrum oscillationis". En effet, puisque le centre d'oscillation de la sphère, suspendue à un fil impondérable, est situé au-dessous du centre de gravité de la sphère d'une longueur $\frac{2}{5}\frac{r^2}{b}$ — voir les p. 470—472 du T. XVI ou 330—333 du présent Tome —, où r est le rayon de la sphère et b la distance de son centre de gravité au point de suspension, il en résulte que théoriquement le centre d'oscillation s'éloigne à une distance infinie lorsque b s'annule. On peut supposer que le fil est attaché précisément au centre de la sphère et que, grâce a une fente infiniment étroite pratiquée dans la sphère, celle-ci peut venir s'appliquer sur la lame courbée de telle manière que le centre touche la lame exactement de sorte que la distance du point de suspension au centre de la sphère devient nulle. Lorsque dans ce cas la longueur du fil est égale à celle de l'arc entier de la cycloïde lequel possède à son extrémité F une tangente horizontale, le centre d'oscillation s'éloigne à l'infini dans une direction horizontale comme l'indique la figure.

[3]) Il n'est certes nullement permis d'admettre que dans le cas considéré le temps d'une oscillation deviendrait infini, ce qui impliquerait, du moins si l'on admet la réversibilité du mouvement, que la sphère, placée par un expérimentateur dans la position extrême dont nous avons parlé dans la note 2, ne parviendrait pas, théoriquement, à se détacher de la lame, ce qui est franchement absurde.

Quelle que soit la valeur du raisonnement de Huygens, celui-ci ne peut en tout cas pas servir pour évaluer la grandeur de la „inæqualitas timenda".

Il serait intéressant de connaître la forme des lames courbées correspondant aux oscillations tautochrones d'un corps de grandeur finie suspendu à un fil impondérable. L. Euler, dans son travail de 1753 „De Motu tautochrono Pendulorum compositorum" déjà cité dans la note 1 de la p. 46 de l'Avertissement, trouve de la courbe en question une équation différentielle qu'il ne réussit à intégrer approximativement que dans le cas où le corps est „valde ponderosum simulque minimum, ac præterea oscillationes ampliores excludantur".

APPENDICE V

À LA PARS QUARTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

1670[1]).

20 Jan. 1670.

$$\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c} \infty s \text{ [2])} \infty 720 \text{ debebat poni } 1440 \text{ [3])}.$$

$$a \infty \frac{\frac{1}{2}b + c.\ 720}{\frac{1}{3}b + c}$$

$a \infty 722\frac{2}{3}$ vel 722,4
$b \infty 1$ 2
$d \infty 1$ 1444,8
$c \infty 50$

$s \infty 1440$. tres pedes horarij.
$a \infty 1444{,}8$
$b \infty 1$
$d \infty 1$
$c \infty 50$

$$f \infty \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$$

$$f \infty \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + 72962\,p - 105061210} \text{ [4])}$$

---

[1]) La Pièce est empruntée aux p. 258—260 du Manuscrit D. Elle se rapporte au réglage de la marche de l'horloge à pendule par le déplacement du petit poids curseur dont il est question aux p. 338—347 qui précèdent.

Comparez sur ce sujet les p. 424—433 du T. XVI et 105—111 du T. XVII.

[2]) Comparez l'équation $x =$ Etc. de la p. 424 du T. XVI, ainsi que la p. 340 du présent Tome, où les notations sont les mêmes qu'ici.

[3]) Dans la suite Huygens prend en effet 1440 pour la longueur du pendule isochrone avec le pendule ne portant pas encore le poids curseur, comme il le fait aussi à la p. 345 de l'„Hor. osc." Comparez la note 1 de la p. 432.

[4]) Ces formules (où f désigne la distance du poids curseur au point de suspension et p la longueur du pendule isochrone lorsque le poids curseur se trouve quelque part sur la verge du pendule considéré) et la table qui suit s'accordent avec celles des p. 344—347 qui précèdent.

1440 / $\frac{1}{4}$ s.	ratio 1440 ad 1439,75 duplicata facit 1440 ad
1439,75	1439,50. *p* ∞ 1439,50 ut 15″ acceleretur.
	. . . . . [1])
	7,0 lineæ pedis horarij.

p ∞ 1439, ut 30″ acceleretur.

. . . . . .

15,2 lineæ pedis horarij. et ſic ubique.

p ∞ 1438,50	ut 45″	acc.	. . .	23,70	partes à centro oſcillationis [2])
p ∞ 1438	ut 1′	accel.	. . .	32,55	ſurſum accipiendæ, in decimis
p ∞ 1437,50	ut 1′,15″	acc.	. . .	41,91	linearum pedis horarij [3]).
p ∞ 1437	ut 1′,30″	acc.	. . .	51,75	
p ∞ 1436,50	ut 1′,45″	accel.	. . .	62,21	
p ∞ 1436	acc.° 2′	. . .	. . .	73,44	acceleratio horologij ſpatio 24
p ∞ 1435,50	acc. 2′,15″	. . .	. . .	85,605	horarum.
p ∞ 1435	acc.° 2′,30″	. . .	. . .	99,03	
p ∞ 1434,50	acc. 2′,45″	. . .	. . .	114,105	
p ∞ 1434	acc.° 3′	. . .	. . .	131,85	
p ∞ 1433,50	acc.° 3′,15″	. . .	. . .	154,35	
p ∞ 1433	acc. 3′,30″	. . .	. . .	192,612	
p ∞ 1432,50	. . .	. . .	. . .	non poteſt.	

[1]) Nous omettons les calculs.

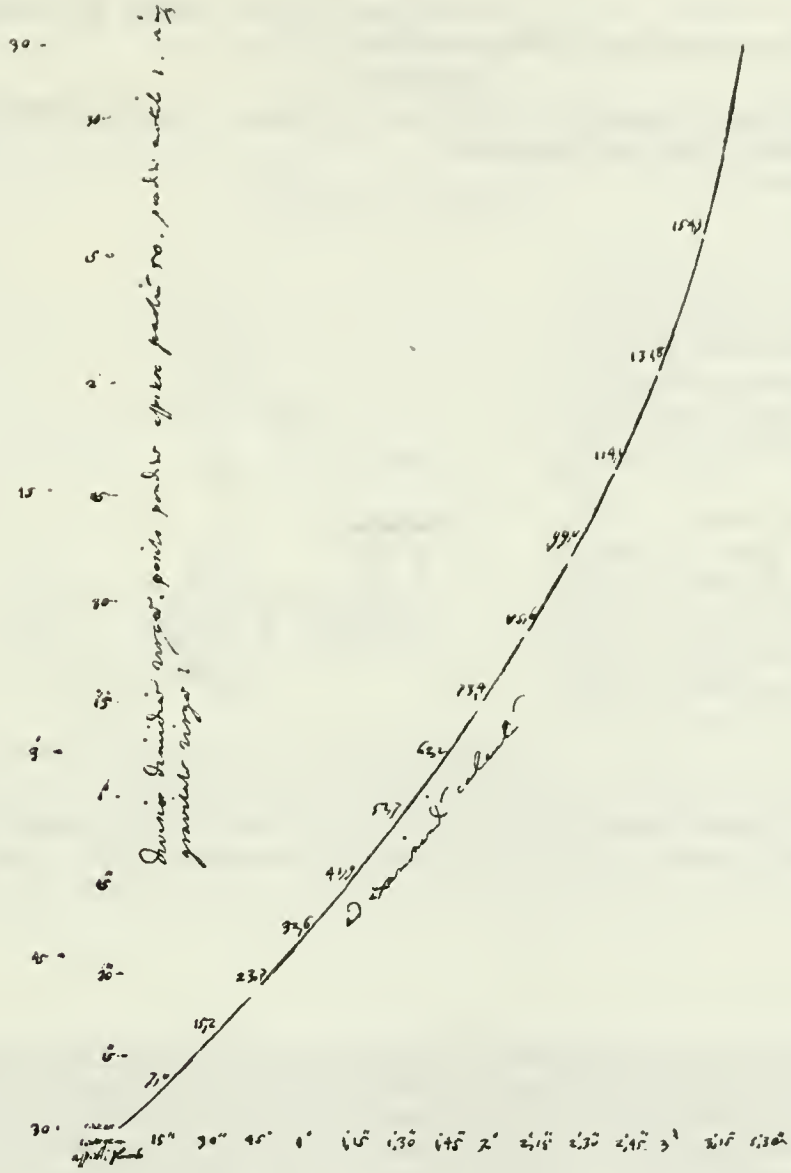
[2]) C.à.d. à partir du centre d'oscillation du pendule dépourvu du poids curseur.

[3]) Ou plutôt: in lineis pedis horarii.

[4]) La Fig. 159 est la reproduction, à une échelle de 0,6, de la figure de Huygens qui se trouve sur une feuille détachée du Manuscrit D. La courbe et les chiffres de la ligne horizontale correspondent à la table qui précède. Les chiffres écrits près de la courbe, qui donnent les ordonnées, représentent en lignes du pied horaire les distances du poids curseur au centre d'oscillation fixe indiqué sur le pendule, lorsque la marche de l'horloge doit être accélérée de 15″, 30″ etc. par 24 heures. Les deux colonnes verticales à gauche représentent ces mêmes distances à plus grande échelle, c.à.d., dans la figure de Huygens, en grandeur absolue: il faut supposer la colonne à gauche placée au-dessus de l'autre. Ces colonnes correspondent à deux des trois colonnes (ou parties du pendule) de la Fig. 17, IV de la p. 71.

On lit dans la Fig. 156: ad examinandum calculum — divisio dimidiæ virgæ, posito pondere appenso partium 50, pondere mobili 1, itemque gravitate virgæ 1. — centrum oscillationis — centrum gravitatis appensi plumbi.

[Fig. 159.][4])



Le pied de Paris moins 5 lignes fait le pied de Rijnland. d'ou il s'enſuit que celuy de Paris eſt a celuy de Rhijnl. comme 144 ad 139.

Le pendule de ſecondes eſt de 3 pieds $8\frac{1}{2}$ lignes de Paris. que je poſe egal a 3 pedes horarij, d'ou s'en ſuit que 3 pd. 2 pou. $\frac{3}{10}$ de lign. de Rijnl. font les meſmes 3 pieds horaires.

pd. lig. po

139 — — 144 — — 3. 0. $8\frac{1}{2}$ ou 36,708 / 38,029 pollices Rijnl. longitudo penduli ſecundorum ſeu 3 pedum horariorum.

3 ped. chron.

1440 — — — 1444,8 [1]) — — — 432 / 433,44 1,44 lig. diſtantia centri oſcillationis a centro gravitatis penduli compoſiti [2]).

---

[1]) C'est le rapport de la longueur du pendule isochrone (note 3, p. 429) à celle du pendule réel ou plutôt à celle du pendule idéalisé (considéré comme identique avec le pendule réel) composé d'une verge pondérable et d'un poids punctiforme à son extrémité inférieure, la longueur *a* de ce pendule idéalisé étant la distance du point de suspension au poids punctiforme. La longueur du pendule isochrone est égale par hypothèse à trois „pedes horarii" ou „pedes chronici", comme Huygens écrit ici, c.à.d. à 3 × 144 ou 432 lineæ pedis horarii.

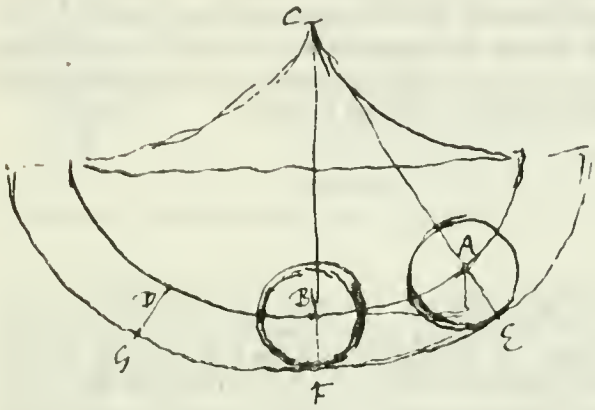
[2]) Cette distance de 1,44 linea pedis horarii du centre d'oscillation au centre de gravité du pendule idéalisé (évidemment dépourvu du poids curseur) est la distance CA dans la Fig. 17, IV de la p. 71. Comme la note précédente l'indique il faut prendre ici *cum grano salis* l'expression „centrum gravitatis penduli compoſiti". À la p. 115 qui précède Huygens parle à propos de la Fig. 17, IV du „centrum gravitatis ponderis X".

APPENDICE VI

À LA PARS QUARTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1692 ou 1693][1].

[Fig. 160.]



Pendulum pondus cujus centrum gravitatis A [Fig. 160] per Cycloidem delatum AB, acquirit in puncto B infimo celeritatem qua per arcum BD æqualem BA ascendat.

Si vero annulus gravitate præditus, et tamen ut peripheria simplex consideratus volvatur in paracycloide [2]) EF, ita ut centrum ejus describat cycloidis portionem AB, is quoque vim collegit, ubi in B pervenit, qua ascendat revolvendo usque in D.

Sed quia in B transiens æqualis motus quantitas est circa centrum in partibus ipsum constituentibus, ac in ijsdem motu horizontali pergentibus per præcedentem [1]), necesse est dimidium virium acquisitarum revolutione per EF, cessisse in motum circulationis circa centrum annuli, dimidium vero reliquum in motum horizontalem annuli totius [3]).

---

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 171 (numération de Huygens) du Manuscrit II. Les dates du 18 déc. 1692 et du 31 janvier 1693 se trouvent respectivement aux p. 155 et 172. La feuille 169—170 a été enlevée par Huygens qui a noté sur la p. 171: „j'ay dechirè icy une feuille". Celle-ci contenait sans doute des considérations ou des calculs relatifs à la présente Pièce puisque les mots „per præcedentem" du troisième alinéa s'y rapportent évidemment.

[2]) La paracycloïde est donc une courbe parallèle à la cycloïde, c.a.d. un lieu de points à égales distances d'elle.

[3]) Apparemment Huygens admet ici que pour un corps donné une chute d'une hauteur déterminée de son centre de gravité produit, lorsque tout frottement ou résistance du milieu fait défaut, une quantité déterminée de „vires" quelle que soit le mouvement du corps. La suite fait voir que les „vires" considérées sont pour toute particule du corps proportionnelles au

Ergo annulus ad B delatus habet in motu horizontali dimidium virium quas haberet si absque ulla revolutione ex filo pendens venisset: hoc est, habet vires quibus ascendere possit per dimidiam altitudinem arcus AB. Quam ob rem celeritatem horizontalem habebit quæ sit ad celeritatem horizontalem descendentis ut pendulum, sicut 1 ad $\sqrt{2}$, ut notum ex legibus ascensus. Sed ijsdem rationibus in quovis loco portionis ABD ostenditur eandem esse rationem lationis centri ex revolutione acquisitæ, ad lationem quem penduli formâ descendens vel ascendens haberet. Ergo tempus totius revolutionis annuli per curvam EG, erit ad tempus vibrationis penduli per arcum AD, quæ $\sqrt{2}$ ad 1, seu proxime quæ 7 ad 5.

Pro pendulo annulo melius accipietur, pondus velut punctum in A centro filo affixum. Nam ipse annulus paulo lentiores vibrationes habebit quam pondus in puncto A collectum, quoniam aliqua particula virium absumpta est in conferendo motu exiguo circa centrum quo radius ex positu AE venit in BF. qui motus juvat rursus in ascensu, quod continuatus conatur disponere radium ex situ BF in DG [1]).

---

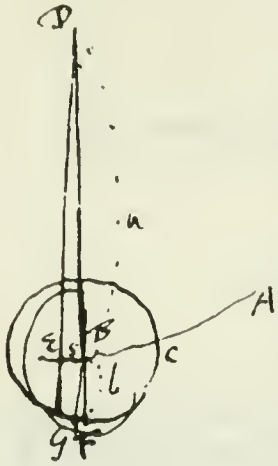
carré de la vitesse. Comparez le passage de 1690 que nous avons cité dans le troisième alinéa de la note 6 de la p. 359 du T. XVI. D'ailleurs Huygens parlait déjà en 1661 de la „vis motus" proportionnelle au carré de la vitesse: voir le troisième alinéa de la p. 376 du T. XVI. Le principe admis ici n'est qu'une forme différente de celui de 1659 (T. XVI, p. 357 et 385—391). La „force ascensionelle" totale du corps doit être telle que lorsque chacune de ses particules s'élève à la plus grande hauteur possible, le centre de gravité de toutes les particules se trouve à la hauteur d'où est descendu le centre de gravité du corps partant du repos.

Huygens commence prudemment par considérer un cas particulier, le plus facile de tous, celui où le corps qui descend en roulant est un cylindre ou plutôt un simple anneau infiniment mince („peripheria simplex"). En effet, il n'est pas de toute évidence que la $\sum mv^2$, où v représente la vitesse totale par rapport à la terre (considérée comme immobile) d'une particule de masse m, peut être décomposée en une somme de deux termes dont l'un représente la „force vive", pour nous servir de l'expression de Leibniz (T. XVI, p. 359, note 6) du mouvement progressif et l'autre celle du mouvement de rotation. Voir la note suivante.

Huygens commence par établir qu'au point le plus bas la „motus quantitas" de l'anneau est composée de deux parties égales, correspondant aux deux mouvements nommés. Apparemment il désigne ici par „motus quantitas", contrairement à l'usage ancien (T. XVI, p. 359), la somme $\sum mv^2$ et non pas $\sum mv$: pour cette dernière la somme des deux $\sum$ partielles (elles aussi égales l'une à l'autre) ne donne pas la $\sum$ totale. La décomposition de la „force vive" en deux parties égales s'étant montrée possible pour le cas de l'anneau roulant, et cela non seulement au point le plus bas mais aussi partout ailleurs, Huygens en tire la conclusion que le mouvement est $\sqrt{2}$ fois plus lent que lorsqu'il n'est que progressif, ce qui est approximativement le cas lorsque l'anneau est suspendu à un long fil.

[1]) La décomposition de $\sum mv^2$ en deux parties égales s'applique, dans le cas de l'anneau, à un mouvement progressif ou de translation le long d'une partie infiniment petite de la courbe cycloidale, et à un mouvement de rotation autour du centre de l'anneau.

[Fig. 161.]



Ut s [Fig. 161] ad $\frac{sb}{a}$, hoc eſt ut a ad b ita celeritas motus horizontalis impreſſus toti ſimul annuli circumferentiæ, ad celeritatem eidem impreſſam motu circa centrum. ad quos motus imprimendos oportet vires inſumi quæ ſint ut aa ad bb. ac proinde ſi totæ vires deſcenſu arcus acquiſitæ ſint $aa + bb$ erunt inſumtæ vires in motum horizontalem aa. à quibus et aſcenſus producitur aa, ſi totus aſcenſus ad altitudinem arcus ſit $aa + bb$. Hinc celeritas horizontalis annuli in B ad celeritatem penduli ſimplicis DB ut a ad $\sqrt{aa + bb}$. Et rurſus longitudo penduli quod ſit annulo iſochronum erit ad DB ∞ a ut $aa + bb$ ad aa. hoc eſt ut $a + \frac{bb}{a}$ ad a. Eoque iſta longitudo erit $a + \frac{bb}{a}$. Quod convenit cum noſtris de centro oſcillationis. Idque hic obiter examinare volui.

Hinc nova demonſtratio centrorum oſcillationis inveniri poteſt [2]).

Voir encore au sujet de cet Appendice la fin de notre aperçu de la „Controversia" à la p. 466 qui suit.

On a généralement, en désignant par v_x la projection de v sur un axe X:

$$\Sigma m v_x^2 = \Sigma m . v_{o_x}^2 + \Sigma m \left(v_x - v_{o_x}\right)^2;$$

v_{o_x} est la projection sur le même axe de la vitesse v_o du centre de gravité du corps considéré. En ajoutant les équations de ce genre correspondant à trois axes rectangulaires entre eux, il en résulte

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m . v_o^2 + \Sigma m \left[\left(v_x - v_{o_x}\right)^2 + \left(v_y - v_{o_y}\right)^2 + \left(v_z - v_{o_z}\right)^2 \right],$$

c.à.d. la force vive totale — nous pouvons, suivant la pensée de Huygens, considérer comme „force vive" le produit de $\Sigma m v^2$ par un facteur λ indéterminé, comme nous l'avons fait aux p. 22 et suiv. du T. XVI — est égale à celle du corps considéré comme se mouvant en entier

avec la vitesse du centre de gravité + la force vive résultant du mouvement par rapport au centre de gravité. Huygens avait peut-être établi ce théorème général, sans que la forme de sa démonstration lui plût. Peut-être aussi s'était-il borné au cas où tous les points du corps se meuvent parallèlement à un même plan.

Le théorème implique, comme Huygens le dit, que le mouvement roulant de l'anneau est $\sqrt{2}$ fois plus lent que celui (c'est le cas considéré dans l'Appendice IV qui précède) d'une translation parallèle le long de la courbe cycloïdale. Mais dans le cas de la translation parallèle la $\sum mv^2$ totale reste la même lorsqu'on suppose la masse de l'anneau concentrée en son centre, puisque cette somme ne dépend que de la masse et de la descente du centre de gravité. Or, lorsque le corps est punctiforme on peut tout aussi bien le supposer attaché au fil impondérable de manière à accomplir une oscillation ordinaire, puisque la force vive de la rotation d'un point (comparez la note 2 de la p. 421 qui précède) est négligeable.

[2]) En effet, Huygens eût pu démontrer de cette façon la formule générale de la Pars Quarta, non seulement pour l'anneau mais pour un corps quelconque. Dans le cas de l'oscillation ordinaire sans roulement considérée dans l'„Hor. osc." la formule de la note précédente se réduit, après une division par le carré de la vitesse angulaire, à

$$I = Mb^2 + I',$$

relation déjà considérée à la p. 47 de l'Avertissement. Remarquons que b désigne ici la distance du point de suspension au centre de gravité, laquelle est appelée a dans la Fig. 161. La force vive totale est proportionnelle à I. Elle se compose de la force vive, proportionnelle à Mb^2, de la translation du corps concentré en son centre de gravité et de la force vive, proportionnelle à I', de la rotation du corps autour de ce centre. La force vive totale du mouvement est par conséquent à la force vive de la translation dans le rapport $I : Mb^2$ ou $1 + \frac{I'}{Mb^2} : 1$. Comme dans le cas de l'anneau, le pendule quelconque considéré se meut donc plus lentement que si son poids était concentré en son centre de gravité, auquel cas la force vive totale — comparez la fin de la note 1 — serait une force de translation. Le carré de la période du pendule réel est à celui de la période du pendule simple fictif de longueur b comme $1 + \frac{I'}{Mb^2} : 1$. Il en résulte que la longueur l du pendule simple isochrone avec le pendule réel est à b dans ce même rapport.

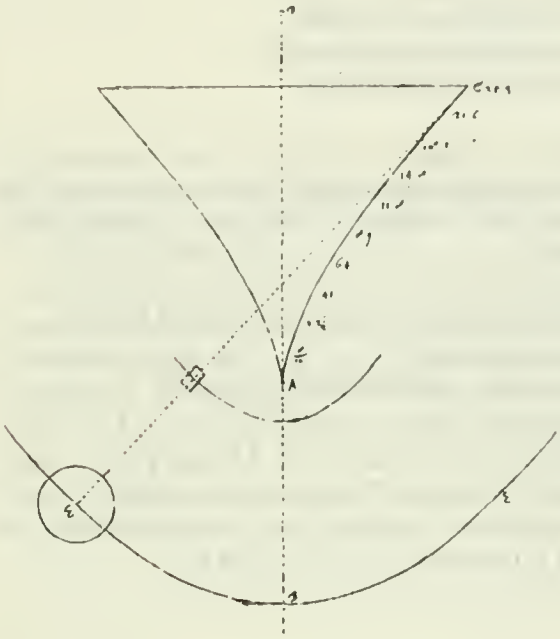
Lorsqu'on prend $I' = M\rho'^2$, la proportion $l : b = 1 + \frac{I'}{Mb^2} : 1$ se réduit à $l = b + \frac{\rho'^2}{b}$, conformément à la formule de la p. 48 de l'Avertissement.

APPENDICE I

À LA PARS QUINTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[1667—1668.][1]

[Fig. 162.]



$\frac{801}{100}$ pollicis, latus rectum paraboloidis.
AB [Fig. 162] ∞ $\frac{8}{27}$ lateris recti paraboloidis AC ∞ $\frac{1}{2}$ latus rectum parabolæ BE.
AD $\frac{1}{2}$ latus rectum paraboloidis AC. divisum in 50 partes.
AB ∞ 2,38 pollicis Rhenolandici. AD ∞ 4 poll.[2]) ∞ $\frac{1}{2}$ l. r. paraboloidis.

---

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 215 du Manuscrit C. Les p. 203 et 231 portent respectivement la date du 5 septembre 1667 et du 25 février 1668.

Nous ne reproduisons pas les calculs numériques. Les chiffres écrits auprès de la „paraboloïde" font bien voir que celle-ci a été construite par points. La figure semble indiquer que les horloges à pendule conique étaient elles aussi pourvues d'un poids curseur (ou „poids coulant" suivant l'expression de Huygens; voir p. e. la p. 155 du Manuscrit C).

[2]) Dans la Fig. 162 originale AD a une longueur d'environ 10,45 cm. Il en résulte pour le pied rhénan une longueur d'environ 31,35 cm, ce qui correspond à la valeur 31,39 adoptée à la p. 280 du T. XVI.

APPENDICE II

À LA PARS QUINTA DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM".

[?]

Horologij Oſcillatorij Pars V.
Conſtructionem aliam, ex circulari
pendulorum motu deductam, continens;
Et Theoremata de Vi Centrifuga.

[Le texte de ce manuſcrit diffère en quelques endroits du texte imprimé (p. 360—365). Par exemple, au lieu du mot „pertractavimus" de la l. 1 de la p. 361 le manuſcrit a: „exſecuti ſumus". Les autres variantes, aſſez rares d'ailleurs, ſont preſque toutes également inſignifiantes [2]).

Après les mots „conſtructa automata" de la l. 10 de la p. 361 le manuſcrit intercale: „cujus rei gratia [c.à.d. à cauſe de l'abſence de tout bruit] ab aliquibus expetita fuiſſe memini". Au lieu des mots „conſtructa fuere" des l. 6—7 de la page nommée le manuſcrit qui donne la même leçon avait primitivement l'expreſſion „conſtructa vidimus" [3]), ce qui porte à croire que les horloges à pendule conique ne furent pas toutes conſtruites comme celle de 1668 (voir la p. 267 du T. VI citée à la p. 10 qui précède) ſous la direction perſonnelle de Huygens. Toutefois cette expreſſion n'implique pas qu'un autre inventeur aurait trouvé la même choſe indépendamment de lui: comparez le mot „vidimus" de la l. 17 de la p. 63 du T. XVII [4]).]

---

[1]) Cet Appendice est emprunté aux f. 134 et suiv. des Chartæ mechanicæ.

[2]) Notons que le dernier alinéa de la p. 365 qui précède fait défaut dans le manuscrit et que dans la Prop. XII sur la force centrifuge (T. XVI, p. 318) le manuscrit omet à tort les mots „pondere æqualia".

[3]) Toutes les corrections sont, comme le texte primitif, de la main de Huygens.

[4]) Le mot „vidimus" se trouve également dans la l. 2 de la p. 73 du T. XVII; en cet endroit-là il s'agit d'une construction dont le mérite ne revient pas à Huygens mais à S. Coster.

OBJECTIONS DE ROBERVAL CONTRE LES DÉMONSTRATIONS DE L'AUTEUR DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM" ET RÉPONSES DE HUYGENS.

Avertiſſement.

Les principes dont Huygens part dans ſon „Horologium oſcillatorium" donnèrent lieu à de célèbres controverſes.

Parmi les lecteurs compétents beaucoup ſans doute ſe contentèrent d'admirer l'œuvre; témoin les paroles de Viviani citées par Huygens à la p. 51 du Manuſcrit E:

« Vinc. Viviani nel ragguaglio delle ultime opere del Galileo. 1674 [1]).

„La medeſima paſſione volle ancora con ſottiliſſimo progreſſo autenticare quel ſublime ingenio di Chriſtiano Ugenio nella opera ſua due anni ſono [2]) publicata e con ſtupor de' Matematici applaudita, trattante del moto de' Pendoli".

C'eſtoit de demontrer que les viteſſes acquiſes par des plans diverſement inclinez, mais d'egale hauteur perpendiculaire, ſont egales [3]) ».

---

[1]) Il s'agit de l'ouvrage de Viviani, intitulé „Quinto libro degli Elementi d'Euclide, ovvero Scienza Universale delle Proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo, con nuov'ordine distesa, e per la prima volta pubblicata da Vincenzio Viviani ultimo suo Discepolo. Aggiuntevi cose varie, e del Galileo, e del Torricelli; I Ragguagli dell' ultime Opere loro, con altro, che dall' Indice si manifesta. All' Altezza Sereniss.ma e Reverendiss.ma del Signor Principe Cardinale de' Medici". In Firenze; alla Condotta, MDCLXXIV. Les paroles citées (Viviani écrit: „ingegno" et „pubblicata") s'y trouvent à la p. 100. Huygens reçut le livre de Viviani en 1676; voir les p. 9 du T. VIII, 471 du T. IX et 292 du T. X.

[2]) Comparez sur l'expression *due anni ſono* le deuxième alinéa de la p. 64 qui précède.

[3]) Huygens démontre cette égalité pour un point pesant, dans la Prop. VI de la Pars Secunda (voir

Toutefois la critique elle auſſi — comment en eût-il pu être autrement? — ne tarda pas à ſe faire jour. Ce qui paraît être reſté inconnu à tous ceux qui s'y ſont intéreſſés, p. e. à J. L. Lagrange [1]), ainſi qu'à nous-mêmes [2]), c'eſt que les premières objections furent faites par Roberval. Ces objections, datant déjà de 1670, furent inſcrites par Huygens, avec ſes réponſes, dans le Manuſcrit D. Comme nous l'avons dit à la p. 36 qui précède, une partie des théorèmes avaient été rédigés en 1670. Huygens, rétabli de ſa maladie (p. 36) et n'ayant pas encore quitté Paris, paraît les avoir communiqués à Roberval ainſi que, peut-être, à quelques autres membres de l'Académie. La réponſe à la 7ième objection fait voir qu'il a apporté enſuite un changement au début de la Pars Quarta; il a ſupprimé la deuxième des *trois* hypothèſes qui s'y trouvaient primitivement [3]).

Ces objections amènent le lecteur à ſe demander quelles étaient en général les opinions de Roberval mécanicien. Malheureuſement nous n'en ſommes pas très bien informés, l'ouvrage principal de Roberval ſur la mécanique, qui comme beaucoup d'autres de ſes écrits n'avait pas été imprimé durant ſa vie, étant perdu [4]). Nous

---

la p. 141 qui précède). Nous avons remarqué (troisième alinéa de la p. 39) que Huygens y fait déjà usage de l'Hyp. I de la Pars Quarta, comme il le fait d'ailleurs aussi dans la Prop. IV de la Pars Secunda (dernières lignes de la p. 135).

Aux p. 99 et 100 Viviani raconte qu'en étudiant la „scienza de' moti naturali nuovamente promossa dal Galileo, e che allora appunto era uscita in luce" il s'était demandé s'il n'était pas possible de donner une démonstration du „supposto, che le velocita de' mobili naturalmente descendenti per piani d'una medesima elevazione sieno uguali tra loro". Son instituteur, le P. Clemente di S. Carlo, l'introduisit chez Galilée qui s'appliqua à donner cette démonstration. Galilée la lui dicta et des copies en furent envoyées à plusieurs personnes, e. a. à Benedetto Castelli; voir la lettre du 3 décembre 1639 de Galilée à ce dernier (Ed. Naz. T. XVIII, p. 125). C'est la Pièce, dit Viviani, „che io . . . somministrai all' ultima impressione di tutte l'opere di lui fatta in Bologna nel 1656, come quivi si vede a facce 132 del Terzo Dialogo". Il dit ensuite que E. Torricelli „confermò dipoi" cette proposition dans son Trattato de' Moti, quando non aveva avuto notizia ancora di quella di esso Galileo". Après avoir parlé de Huygens, Viviani ajoute finalement qu'une démonſtration fut également donnée par Alessandro Marchetti de Pise.

Comparez sur la démonstration de Galilée la remarque de Huygens et la note 2 à la p. 141 qui précède.

[1]) Voir la Section I de la Seconde Partie de sa „Mécanique analytique" de 1788, citée aussi in extenso dans le travail suivant (note 2).

[2]) „Christiaan Huygens et Jean le Rond d'Alembert" dans le périodique „Janus, Archives internationales pour l'Histoire de la Médecine etc." (Leyde, E. J. Brill) de 1915.

[3]) Comparez la note 1 de la p. 38 qui précède.

[4]) En 1650, Roberval écrit à Hevelius (lettre imprimée dans „Huygens et Roberval, documents

ignorons auſſi, ce qui eſt particulièrement regrettable, ſi Huygens avait reçu en 1665 ou plus tard un „traité de Roberval des pendules iſochrones" (voir la note 3 de la p. 54 qui précède) et en quelle manière Roberval a parlé en ou vers 1671 à l'Académie des Sciences ſur les centres de percuſſion [5]). Cependant la remarque de Huygens de 1693 (ſeptième alinéa de la p. 402 du T. X) fait voir que fort probablement Roberval n'a rien dit de bien important. Selon P. Tannery en 1666 il était „déjà éteint" [6]). Il eſt vrai que F. Vernon dit de lui en 1670 [7]) qu'il ne publie rien mais qu'à l'Académie il „diſcourſeth much & is a very plauſible ſpeaker and of acute reaſoning".

Roberval, nous l'avons dit à la p. 352 du T. XVI, avait trouvé dès 1646 la place du „centre de percuſſion ou d'agitation" dans le cas d'un ſecteur de cercle tournant dans ſon plan autour d'un axe paſſant par le centre du cercle. Il n'était pourtant pas convaincu, ne voyant apparemment aucune raiſon théorique pour l'admettre, que le centre de percuſſion fût identique avec le centre d'oſcillation. Il inclinait plutôt à croire — ce que ſon ami Merſenne jugeait auſſi poſſible (T. XVI, p. 351) — que cette identité n'exiſte qu'à peu près.

Or, qu'eſt-ce en ſomme que le centre de percuſſion? Nous avons vu (p. 57, note 6) que Fabry dit que lorſqu'un obſtacle arrête le corps au centre de percuſſion, il perd tout ſon mouvement et que ce centre (p. 56) eſt ſitué ſur une droite D telle que les moments de tous les „impetus" ou quantités de mouvement de part et d'autre de cette droite ſont égaux. Cette dernière formule eſt claire dans le cas d'une ſurface plane ſymétrique tournant autour d'une droite ſituée dans ſon plan et perpendiculaire à ſon axe de ſymétrie; d'après les exemples que Fabry (ou Mouſnier) en donne la droite D eſt alors une parallèle à l'axe de rotation et le centre de percuſſion occupe

---

nouveaux" par C. Henry, Leyde, E. J. Brill, 1879; Henry ajoute, p. 35, note 2, que l'original de la lettre a disparu) avoir achevé un traité de mécanique en huit livres; le dernier traitait „de centro percussionis potentiarum mobilium".

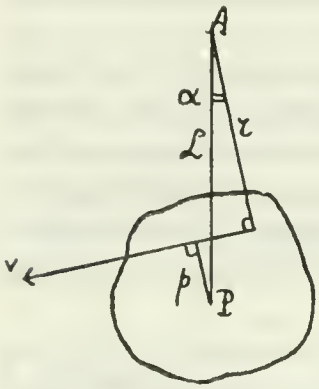
5) „Regiæ Scientiarum Academiæ Historia" Sec. ed. Autore J. B. du Hamel, Parisiis, J. B. Delespine, 1701, p. 98 (Cap. II de la Sectio Septima „De his quæ acta sunt annis 1670, 1671, & 1672. quæque ad Mathesim spectant): „Ac primum quidem de centro percussionis quod inter præcipua hujus scientiæ fundamenta numeratur, D. de Roberval fusè & subtiliter disseruit."

6) „Les Sciences en Europe 1648—1715", Ch. X (p. 396) du T. VI de l'„Histoire générale du IVe siècle à nos jours" de Lavisse et Rambaud.

7) Notre T. VII, p. 8.

évidemment ſur elle une ſituation centrale. Cependant Fabry ſemble vouloir donner une définition *générale*. Formulée correctement, celle-ci devrait être la ſuivante [1]: „Lorſqu'un corps ſuſpendu en un point tourne autour d'un axe paſſant par ce point, le centre de perculſion ſe trouve ſur une parallèle à cet axe telle que la ſomme algébrique des moments des quantités de mouvement de tous les points du corps autour de la parallèle eſt nulle; on ſuppoſe le corps arrêté par l'obſtacle à l'inſtant où ſon centre de gravité eſt auſſi bas que poſſible; le point de ſuſpenſion, le centre de gravité et le centre de perculſion ſont alors par hypothèſe ſitués ſur une même ligne droite."

[Fig. 1.]



Suppoſons l'axe de rotation, paſſant par le point de ſuſpenſion A, perpendiculaire au plan du papier [Fig. 1]. Soit p la plus courte diſtance de la parallèle à l'axe A paſſant par le centre de perculſion P et du vecteur repréſentant la viteſſe v d'un point quelconque ſitué à la diſtance r de l'axe A. Soit AP, ſitué dans le plan du papier $= L$. Il faut ſuivant notre définition que $\Sigma mvp = 0$, m étant la maſſe d'un point; ou bien $\Sigma mrp = 0$, puiſque la viteſſe angulaire eſt, à un inſtant quelconque, la même pour tous les points. Le bras de levier p eſt poſitif pour les moments agiſſant dans un ſens, négatif pour ceux qui agiſſent dans l'autre.

Or, on a pour tous les points du corps

$$p = L \cos\alpha - r.$$

En ſubſtituant cette valeur de p dans la formule précédente, on obtient

$$L = \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma mr.\cos\alpha}$$

ou $L = \frac{\Sigma mr^2}{Mb}$, M étant la maſſe totale et b la diſtance du centre de gravité du corps au point A en vertu de l'hypothèſe faite ſur l'inſtant et la place de l'arrêt [2]. Ainſi

---

[1]) On peut supposer avec Fabry (p. 56, note 4) que pour pouvoir arrêter le corps précisément au centre de percussion, on y ait pratiqué une fente ou un canal fort étroit.

[2]) Généralement, si l'on oppose l'obstacle au corps oscillant en un point choisi de telle manière que l'équation $\Sigma mrp = 0$ est vérifiée, $\Sigma mr \cos\alpha$ sera le produit de M par la projection du

défini, le centre de percuſſion coïncide donc avec le centre d'oſcillation. Nous avons remarqué (p. 58) qu'en 1664 — tout auſſi bien qu'en 1690, p. 462 du T. IX — Huygens ſemble admettre généralement cette identité des deux centres [3]) puiſqu'il dit que Fabry, cherchant le centre de percuſſion pour un cercle oſcillant *dans ſon plan*, aurait dû trouver ce centre à une diſtance de $\frac{3}{4}$ du diamètre du point de ſuſpenſion, c.à.d. à l'endroit qu'occupe, ſuivant le calcul de Huygens, le centre d'oſcillation [4]). Il eſt vrai qu'on peut également ſuppoſer qu'en 1664, partant d'une définition telle que celle donnée ici, Huygens n'ait calculé la ſituation du centre de percuſſion que pour le cas du cercle (et peut-être pour quelques autres ſurfaces oſcillant dans leur plan); mais cela paraît plus difficile que d'établir la formule générale et on n'en trouve rien dans les manuſcrits.

Nous ignorons ſi Roberval eſt parvenu, ſoit avant ſoit après avoir vu la formule générale de Huygens pour le centre d'oſcillation, à une formule identique pour le „centre de percuſſion ou d'agitation" [5]). La 13ième et 14ième objection ſont voir qu'il admet que les propoſitions de Huygens de la Pars Quarta, nommément la Prop. IV, c.à.d. celle qui donne la formule générale pour le centre d'oſcillation, ſont „forſan veræ", mais qu'il les ſuppoſe découvertes par l'expérience et pourvues enſuite de „demonſtrationes qualescunque". Nous croyons pouvoir en conclure que Roberval,

---

centre de gravité sur le plan passant par l'axe de rotation et le point considéré. Il en résulte que le lieu de tous ces points (on peut dire: de tous ces centres de percussion) dans le corps est un plan passant par le centre principal de percussion (simplement appelé centre de percussion dans le texte) et perpendiculaire à la droite qui joint le point de suspension à ce dernier centre. Remarquons en passant qu'en se heurtant à l'obstacle le corps ne perdrait pas en général tout son mouvement.

[3]) On voit que le calcul du texte est exactement le même soit qu'il s'agisse d'un corps oscillant ou d'une surface oscillant dans son plan.

[4]) Le calcul de Fabry (ou de Mousnier) dans le cas du cercle oscillant ainsi que dans celui des corps n'est pas bien clair. Comparez la remarque de Mersenne à la p. 446 qui suit. Il est évident que s'il était parti de la définition générale donnée dans le texte et s'il avait réussi à faire un calcul correct, il aurait dû trouver dans tous les cas un centre de percussion identique avec le centre d'oscillation de Huygens.

[5]) J. L. Lagrange dans le passage cité dans la note 1 de la p. 442 dit: „les géomètres continuèrent a supposer tacitement que le centre de percussion était le même que celui d'oscillation et Huyghens fut le premier qui envisagea ce dernier centre sous son vrai point de vue; aussi crut-il devoir regarder ce problème comme entièrement neuf, etc.". On a vu que, du moins jusqu' à 1670, Roberval n'était pas convaincu de l'identité des deux centres; comparez la note 2 de la p. 352 du T. XVI.

s'il n'était pas tombé lui-même — rien ne l'indique — ſur la formule générale pour le centre de percuſſion, croyait du moins — après avoir vu la formule de Huygens pour le centre d'oſcillation — à la poſſibilité de trouver pour le centre de percuſſion une formule identique, de ſorte qu'il ſoupçonnait que Huygens avait en réalité établi ſa formule *pour le centre de percuſſion* et que, conſtatant expérimentalement, comme Merſenne et d'autres, que dans quelques cas ce centre coïncide, abſolument ou à peu près, avec le centre d'oſcillation, il avait *enſuite* adroitement choiſi certaines hypothèſes douteuſes afin d'arriver ainſi à une formule du centre d'oſcillation identique avec celle du centre de percuſſion.

Dans les calculs de 1664 (T. XVI) il n'y a abſolument rien qui pourrait faire naître l'hypothèſe que Huygens aurait trouvé une formule générale pour le centre de percuſſion avant de trouver une formule identique pour le centre d'oſcillation. C'eſt excluſivement ſa remarque dans le livre de Fabry qui fait voir que dès 1664 il a eu, paraît-il, la conviction bien arrêtée de l'identité des deux centres. Il eſt impoſſible de ſavoir ſi cette remarque, qui ſemble impliquer la connaiſſance préciſe de la ſituation du centre de percuſſion, date d'avant ou d'après le jour (proche du 10 octobre 1664, voir la p. 462 du T. XVI) où il trouva la formule générale du centre d'oſcillation.

A propos de cette remarque de Huygens nous ajoutons encore l'obſervation hiſtorique que dès 1647 Merſenne (Nov. Obs. phys. math. T. III, p. 119) dit „autorem appendicis Phyſicomathicæ [ſic] de centro percuſſionis [c.à.d. Fabry, ou Mouſnier], in iſto centro reperiendo à prop. 17 & deinceps [c.à.d. à partir de la propoſition où ils commencent à conſidérer les ſurfaces oſcillant *dans leur plan*] aberraſſe; hoc eſt cùm ad læuam & dextram corpora vibrantur, eo teſte qui ſolus ratione vibrationes iſtas definiuit"; à la p. 118 il a nommé Roberval, cependant nous n'oſerions dire s'il parle ici de lui ou, ce qui ſemble plus probable, de Deſcartes: comparez les p. 352—353 du T. XVI [1]).

---

[1]) En janvier 1647 Mersenne écrivait au père Constantijn à propos du livre de Fabry et de Mousnier (T. I, p. 59) que celui-ci pourrait „servir d'exercice à vostre braue geometre pour long temps". Nous avons dit (T. XVI, p. 178, note 9) à propos de ce même livre que „Fabry a bien les mêmes droits que Descartes à être cité parmi les précurseurs de Huygens dans la science si difficile de la percussion des corps". Nous saisissons cette occasion pour remarquer que c'est encore ce même livre, et non pas les „Dialogi physici" de 1669 de Fabry, qui aurait dû être cité dans la note 6 de la p. 143 du T. III; et nous pouvons ajouter qu'il est quelque peu étrange qu'en 1660 (T. XV, p. 467) dans sa „Brevis Assertio Systematis Saturnii" Huygens parle de

Dans l'objection de Roberval on peut donc diſtinguer deux éléments de valeur différente. Il ſe trompe en conſidérant les fondements du calcul de la Pars Quarta comme douteux aux yeux de Huygens lui-même. Mais il ne dit point d'abſurdité en émettant l'hypothèſe que Huygens a trouvé la formule générale pour le centre de percuſſion d'abord. Nous ne pouvons même affirmer certainement — quelqu'improbable que la choſe nous paraiſſe — qu'il n'en a pas été ainſi [2]).

Les autres objections de Roberval ont peu de valeur et portent à croire — voir notamment la 11ième objection, où il compare entre elles des grandeurs incomparables — que la perte de ſon Traité de Mécanique n'a pas eu de conſéquences fort fâcheuſes pour le développement de cette ſcience. Nous renvoyons pour ces objections aux notes des p. 451—456 qui ſuivent. Il eſt juſte d'ajouter que très probablement les objections n'ont pas été faites *en latin:* nous ne les poſſédons, paraît-il, que dans la forme que Huygens leur a donnée.

Fabry comme d'un auteur à peu près inconnu de lui „quem ferunt alicujus nominis esse". Il est vrai que dans le livre de Mousnier il n'y a des notes marginales de Huygens que dans l'„Appendix phys. math. de centro percussionis" exclusivement et que celles-ci datent d'après 1660, mais ceci ne justifie pas l'expression de Huygens, puisque la composition du Traité „De Motu Corporum ex Percussione" a eu lieu avant ce temps.

[2]) Les manuscrits de Huygens, nous l'avons dit, ne contiennent rien du tout sur le centre de percussion. On peut voir dans le T. XVI comment le calcul du centre d'oscillation dans un grand nombre de cas particuliers, l'a conduit ensuite à l'établissement de la formule générale.

OBJECTIONS DE ROBERVAL CONTRE LES DÉMONSTRATIONS DE L'AUTEUR DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM" ET RÉPONSES DE HUYGENS.

RESPONSA AD OBJECTIONES ROBERVALLIJ CONTRA DEMONSTRATIONES NOSTRAS DE MOTU PENDULORUM [1]).

§ 1. 1. Ad primum poſtulatum [2]). Multa hic æquivoca; et hoc ex præcipuis.

Solutane ſint ab invicem pondera, an invicem allegata.

R. Cum generaliter proponatur poſtulatum æque de ſolutis ac alligatis accipiendum eſt, nec proinde æquivocum dici poteſt.

2. *An ſoluta agant per rectas parallelas, an per convergentes an per divergentes, an convergant vel divergant ab eodem puncto an a diverſis.*

Pondera quævis deſcendere conari ponimus per rectas parallelas ad horizontis planum perpendiculares, quia alias centri gravitatis conſideratio nulla eſt [3]). ac ſingulorum centra gravitatis tantum aſcendiſſe vel deſcendiſſe quantum a plano quodam horizontali diſtantiam mutarint.

3. Obj. *An motus fiat in aere an in quodam alio corpore liquido.*

R. Cum abſque hac diſtinctione proponatur Poſtulatum, apparet univerſaliter accipiendum nec referre in quo medio fiat motus.

4. Obj. An remota intelligantur omnia corporum impedimenta, tanquam ſi motus in vacuo fieret, ut in tertio poſtulato poſtea fieri vult.

R. Hoc etiam perinde eſt quantum ad hoc poſtulatum an remota intelligantur impedimenta an non. quod ſi non remota intelligantur, tunc eo facilius quoque poſtulatum concedi debet.

---

[1]) P. 266—274 du Manuscrit D. La p. 264 porte la date du 27 mai 1671 et la p. 277 celle du 18 juillet 1671.

Nous avons numéroté les Objections et divisé la Pièce en trois §§.

[2]) Il s'agit de l'Hypothèse I de la Pars Quarta (voir la p. 247 qui précède).

[3]) Roberval ne l'ignorait nullement: dans la lettre du 16 août 1636 d'Etienne Pascal et Roberval à Fermat („Oeuvres de Fermat, publ. p. l. soins de P. Tannery et Ch. Henry". T. II Correspondance p. 35) on lit: „Ce centre [de la pesanteur] n'a été démontré que quand la descente des poids se fait par des lignes parallèles". On peut consulter aussi les Manuscrits conservés à la Bibl. Nationale à Paris et intitulés „Proposition de Monsr de Roberval qui sert à trouver le centre de gravité" et „Theorema lemmaticum ad invenienda centra gravitatis mire inserviens a D. D. Roberval anno 1645".

5. Si descenderint qua vi rursus ascendant et quousque, præcipuè in vacuo, in quo cur motus desineret.

R. Qua vi ascendant corpora [1]) non est hujus loci quærere. Quod autem dubitare videtur an non in vacuo altius ascensura sint corpora et cum ipsis centrum gravitatis commune, quam unde descenderat, ad hoc dico vacuum ita poni ut maneat tamen gravitatis actio, ac tantum tollatur resistentia illa aeris manifesta quam sentimus. Videmus jam nunc resistentiam aeris gravitate corporum ita vinci, ut vix quicquam officiat eorum motibus. Videmus etiam arte aerem istum ita eliminari posse antlia pneumatica, ut plumæ nihilo tardius quam plumbum decidant, manente ut apparet gravitatis actione. Itaque et spatium ejusmodi inane concipere licet et motus qui illic fient quam proxime eodem modo se habebunt atque ij qui in aere nostro. Manente autem gravitatis actione corporum ascensum definitum esse ex tractatu superiore de descensu gravium [2]) liquet.

6. Obj. Hæc et plura cum complectatur postulatum nimis distinguendum esset priusquam illi quis assentiatur.

R. Nihil distinguendum sed generaliter accipiendum postulatum. Si vero casus adferantur quibus concessu difficile videatur, ijs responderi facile posse existimo, sicut jam factum est [3]).

7. Ad secundum. Cum materialiter verum sit postulatum non tamen apparet illud ex primo sequi. Quod si inde sequeretur non jam esset postulatum, certè legitimum, sed propositio demonstranda.

Non est hoc secundum postulatum sed consequentia e primo deducta ex quo cum clarissime pateat, non opus est ulteriore demonstratione. Credo tamen posse omitti hanc consequentiam vel si retinenda, oportet scribere. Pendulum quiescens non cœpturum moveri si linea centri et linea perpendiculi in unum conveniant [4]).

8. *Ad tertium* [5]). *Videndus primum Galileus quem citat pro pendulo simplici. Hic enim author a multis non recipitur nec nos authorem sed rationes authoris perpendimus.*

Non cito Galileum sed propositionem meam ex tractatu præcedente de descensu

---

[1]) Voir sur la „vis motus" de Huygens le troisième alinéa de la p. 376 du T. XVI.

[2]) Huygens avait donc montré à Roberval, et peut-être à d'autres académiciens, outre les hypothèses et quelques (?) propositions de la Pars Quarta, le début de la Pars Secunda.

[3]) Il y avait donc probablement eu une discussion orale sur ce sujet.

[4]) Nous ignorons la forme primitive de la deuxième hypothèse; elle fut d'ailleurs entièrement supprimée. Comparez la fin du § 3 qui suit.

[5]) Il s'agit de l'Hypoth. II de la Pars Quarta.

gravium [6]). Quod ſi principium aliquod in hac de motu tractatione quod mihi cum Galileo commune eſt, velut quod corpora ſemel mota moveri pergant eadem perpetuo celeritate ſi nihil aliunde ijs occurrat quod motum deſtruat [7]), ſi hoc inquam non admittat jam non habeo quod dicam contra negantem principia niſi hoc idem à Torricello Carteſio [7]) multiſque alijs ſtatui, vulgoque ab omnibus concedi. Principiorum vero ratio dari non ſolet, ſed in geometria evidentia eſſe oportet in phyſicis experientiæ convenientia. Tolle mihi omnia impendimenta et videbis an non duraturus ſit corporis motus [8]).

9. Obj. Pro pendulo compoſito fruſtra experientiam ſibi favere contendit, quæ contra ipſi ubique refragatur.

R. Non magis in pendulo compoſito quam in ſimplici experientia refragatur. De ſimplici autem demonſtratum eſt ut dixi, remotis impedimentis, ſemioſcillationes ejus æquales eſſe, itaque merito idem in compoſito eventurum ſtatuimus [9]).

10. Obj. Fruſtra etiam aerem ſolum aut tale aliquod corpus accuſat, quandoquidem ipſis remotis, pendulum, naturâ ipſâ, motum ſuum ſenſim amittere poteſt.

R. Cum in aere ipſo agitatum pendulum diutiſſime motum reciprocum continuet, poſſet vel hic ſupponi cujuſque oſcillationis ſemiarcus æquales eſſe, cum inſenſibiliter differant. Minus autem differunt remoto aere ut in vacuo Torricelli ſeu Boiliano. unde tanto melius tunc ponitur eorundem arcuum æqualitas. Nec tamen negare opus fuerit eſſe aliquid aliud præter aerem quod ſenſim penduli motum extincturum ſit [10]), cum ſufficiat id ita inſenſilibus decrementis eum conſumere ut in cujuſque vibrationis ſemiarcubus ſenſibilis non ſit differentia.

11. Obj. Si enim non amitteret, ſed motus ille ex ſe non periret quæro cur ultra non progrederetur pendulum, cujus impetus in ima parte ſui motus multo major fuerit quam ejuſdem penduli pondus [11]), quodque ſi ibi in globum libere jacentem in horizonte perfecte levigato incurriſſet, motum diu et longe duraturum ipſi communicaſſet, atque ex eorum ſententia [8]) perpetuum.

---

[6]) Huygens parle en effet, comme on le voit à la p. 251, de sa Prop. IX de la Pars Secunda.

[7]) Comparez le dernier alinéa de la p. 105 du T. XVI.

[8]) Nous ignorons si Roberval a jamais écrit ailleurs qu'il n'admettait pas le „principe de Galilée". Mais si pour toute vitesse il faut une force (note 11) il est sans doute logique de ne pas admettre ce principe.

[9]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 38 qui précède.

[10]) Voir l'observation 6 à la p. 314 du T. XVII. Huygens songe évidemment à la résistance d'une matière autre que l'air, non pas à une extinction naturelle du mouvement.

[11]) Ceci est évidemment une erreur capitale.

Dans les „Observations sur la Composition des Mouvemens, et sur le Moyen de trouver les

R. Cum tam projecta in altum ad perpendiculum, quam ascendentia per planum inclinatum, aut per arcum circuli ut pendula, non ultra certum terminum ascendant, ex tractatu superiore de descensu gravium manifestum est. Quid sibi velit vero objectionum author cum impetum corporis, vel celeritatem ut postea [1]), gravitate majorem dicit et quam bene hæc inter se comparentur in sequentibus discutiemus [2]).

12. Obj. Sed et quod multi non animadvertunt axis penduli, dum ipsum sustinet, gradus velocitatis illius sensim et continuè suffuratur, quod impedimentum quia per se semper pendulum concomitatur, tolli aut removeri non potest, unde fit ut ipsius penduli cursus et recursus numquam sint æquales, contra postulatum. quod proinde fit invalidum etiam remoto aeris aut alio quovis manifesto impedimento. Axis enim semper aderit sine quo pendulum non datur.

R. Impedimentum ab axe proveniens cogitatione tollitur æque ac in libra. Nam in hac quoque si non amoveatur impedimentum axis, fiet ut brachijs æqualibus inæqualia pondera sustinentibus tamen fiat æquilibrium. Sed et reipsa seu materialiter ita tollitur impedimentum illud tam in pendulo quam in libra, ut semiarcus unius oscillationis quantum ad sensum æquales inveniantur. Itaque omnino justum est postulatum ac nequaquam invalidum. Nam si pendulum non datur sine axe, etiam libra sine axe non datur, sed utrisque mathematicè, seu, ut vocant, in abstracto consideratis, axis ille nullum adfert impedimentum.

13. Obj. Hoc autem corruente postulato corruunt authoris demonstrationes, etiamsi propositiones forsan veræ sint, sed alijs physicis innixæ fundamentis [3]).

Touchantes des Lignes courbes" (ouvrage de Roberval, publié en 1693 à Paris dans les „Divers Ouvrages de Math. et de Phys. par MM. de l'Ac. R. des Sciences") nous lisons (p. 69): „Puissance est une force mouvante. Impression est l'action de cette puissance. . . . Nous avons défini la puissance en tant qu'elle nous peut servir considérant les diversitez des mouvemens, ce qui n'empesche que dans d'autres speculations, nous n'entendions par le mot de puissance une force capable de soustenir un poids ou de quelque autre effet". Ici il ne songe pas, croyons-nous, à assimiler un „impetus" à un poids, comme il le fait dans la 11ième objection.

Rappelons que Roberval est péripatéticien en ce sens qu'il admet que là où il y a une vitesse (constante p.e.) il y a une force (ou „puissance") dans le sens de cette vitesse. À la même p. 69 de l'édition citée il écrit: „La direction d'une puissance mouvant un mobile, lequel par son mouvement décrit une circonférence de cercle, est la ligne perpendiculaire à l'extrémité du diamètre, au bout duquel le mobile se trouve".

[1]) Nous ne trouvons pas d'objection faite plus tard, où Roberval ait parlé d'une *vitesse* supérieure à un *poids*.

[2]) Nous ne trouvons pas de traces de la discussion générale annoncée ici, si ce n'est dans le § 3 qui suit.

R. Sed ſtante hoc poſtulato, ſicut jam oſtenſum eſt, ſtant quoque authoris demonſtrationes; nam contra illas nihil adfertur niſi levia quædam quibus facile poſtea reſpondebitur. Neſcio autem qui putet propoſitionum noſtrarum demonſtrationes legitimas ex alijs forſan phyſicis principijs deduci poſſe, cum impedimentum axis neceſſario conſiderandum putet, quod impedimentum majus vel minus eſt prout axis affaber ſubtiliterque aut ſecus elaboratus eſt, oleo inunctus vel ſecus [4]).

14. Obj. Itaque apparet propoſitiones illas, ſiquæ veræ ſint, non vi demonſtrationum inventas eſſe ac ſtabilitas; ſed illis experientia detectis, demonſtrationes has qualescunque eſſe affectas. Plura dicemus ad prop. 4 [3]).

R. Quæ hic dicit author objectionum non videtur recte perpendiſſe. Nam primo cum dicat propoſitiones noſtras non eſſe vi demonſtrationum inventas, voluit dicere vi principiorum vel hypotheſium. Cum vero non neget ex poſitis principijs eas rectè demonſtratas, cur non horum vi ſed experientia [5]) potius detectas vult. Nempe ille ita argumentatur. Cum principia falſa ſint, non potuerunt propoſitiones veræ eorum opera reperiri. Ergo aliunde. At melius ſic collegiſſet. Propoſitiones veræ ſunt, et per conſequentias neceſſarias ex poſitis principijs demonſtratæ, ergo et principia illa vera ſunt [6]).

§ 2. Cum in ipſo hoc aere videamus pendulorum arcus quos deſcendendo ac aſcendendo in una oſcillatione conficiunt inſenſibiliter differre neque etiam impedimentum axis vel aliud quodquam, ſi quid eſt, impedire quo minus id ita fiat; Liceret, etiam non remoto aere, vel axis retardatione, hypotheſi iſta uti quæ dictos arcus æquales ſtatuit, quoniam in rebus phyſicis hypotheſes experientiæ convenientes ſumere ſufficit.

---

3) Voir sur les objections 13 et 14 l'Avertissement qui précède. Les mots „plura dicemus", de l'Obj. 14 peuvent se rapporter au discours de 1671 (?) de Roberval à l'Académie des Sciences que nous avons mentionné à la p. 443.

4) Il eût sans doute mieux valu supprimer la dernière partie („quod impedimentum ..... vel secus") de cette phrase; la remarque est déplacée en cet endroit et fait plutôt partie de la réponse à la 12ième Objection où il est dit que l'„impedimentum ab axe . . materialiter tollitur", du moins à fort peu près.

5) C.à.d. par l'expérience directe à la manière de Mersenne (voir aussi la note 3), car il est évident que les „posita principia" ont dû être empruntés à l'expérience. Huygens le dit d'ailleurs clairement dans la réponse à la 8ième Objection: dans la physique il faut „experientiæ convenientia". Le § 2 qui suit fait bien voir qu'il ne fait pas de distinction sous ce rapport entre la mécanique et la physique.

6) Il faut pourtant observer qu'il est possible de choisir des hypothèses manifestement fausses telles que des conséquences véritables en découlent logiquement. Mais ce sont là des jeux d'esprit sur lesquels nous n'insisterons pas.

Remotis vero cogitatione impedimentis iſtis (quæ etiam re ipſa fere penitus auferri poſſunt, nam aer quidem penitus ex dato vaſe exhauritur manente eadem quæ fuerat gravitatis actione) tanto facilius jam eadem hypotheſis admittenda eſt. Sed jam ut dixi non niſi ad pendulum compoſitum ipſa opus eſt, cum arcuum æqualitas in pendulo ſimplici demonſtrata ſit, in his quæ de deſcenſu gravium antea tradidimus.[1]).

§ 3. Il eſt vray que peuteſtre l'autheur des objections ne voudra pas admettre les demonſtrations de cet autre traitè, parce que je m'y ſers de ce principe de Galilee (lequel pourtant Mr. des Cartes et bien d'autres ont ſuivi depuis), ſcavoir qu'un corps continueroit avec egale viteſſe le mouvement qu'il a conceu une fois eſtant oſtè tous obſtacles de dehors. A quoy je n'ay rien a dire ſinon que ce principe me ſemble, auſſi bien qu'a tous les autres qui l'ont ſuivi, fort convenable a la nature et que l'experience meſme, en tant qu'on a moyen de la faire, le confirme. Ne pouvant empeſcher au reſte que l'autheur des objections n'aye des opinions toutes differentes en ce qui regarde le mouuement, comme par ex. quand il compare la viteſſe des corps avec leur poids, et veut que cette viteſſe puiſſe eſtre ou egale ou moindre ou plus grande que la peſanteur du corps, ce qui a mon avis ne ſignifie rien, parce que ces deux choſes ne ſont pas homogenes pour eſtre comparees entre elles par la quantitè [2]). Ainſi n'eſtants pas d'accord entre nous des principes il ſeroit inutile de reſpondre aux objections qui naiſſent de cette diverſitè, et tout ce que j'ay cru pouuoir faire c'eſt de confirmer mes hypotheſes par l'eclairciſſement que j'y ay adjoutè dans lequel la reſponſe aux autres objections qu'on y a faites eſt contenue. Ce que leur autheur nomme le ſecond poſtulat, eſtoit ſeulement une conſequence de la premiere hypotheſe, laquelle conſequence n'eſtant pas neceſſaire au reſte du traitè on la peut omettre. Et par là ce qu'il appelle le 3e poſtulat, c'eſt la 2e hypotheſe [3]).

On n'a rien trouuè dans les demonſtrations qui ne ſoit legitimement deduit des [hypothèſes].

---

[1]) Comparez la note 9 de la p. 453.
[2]) Comparez la note 11 de la p. 453.
[3]) Comparez la réponse à la 7ième Objection du § 1.

DE HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA ULTERIOR.

La „De Hugeniana Centri Oſcillationis Determinatione Controverſia", telle qu'on la trouve dans les éditions de 's Graveſande de 1724 et 1751 — nous y ajoutons le mot „ulterior", puiſqu'il s'agit en ſomme d'une continuation de la diſcuſſion entamée par Roberval (objections 13 et 14) — ſe compoſe de douze Pièces qui ont toutes été publiées dans nos Tomes VIII et IX, ſavoir ſix de Catelan, deux de Jacques Bernoulli, une du marquis de l'Hôpital et trois de Huygens [1]). Ces dernières Pièces,

---

[1]) Ces Pièces sont les suivantes. Ce sont toutes des traductions, excepté la dixieme, déjà écrite en latin.

I. „Observationes Abbatis Catelani in propositionem, quæ fundamentum est 4æ partis tractatus de Pendulis Hugenii" (T. VIII, N° 2260, p. 353). 1681/1682.

II. Domini Abbatis Catelani Examen Mathematicum Centri Oscillationis (T. VIII, N° 2261, p. 356) 1681/1682.

III. Excerpta ex litteris Domini Hugenii, quibus respondet observationi Abbatis Catelani in 4am propositionem Tractatus de Centris Oscillationis (T. VIII, N° 2267, p. 368). 1682.

IV. Exceptio Abbatis Catelani ad responsionem Hugenii (T. VIII, N° 2270, p. 372). 1682.

V. Objectio Abbatis Catelani contra motum Pendulorum in Cycloidibus (T. VIII, N° 2280, p. 395). 1682/1683.

VI. Responsio ad Objectiones Hugenii adversus methodum Abbatis Catelani de determinando Centro Oscillationis (T. VIII, N° 2281, p. 397). 1682/1683.

VII. Excerpta ex litteris D. Bernoulli datis Basileæ ad Autorem Diarii Parisiensis, de Controversia, inter Abbatem Catelanum & Hugenium, de Centro Oscillationis (T. VIII, N° 2332, p. 485). 1684.

VIII. Excerpta ex litteris D.ni Hugenii ad Auctores Diarii Parisiensis, datis Hagæ 8. Junii 1684. quæ continent ejus responsionem ad exceptionem D.ni Abbatis Catelani, de Centro Oscillationis (T. VIII, N° 2341, p. 497). 1684.

IX. Responsio D.ni Abbatis Catelani ad litteras D.ni Bernoulli de Controversia sua cum D.no Hugenio de Centro Oscillationis (T. VIII, N° 2365, p. 537). 1684.

X. Dn. Bernoulli Narratio Controversiæ inter Dn. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatæ de Centro Oscillationis, quæ loco Animadversionis esse poterit in Responsionem Dn. Catelani (T. IX, N° 2426, p. 80). 1686.

quoiqu'elles affectent la forme de lettres adressées à un éditeur, ou de remarques sur une lettre de ce genre, sont évidemment partie des Oeuvres proprement dites de Huygens. Nous pourrions donc, comme nous l'avons fait au T. XVI (p. 169—186) pour l'„Extrait d'une lettre sur les règles du mouvement dans la rencontre des corps", réimprimer ici les trois pièces de Huygens, auxquelles il faudrait bien joindre les neuf autres [1]) et les pourvoir d'un avertissement, de notes et d'appendices. Une treizième Pièce qu'il conviendrait d'y ajouter (pour ne rien dire des N°s 2259 et 2166 du T. VIII et 2580, 2581, 2587, 2594, 2597, 2598, 2600, 2603 et 2604 du T. IX) est le N° 2690 (T. X, p. 114, J. B. „Demonstratio Centri Oscillationis ex Natura Vectis, etc."), travail de Jacques Bernoulli publié dans les Acta Eruditorum de juillet 1691. Une quatorzième et une quinzième, datant de 8 et 9 ans après la mort de Huygens, viendraient s'y joindre tout naturellement, savoir la „Démonstration générale du centre de balancement ou d'oscillation, tirée de la nature du levier" que Jacques Bernoulli publia en 1703 dans l'„Histoire de l'Académie des Sciences de Paris" et la „Démonstration du Principe de Mr. Huygens touchant le centre de balancement", de 1704 (Hist. de l'Ac. d. Sc. de Paris) du même auteur. L'addition d'une seizième, savoir un chapitre du „Discours sur les Loix de la Communication du Mouvement" de 1727 de Jean Bernoulli — comparez la p. 466 qui suit — [2]), ne serait nullement déplacée. Nous avons déjà parlé (p. 442) d'une section de la „Mécanique analytique" de 1788 de Lagrange qui se rattache à ces disputes.

Au lieu de réimprimer les douze Pièces et celles que nous pourrions y ajouter, nous

---

XI. Litteræ D.ni Marchionis de l'Hôpital ad D.um Hugenium, in quibus contendit, se regulam hujus Autoris de Centro Oscillationis penduli compositi demonstrare per causam physicam, & respondere simul D.no Bernoulli (T. IX, N° 2605, p. 457). 1690.

XII. Observationes D.ni Hugenii in litteras præcedentes & in relationem D.ni Bernoulli, cujus in iis fit mentio (T. IX, N° 2606, p. 461). 1690.

[1]) A l'exception peut-être du N° V, dont nous ne dirons rien ici. Cette Pièce se rapporte à la Prop. XXIV de la Pars Quarta de l'„Hor. osc.", mentionnée aussi dans la note 1 de notre Appendice IV à cette Pars (p. 427 du présent Tome). Huygens y répond brièvement, et sans approfondir la question, à la p. 500 (dernier alinéa) du T. VIII.

[2]) Publié à Paris, chez Cl. Jombert, d'après un manuscrit contenant la solution de la première question proposée par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1724. La question était: „Quelles sont les loix suivant lesquelles un corps parfaitement dur, mis en mouvement, en meut un autre de même nature, soit en repos, soit en mouvement, qu'il rencontre, soit dans le vuide, soit dans le plein". L'auteur (p. 1—2) y entreprend de prouver „une verité que M. de Leibnitz lui-même n'a jamais prouvée qu'indirectement; sçavoir, que la force vive d'un corps n'est pas proportionelle à sa simple vîtesse, comme on l'a crû communément, mais au quarré de sa vîtesse . . . Cette théorie ouvre un chemin facile à plusieurs veritez importantes. Elle a fourni à l'Auteur [e.a.] un moyen aisé de trouver le centre d'oscillation dans les Pendules composées".

nous contenterons toutefois d'y renvoyer le lecteur et de ne donner qu'un aperçu de la controverse.

Les mauvaises objections de Catelan, auteur de peu de mérite [3]), ont conduit des savants de plus de valeur, et Huygens lui-même, à considérer dans le cas des pendules linéaires le gain ou la perte de vitesse des différents points pesants qui résulte de leur réunion en un tout, lorsqu'on les attache à une barre, ou à un fil, linéaire et impondérable. De cet assemblage chaque point pesant situé au-dessus du centre d'oscillation se mouvrait plus vite, et chaque point situé au-dessous de lui plus lentement, s'il était seul attaché au point de suspension. En d'autres termes: la partie inférieure du pendule retarde le mouvement de la partie supérieure, cette dernière avance celui de la partie inférieure. Ne serait-il pas possible de calculer la place du centre d'oscillation en partant de la considération de ces gains ou pertes de vitesse? Ne pourrait-on donc pas se passer de l'Hypothèse I de la Pars Quarta appliquée aux points pesants se détachant les uns des autres à un moment donné?

Durant la vie de Huygens les chercheurs engagés dans cette voie — c.à.d. Catelan, Jacques Bernoulli, de l'Hospital et Huygens — se sont bornés à la considération de pendules linéaires. Ce n'est que vers 1703 [4]) que Jacques Bernoulli réussit à s'élever

---

[3]) Après Roberval, mort en 1675, il paraît — c'est Huygens lui-même qui nous l'apprend (T. VIII, p. 350) — que la méthode de la Pars Quarta n'a plus été critiquée avant l'entrée en scène de Catelan. Comme nous ignorons l'histoire antérieure de cet auteur, il nous est impossible de dire si Roberval a pu avoir sur lui quelqu'influence directe ou indirecte.

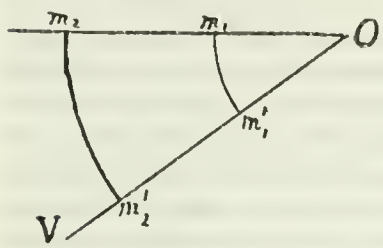
Il est sans doute possible, vu la nature d'une partie des autres écrits de l'abbé — voir la note 3 de la p. 349 du T. VIII — que le désir d'attaquer Huygens provenait surtout de lui-même. Toutefois il paraît plus probable que, ne connaissant pas Huygens personnellement, il ait été influencé par „quelque malintentionné envers Huygens", comme le dit la note 4 de la p. 350 du T. VIII. On eût pu tout aussi bien se servir du pluriel. Il nous semble du moins que notre ignorance des motifs de Catelan est trop profonde pour accuser uniquement, ou même peut-être pour accuser, N. Hartsoeker (voir, outre la note 4 nommée, la lettre N° 2265), d'autant plus que la mauvaise pratique des éditeurs d'Amsterdam se renouvela (note 1 de la p. 397 du T. VIII) et qu'il est donc incertain si Catelan dit vrai (T. VIII, p. 364) en alléguant de n'avoir pas su qu'on insérerait son premier article dans la contrefaçon d'Amsterdam du Journal des Sçavans. Ces questions personnelles seraient oiseuses si les objections de Catelan étaient moins insignifiantes et que par conséquent le désir d'attaquer Huygens s'y manifestait moins nettement.

Outre les écrits de l'abbé nommés dans le T. VIII, le catalogue de la Bibliothèque Nationale à Paris mentionne encore le „Témoignage que rendent les mathématiques à la gloire du roi" (par l'abbé Catelan), Paris, F. Muguet, in 8°, 1681; les „Inscriptions en vers latins et françois pour les basreliefs de la statue du Roy (par l'abbé Catelan et par Mlle Catelan la cadette), in 4°, 1686; et l'ouvrage „Principe de la science générale des lignes courbes ou principaux élémens de la géométrie universelle" (par l'abbé Catelan), Paris, L. Roulland, in 12°, 1691.

[4]) Dans l'article mentionné à la p. 458.

à celle des corps oſcillants de forme quelconque. Durant la vie de Huygens l'Hypothèſe I de la Pars Quarta eſt donc reſtée la ſeule qui permît de trouver la formule générale pour le centre d'oſcillation.

[Fig. 2.]



Dans ſon article de 1681, Pièce I de la note 1 de la p. 457, Catelan conſidère deux points peſants égaux (m_1 et m_2) formant deux pendules ſimples ayant O [Fig. 2] pour axe d'oſcillation. Ces points, réfléchis ſans perte de viteſſe par le plan OV, remontent à la hauteur d'où ils ſont tombés; il en ſera donc de même de leur centre de gravité commun. Mais il n'en ſera plus de même, penſe-t-il, lorſqu'on forme un pendule compoſé en réuniſſant les deux points peſants par un lien rigide et impondérable. Les viteſſes des deux points, arrivés dans la poſition m'_1 m'_2 ſeront alors proportionnelles à leurs diſtances du point O; de plus, penſe-t-il, la *viteſſe moyenne* ſera la même que dans le cas précédent. On a donc deux équations permettant de calculer les viteſſes. Et ſi l'on ſuppoſe qu'à l'inſtant où le pendule compoſé atteint le plan OV, le lien ſe rompt, et que les points réfléchis s'élèvent juſqu'à ce que leurs viteſſes ſoient épuiſées, on peut calculer que le centre de gravité atteint une hauteur ſupérieure à celle dont il était tombé.

L'hypothèſe gratuite d'après laquelle la viteſſe moyenne des deux poids, lorſqu'ils atteignent le plan OV, eſt la même dans les deux cas conſidérés, provient peut-être de ce que l'auteur ſongeait à la conſtance que le produit Σmv (donc auſſi Σv pour des quantités de matières égales) poſſède d'après Deſcartes dans le cas de colliſions de différents corps. Il eſt vrai que ſuivant Deſcartes lui-même ce principe n'eſt nullement applicable dans le cas conſidéré. Mais nous pouvons avec de l'Hoſpital conſidérer Catelan comme „abuſant de la penſée de Mr. Des Cartes, que la meſme quantité de mouvement ſe conſerve toujours dans la nature". (T. IX, p. 402).

Dans ſa première réponſe de 1682 (Pièce III) Huygens ſe borne à faire remarquer que l'expérience ne confirme pas tous les réſultats qu'on peut tirer de la théorie de l'abbé de Catelan. C'eſt dans ſa deuxième réponſe de 1684 ſeulement (Pièce VIII) qu'il obſerve que le réſultat du calcul de Catelan eſt „contre le grand Principe des mechaniques", et il ajoute: „& ſi Mr. l'Abbé peut faire en ſorte que [ſon Principe] ſoit vray, il aura trouvé le mouvement perpetuel. Son Principe eſtant donc faux puiſqu'il meine à une fauſſe concluſion, il n'en peut rien inferer contre ma propoſition qui ne ſoit faux auſſi".

Jacques Bernoulli, qui était déjà intervenu en 1684 dans le débat (Pièce VII) tâcha, ſans beaucoup de ſuccès, de préciſer la queſtion des gains et pertes de viteſſe (Pièce X de 1686). Il remarque que dans le cas de la Fig. 2 le pendule (dans la poſi-

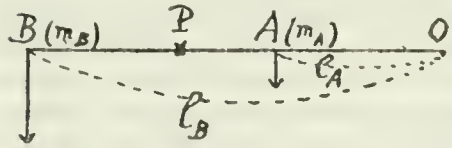
tion horizontale p.e.) peut être confidéré comme une balance qui n'eſt pas en équilibre et que les poids attachés au fléau impondérable doivent conſumer une partie de leur viteſſe „in premendo axe". Les excès de viteſſe, penſe-t-il, pourraient ſe diſtribuer ſuivant une loi analogue à celle du levier. Il exhorte donc les ſavans „ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum obſervent corpora mota, quæ ex una parte innituntur firmo fulcimento, ex altera alio corpore itidem ſed tardius moto". Penſe-t-il vraiment qu'il n'eſt pas certain que le centre de gravité, dans les conditions du problème [Fig. 2], doit monter à une hauteur auſſi grande que celle dont il eſt deſcendu? Il ſemble bien qu'oui, car il propoſe, proviſoirement il eſt vrai, une ſolution différant de celle de Catelan mais conduiſant également, comme il le fait voir, pour les poids réfléchis à une hauteur du centre de gravité non égale à la hauteur primitive.

Pour pouvoir ſoutenir la poſſibilité de ſolutions différant de celle de Huygens tout en niant celle du mouvement perpétuel, il a recours à l'argument ſuivant: „Antequam finiam, in favorem Dn. Catelani hoc monebo, quod etiamſi commune gravitatis centrum juxta illum altius aſcendere deberet, quam deſcendit, nondum tamen ſequatur repertum fore motum perpetuum, ut ſibi perſuadet Ill. Hugenius, quoniam in iſtis abſtrahi ſolet ab aëris reſiſtentia, a diminutione celeritatis, quæ neceſſario ſequitur diſruptionem vinculi, quo connectebantur partes penduli aliorumque obſtaculorum". Objection à laquelle Huygens répond avec beaucoup de ſens (Pièce XII): „Mr. Bernoulli ne demeure pas d'accord de cette conſequence, à cauſe de l'obſtacle de l'air et quelques autres, qui en empêcheroient l'effet. Mais il devroit avoir confidéré, que la hauteur qu'acquiert le centre de gravité par deſſus celle qu'il avoit, eſtant toûjours une quantité determinée, & l'effet des obſtacles n'eſtant pas determiné, & ſe pouvant diminuer de plus en plus, on pourroit facilement faire une machine, où l'avantage du rehauſſement du centre de gravité ſurpaſſeroit l'empêchement des obſtacles. Mais c'eſt de quoy aſſurément on ne ſera jamais obligé de venir à l'épreuve".

Conſultez auſſi, à propos de la queſtion du mouvement perpétuel, le Pièce de Huygens qui ſuit ſur la conſervation des forces (p. 477), ainſi que notre Avertiſſement ſur ce ſujet.

Le marquis G. F. de l'Hoſpital répondit en 1690 à l'appel de Jacques Bernoulli par une lettre (Pièce XI) où il approuve ſon idée fondamentale et montre qu'il ne ſerait pas, dans ſa confidération d'une „balance" chargée de deux points peſants, arrivé à un réſultat erroné — car de l'Hoſpital confidère la formule de Huygens pour la longueur du pendule iſochrone comme certainement correcte — s'il avait parlé des *accroiſſements* infiniment petits des viteſſes, et non pas des viteſſes acquiſes après un temps fini. De l'Hoſpital le fait voir en confidérant deux poids égaux. Il ajoute toutefois que le même raiſonnement eſt applicable au cas de deux poids inégaux; il

[Fig. 3.]



faut considérer alors des excès d'accroissements de quantités de mouvement. De l'Hospital a raison, comme le montre le calcul suivant.

Les points pesants A et B [Fig. 3] acquièrent pendant un temps infiniment petit de durée déterminée les quantités de mouvement infiniment petites $m_A v$ et $m_B v$ respectivement, lorsqu'ils ne sont pas réunis l'un à l'autre. Lorsqu'ils le sont, le poids A n'acquiert que la quantité de mouvement $m_A v_A$, où v_A est inconnue. L'excès qui doit être distribué sur le poids B et sur l'axe O, est donc $m_A (v - v_A)$.

B en obtiendra la part $\frac{l_A}{l_B} m_A (v - v_A)$ s'il est vrai que les excès se distribuent suivant la loi du levier. B aura donc la quantité de mouvement

$$m_B v_B = m_B v + \frac{l_A}{l_B} m_A (v - v_A).$$

Or, en vertu de la liaison $v_A : v_B = l_A : l_B$.

On a donc $v_A = l_A v \frac{\sum_{AB} ml}{\sum_{AB} ml^2}$ et $v_B = l_B v \frac{\sum_{AB} ml}{\sum_{AB} ml^2}$.

Le centre d'oscillation P, situé à une distance L_{AB} de l'axe O, doit être tel qu'en ce point la barre impondérable acquiert précisément la vitesse v. Il faut donc qu'on ait $v_A : v = l_A : L_{AB}$.

Donc $L_{AB} = \frac{\sum_{AB} ml^2}{\sum_{AB} ml}$ ou $\frac{\sum_{AB} ml^2}{M l_Z}$; M y représente la somme des quantités de matière m_A et m_B, et l_Z la distance à l'axe de leur centre de gravité.

S'il y a trois points pesants A, B et C, il faut, dit de l'Hospital, considérer deux d'entre eux comme réunis dans leur centre d'oscillation. L'exemple numérique qu'il propose fait voir que cette règle doit être entendue comme suit.

Le poids C donne un excès de quantité de mouvement $m_C (v - v_C)$. Il faut, pour calculer v_C, distribuer cet excès sur l'axe O et sur le point P, centre d'oscillation des points A et B. Le centre P reçoit donc la quantité $\frac{l_C}{L_{AB}} m_C (v - v_C)$ et lorsqu'on

ajoute cette quantité à celle que les points A et B poſſédaient déjà d'après le calcul précédent (c.à.d. $m_A v_A + m_B v_B$ ou $\frac{v}{L_{AB}} \sum_{AB} ml$), on obtient la quantité totale

$$\frac{v}{L_{AB}} \sum_{AB} ml + \frac{l_C}{L_{AB}} m_C (v - v_C).$$

Les points A et B ont maintenant, grâce à la liaiſon, les viteſſes $v_A = \frac{l_A}{l_C} v_C$ et $v_B = \frac{l_B}{l_C} v_C$ reſpectivement.

On a donc l'équation $m_A \frac{l_A}{l_C} v_C + m_B \frac{l_B}{l_C} v_C = \frac{v}{L_{AB}} \sum_{AB} ml + \frac{l_C}{L_{AB}} m_C (v - v_C)$

ou $v_C \left[\frac{m_A l_A + m_B l_B}{l_C} + \frac{m_C l_C}{L_{AB}} \right] = v \left[\frac{m_C l_C}{L_{AB}} + \frac{\sum_{AB} ml}{L_{AB}} \right] = v \frac{\sum_{ABC} ml}{L_{AB}}.$

On en peut tirer $v_C = l_C v \frac{\sum_{ABC} ml}{\sum_{ABC} ml^2}$, d'où réſultent auſſi les viteſſes v_A et v_B.

On en conclut, en raiſonnant comme dans le cas de la Fig. 2, que $L_{ABC} = \frac{\sum_{ABC} ml^2}{\sum_{ABC} ml}$.

Et l'on obtient une formule analogue — c'eſt toujours la formule générale de Huygens pour le cas des pendules linéaires — en ajoutant encore un quatrième poids, etc. De l'Hoſpital dit donc à bon droit „que cette methode eſt generale, quel que ſoit le nombre des poids, & quelque inégalité qu'ils ayent entre eux".

Mais quel lecteur, de nos jours, conſidérera ce raiſonnement comme convaincant? Quelle raiſon de l'Hoſpital peut-il avoir eue de croire à la juſteſſe du réſultat obtenu, ſi ce n'eſt que ce réſultat s'accorde avec celui trouvé ſuivant la méthode de Huygens? C'eſt cette concordance ſeule qui lui permet de dire: „Il eſt aiſé de conclurre de tout cecy, que le principe de Mr. Bernoulli eſt veritable". Conſidéré en lui-même ce principe, tel que de l'Hoſpital le formule, eſt ſi peu évident qu'avant d'avoir fait le calcul on le jugerait plutôt erroné.

Huygens dans ſes „remarques ſur la lettre précédente & ſur le récit de Mr. Bernoulli dont on y fait mention" (Pièce XII, de 1690) a la politeſſe de ne point attirer l'attention ſur la plus grande généralité de ſa propre ſolution. Quoi que la démonſtration du marquis, dit-il, „ne laiſſe pas de comprendre pluſieurs choſes qui peuvent

d'abord faire de la peine aux Lecteurs", il l'appelle „bonne & bien fondée". Il rappelle cependant son principe et se contente de dire: „Je croy que c'est *autant* en cela que consiste la cause physique, de ce que dans le pendule composé les poids A & B estant descendus conjointement au bas de leur vibration, n'acquierent pas ensemble autant de vitesse, que s'ils estoient tombez separément des mêmes hauteurs; qu'en ce que le poids A consume une partie de son mouvement en agissant sur le point fixe, suivant la demonstration de Mr. Bernoulli & de Mr. le Marquis de l'Hospital".

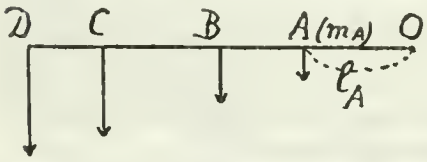
„Cette analyse", dit Lagrange [1]), „fit revenir Jacques Bernoulli sur la sienne, et donna enfin lieu à la première solution directe et rigoureuse du problème des centres d'oscillation".

La solution de Huygens n'était-elle donc pas directe et rigoureuse?

Bernoulli d'ailleurs, lorsqu'il recommença ses efforts, suivit d'abord une méthode fort inférieure à celle de Huygens, et nullement plus parfaite que celle de l'Hospital. C'est sans doute pour cette raison que Huygens n'a plus jugé nécessaire de prendre part à la discussion.

Dans les Acta Eruditorum de 1691 (notre T. X, p. 214) Bernoulli propose de distribuer, lorsqu'il y a plus de deux points pesants, l'excès de l'accroissement de la quantité de mouvement de chaque point entre l'axe et le poids extrême! [2]). Ce singulier principe conduit encore une fois au résultat exact — pour une série de points situés en ligne droite bien entendu — mais c'est uniquement le succès, nous semble-t-il, qui le justifie dans une certaine mesure.

[Fig. 4.]



Considérons un pendule [Fig. 4] chargé de quatre poids m_A, m_B, m_C, m_D.

Soit g l'accélération de la pesanteur, j_A, j_B, j_C, j_D les accélérations que les quatre poids ont réellement en partant du repos dans la situation indiquée. Par unité de temps le point A doit céder l'excès $m_A(g-j_A)$. Suivant l'hypothèse le poids extrême D en reçoit la quantité $m_A \frac{l_A}{l_D}(g-j_A)$.

Ce poids reçoit donc en tout la quantité $\frac{g}{l_D} \sum_{ABC} ml - \frac{l}{l_D} \sum_{ABC} mlj$, et cet accrois-

[1]) Dans la section de la „Mécanique analytique" de 1788, citée à la p. 458 qui précède.

[2]) „ . . . malo rem invertere, & pondus duntaxat extimum habere loco fulcri, quod ferat reliqua pondera omnia suis quæque locis vectem urgentia".

ſement de quantité de mouvement par unité de temps doit être égal à l'accroiſſement $m_D (j_D - g)$. Egalant ces deux expreſſions, on trouve $\sum_{ABCD} ml(g - j) = 0$.

Cette équation exprime que la ſomme des moments des excès des accroiſſements des quantités de mouvement (diſons plus brièvement: la ſomme des moments des excès des forces) autour du point O eſt nulle; mais une équation ou un énoncé de ce genre ne ſe trouve pas encore dans l'article de Bernoulli.

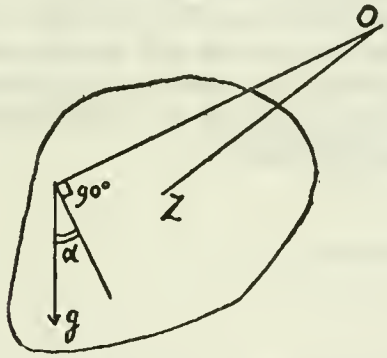
En vertu de la liaiſon, j doit être proportionnelle à l. Donc $j = Cl$, où C eſt une conſtante. L'équation trouvée devient $\Sigma cml(g - Cl) = 0$, donc $C = g \frac{\Sigma ml}{\Sigma ml^2}$.

Mais la diſtance L du centre d'oſcillation à l'axe doit être telle qu'on ait $g = Cl$. Il en réſulte encore une fois $L = \frac{\Sigma ml^2}{\Sigma ml}$.

L'auteur a abſolument tort, nous ſemble-t-il, en ajoutant: „Hæc vero centri oſcillationis demonſtratio ſic reformata, uti generalis eſt et facilis, inque Geometrica exactitudine Hugenianæ neutiquam cedit, ſic eidem in eo præferenda videtur, quod principium vectis, quo nititur, indubitatum eſt ac evidens, cum Hugeniana hypotheſis obſcura fere ſit, nec aliam ob cauſam pro vera habeatur, quam quod nihil in contrarium afferri poteſt, intellige in ſolidis corporibus" [3]).

Leibniz en janvier 1692 (T. X, p. 229) dit à bon droit que „Mr. Bernoulli a des penſées un peu embaraſſées ſur le centre d'oſcillation".

[Fig. 5.]



Ce n'eſt que dans ſon article de 1703, déjà cité à la p. 458 qui précède, que Jacques Bernoulli parvint à formuler généralement le principe qui ramène, en un certain ſens, le problème conſidéré à un problème de ſtatique, préparant ainſi la voie à d'Alembert. Suivant ce principe $\Sigma\, ml\,(g \cos \alpha - j) = 0$ [Fig. 5], où la ſomme ou intégrale des moments eſt étendue à tous les points du pendule. Nous déſignons par j l'accélération réelle dans le ſens du mouvement. Quoique Bernoulli n'applique ce principe qu'au cas d'un pendule de forme ſymétrique, on doit dire

[3]) L'auteur exprime ensuite son doute sur la vérité du principe dans le cas des corps liquides. Il pense — comme son frère Jean — qu'à l'aide de corps liquides on peut construire un „perpetuum mobile".

qu'il a trouvé cette fois une méthode menant à la folution complète et qu'on peut juger équivalente à celle de Huygens. Mais en nous étendant fur cette marière, nous franchirions les limites qui conviennent à cette publication.

Le lecteur a déjà fait connaiffance avec les réflexions de Huygens de 1692 ou 1693 qui conftituent notre Appendice VI à la Pars Quarta de l'„Hor. ofc." (p. 433 qui précède). Dans cette Pièce qui n'a pas vu le jour, les „vires acquifitæ", proportionnelles au carré de la viteffe, jouent un plus grand rôle que dans la Pars Quarta.

Dans le Chap. XIV de fon travail de 1727 (voir la note 2 de la p. 458 qui précède) — ce n'était d'ailleurs pas la première fois qu'il s'occupait de ce fujet — Jean Bernoulli trouve la place du centre d'ofcillation — en fe bornant au cas du pendule linéaire, ce qui n'était nullement néceffaire — en partant du principe que „la pefanteur produit dans la fomme des poids une quantité déterminée de force vive, de quelque manière qu'ils defcendent", en d'autres termes „que la fomme des forces vives des poids eft le même après que les poids font defcendus auffi bas qu'ils le peuvent, foit que ces poids defcendent conjointement attachés à une même ligne inflexible [difons plus généralement: foit que ces poids, ou points pefants, foient réunis en un affemblage rigide], foit que chacun de ces poids defcende librement, comme un pendule fimple". Ceci peut aifément être déduit du principe de Huygens et n'eft en fomme qu'une autre manière d'exprimer ce principe. Jean Bernoulli nous paraît avoir tort en difant „que le principe qu'employe M. Huygens, & qu'il propofe comme un axiome, étoit un peu trop hardi", mais qu'on ne fe fert nullement de „principes qui ne paraiffent pas toujours affez naturels" lorfqu'on „déduit de la feule confervation des forces vives, la détermination du centre d'ofcillation".

LA CONSERVATION DES FORCES.

I. Le „perpetuum mobile" du Marquis de Worcester.

II. La non-existence du mouvement perpétuel suivant Stevin.

III. La conservation des forces suivant Huygens.

Avertiſſement.

Huygens formule clairement la théorie de la conſervation des forces dans la Pièce III (p. 477) datant de février 1693. D'ailleurs il avait déjà dit en 1690 (T. IX, p. 456): „la loy eſt que les corps gardent la force qui faſſe monter leur centre commun de gravité à la hauteur d'ou il eſt deſcendu". Dans ce dernier énoncé il eſt apparemment queſtion de la „vis motus" ou „force vive", ſur laquelle on peut conſulter les p. 341, 359, 376 et 417 du T. XVI. Dans la Pièce III le ſens de l'expreſſion „vis" ou „vires" eſt un peu plus général: elle déſigne la „potentia", quelle qu'elle ſoit, capable d'élever un poids donné à une hauteur déterminée. Chez Deſcartes (T. XVI, p. 342) on trouve le mot „force" dans le même ſens.

Il faut donc une force déterminée pour élever un poids donné à une hauteur déterminée. Comparez le § 7 (datant de 1673, ou 1674) de la p. 493 qui ſuit. L'élévation du poids eſt l'„effectus" de la force. Huygens ne donne pas le nom de force à l'„altitudo ducta in gravitatem", c.à.d. au produit de la hauteur par le poids (T. XVI, p. 358, note 5 et p. 417) lequel meſure la force qui a produit l'élévation. Cependant, on peut dire que chez lui, quoiqu'il n'emploie pas cette expreſſion (T. XVI, p. 341, notes 4 et 5), la force, lorſqu'elle élève le poids, ſe conſerve potentiellement. En effet, le verbe „gardent" (l. 3 qui précède) indique que la force qu'un corps acquerra en deſcendant peut plus ou moins être conſidérée comme déjà exiſtante.

Dans ſa lettre de juillet 1690 (T. X, p. 439) Huygens n'accorde pas à de l'Hospital que ſon hypothèſe ſur le centre de gravité „ne ſoit pas aſſez ſimple ni aſſez evi-

dente pour être ſuppoſée ſans preuve [1]). Je n'en ſcay pas (dit-il) de plus certaine en mécanique". La raiſon de cette certitude, c'eſt que, ſi cette hypothèſe était fauſſe, le mouvement perpétuel ſerait poſſible [2]).

Ceci conduit naturellement à poſer la queſton de ſavoir juſqu'à quel point la non-exiſtence du mouvement perpétuel — on peut auſſi parler avec P. Duhem [3]) de la non-exiſtence des moteurs perpétuels, car il ne s'agit pas ici d'un mouvement périodique qui ſubſiſterait grâce à l'abſence abſolue de tout frottement, mais bien plutôt d'un mouvement périodique produiſant un certain travail — était pour Huygens une certitude.

Il paraît poſſible que, s'il dit, même après la controverſe avec Jacques Bernoulli et de l'Hoſpital (plus préciſément: en janvier 1693, dans une lettre à Leibniz) — comparez la note 7 de la p. 243 du T. XVII —, qu'il y a „touſjours quelque eſperance" de réaliſer le mouvement perpétuel „phyſico-mechanice . . . comme en emploiant la pierre d'aimant", c'eſt qu'il penſe qu'on pourrait peut-être ſe ſervir utilement des courants de matière magnétique [4]) qui circulent partout. Le ſyſtème conſidéré ne ſerait donc pas un ſyſteme fermé. Mais n'inſiſtons pas trop ſur cette idée: on pourrait objecter que dans ce cas il aurait dû enviſager également la poſſibilité d'utiliſer dans le même but les courants de matière ſubtile (cartéſienne) qui, ſelon lui, produiſent la peſanteur [5]).

Quoi qu'il en ſoit, dans le cas de la peſanteur Huygens n'admet aucunement la poſſibilité d'un moteur perpétuel: comparez ce qu'il dit à la p. 251 qui précède ſur les „novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur". Comme nous l'avons dit à la p. 45, en compoſant l'„Horologium oſcillatorium", il parlait et ſentait apparemment en phénoménologue bien plus qu'en partiſan des théories corpuſculaires.

---

[1]) Lagrange, à l'endroit cité plus haut (p. 442, note 1), parle au contraire d'un „principe précaire" qu'„il restait toujours à démontrer pour le mettre hors de toute atteinte".

[2]) Comparez la p. 461 qui précède.

[3]) P. Duhem „Les Origines de la Statique" (Paris, A. Hermann, 1905), I, p. 52: „La recherche du mouvement perpétuel est le nom générique par lequel on désigne deux utopies distinctes, la recherche du *perpétuel moteur* et la recherche du *perpétuel mobile*".

[4]) T. XVII, p. 270.

[5]) Voir la note 5 de la p. 45.

Notre Pièce II, de 1676, reproduit la célèbre démonſtration de 1586 de Stevin qui part de l'hypothèſe de la non-exiſtence du mouvement perpétuel pour déterminer la condition de l'équilibre de deux poids liés à une même corde et placés ſur deux plans inclinés. Il eſt remarquable que Huygens dit que cette démonſtration eſt la meilleure qu'on poſſède quoiqu'il en eût trouvé lui-même en 1659 une autre (T. XVI, p. 380) que nous avons cru pouvoir appeler (T. XVI, p. 333) „plus directe". Il eſt vrai que la démonſtration de Stevin eſt beaucoup plus ſimple et que celle de Huygens prouve au fonds la même choſe, ſavoir que par un mouvement compatible avec la liaiſon le centre de gravité du ſyſtème reſte à la même hauteur.

Cette Pièce ſuffirait à elle ſeule pour faire voir que, ſuivant Huygens, partir de la non-exiſtence du mouvement perpétuel — ou, ſi l'on veut, du principe de la conſervation des forces — eſt parfois, du moins juſqu'à nouvel ordre — remarquez dans la Pièce II les mots „nondum" et „hucusque" —, la meilleure méthode pour faire voir la raiſon d'être d'un phénomène connu, ou même pour trouver des vérités nouvelles. Nous avons dit (p. 460) que de ſon vivant l'Hypothèſe I de la Pars Quarta eſt reſtée la ſeule qui permît de trouver généralement la place du centre d'oſcillation.

Il en fut autrement dans la ſuite. Suivant la mécanique claſſique, ce monument merveilleux du dix-huitième ſiècle, la loi de la conſervation des forces eſt plutôt un corollaire qu'un principe [6]). C'eſt en nous plaçant au point de vue de la mécanique claſſique que nous avons pu dire (T. XVI, p. 21, note 7), que „le Principe de la conſervation de l'énergie" a pris à un moment donné „ſa forme définitive".

Comme on peut le voir à la p. 477 qui ſuit, Huygens en février 1693 déſigne ſa thèſe de la conſervation des forces par „axioma noſtrum". En ce moment il lui donne donc une place éminente, comme il avait ſongé parfois (voir la note 5 de la p. 221 du T. XVI) à le faire pour la thèſe de la conſervation de la quantité de mouvement dans une direction donnée, dont il dit en 1669 (T. XVI, p. 181) ne pouvoir donner la démonſtration que dans un cas particulier bien que cette loi „ſemble eſtre generale".

Cette déſignation de la thèſe de la conſervation des forces par le mot „axioma" eſt *peut-être* due en partie à l'influence de Leibniz: voyez la note 6 de la p. 359 du T. XVI, et conſultez auſſi la lettre de décembre 1692 de Leibniz — T. X, p. 382 —,

---

[6]) Voir la note 1 de la p. 470.

à laquelle celle de Huygens de janvier 1693, citée à la p. 470 qui précède, ſert de réponſe. Obſervons qu'en général la philoſophie de Leibniz, là où elle prend un caractère métaphyſique, eſt reſtée ſans influence ſur Huygens. Nous avons déjà fait (T. XVII, p. 353) une remarque analogue pour la métaphyſique de Deſcartes.

La Pièce I ne conſiſte que dans une figure de 1667, qui illuſtre les „irritos conatus" des „machinatores" dont nous venons de parler. Elle nous paraît remarquable puisqu'elle repréſente un „conatum" du Marquis de Worceſter [1]), que Huygens ne ſemble pas avoir connu, mais dont le nom ſe trouve dans ſon Journal de Voyage de 1663, comme on peut le voir à la p. 474 qui ſuit.

---

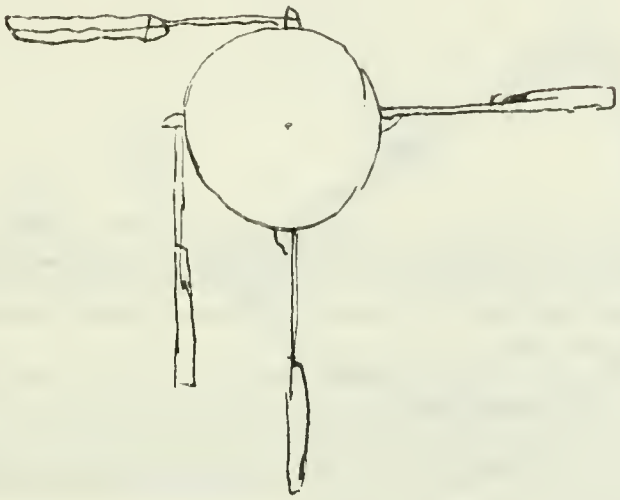
[1]) A moins que d'autres inventeurs n'aient eu la même idée indépendamment de lui, ce qui est fort possible.

I.

LE PERPETUUM MOBILE DU MARQUIS DE WORCESTER.

[1667.][1])

[Fig. 6.][2])



[1]) La figure 6 a été empruntée à la p. 147 du Manuscrit C. Elle n'est accompagnée d'aucun texte. Cette page date de 1667, puisqu'on trouve les dates de février 1667 et de mars 1667 respectivement sur les pages 143 et 149.

[2]) Le N°. 56 de „A Century of the Names and Scantlings of such Inventions as at present I can call to mind to have tried and perfected etc." par E Somerset, Marquis of Worcester (London, J. Grismond, 1663) décrit le *perpetuum mobile* suivant, qui part du même principe que celui figuré ici; il est vrai que chez Worcester le nombre des poids est beaucoup plus grand. Inutile de dire, que le marquis se vante à tort d'avoir inventé un véritable mouvement perpétuel. Si la machine a marché, il doit y avoir eu, nous semble-t-il, de la part de ceux qui la construisirent, quelque supercherie.

„To provide and make that all the Weights of the descending side of a Wheel shall be perpetually further from the Centre, then those of the mounting side, and yet equal in number and heft to the one side as the other. A most incredible thing, if not seen, but tried before the

late king (of blessed memory) in the Tower, by my directions. The Wheel was 14 Foot over, and 40 Weights of 50 pounds apiece... They all saw, that no sooner these great Weights passed the Diameter-line of the upper-side, but they hung a foot further from the Centre, nor so sooner passed the Diameter-line of the lower side, but they hung a foot nearer. Be pleased to judge the consequence".

Suivant H. Dircks „The Life, Times and Scientific labours of the second Marquis of Worcester, to which is added a reprint of his Century of Inventions, 1663, with a Commentary thereon" (London, B. Quaritch, 1865) la liste des personnes présentes fait voir que la machine a été montrée au Roi Charles I en 1641 environ. Ajoutons que Dircks a interverti sans aucune raison les mots „upper" et „lower"; il n'a apparemment pas compris l'auteur dont les explications sont d'ailleurs en général fort obscures.

Rien indique que Huygens ait lu le „Century of Inventions", mais il connaissait — consultez notre T. XVII — Caspar Calthoff (Kalthoff) appelé par Worcester dans la „Dedication to the Century": „the unparallel'd Workman both for trust and skill ... who hath been these five-and-thirty years as in a school under me imployed, and still at my disposal". Nous avons fait voir dans l'article de 1932 „De rol van den Nederlander Caspar Calthoff bij de uitvinding van het moderne stoomwerktuig", cité à la p. 550 du T. XVII, que ce fut ce même Calthoff qui résida à Dordrecht de ± 1645 à ± 1660.

Dans son Journal de Voyage de 1663 Huygens, se trouvant alors à Londres, écrit: „Calthoff besocht, daer d'inventie stont van Mil. of Woodster die misluckte", c.à.d. „Visité Calthoff, où se trouvait l'invention de Mil. Woodster [lisez Worcester], qui n'avait pas réussi". Comme il continue: „Op den houten toorn van het waterwerck geweest, etc." — c.à.d.: „monté sur la tour de bois de l'ouvrage-à-eau" —, il parle peut-être, probablement même, d'une invention différente. Mais Calthoff — qu'il connaissait au moins depuis 1655 — doit avoir causé avec lui sur d'autres sujets aussi.

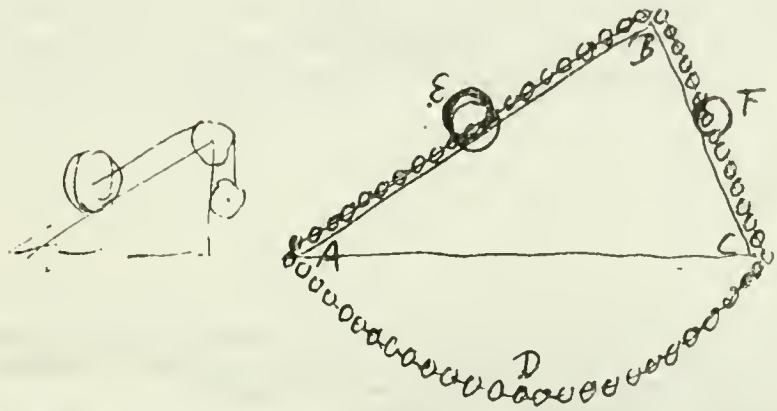
Le marquis de Worcester est sans doute une des personnes, évidemment nombreuses, visées par Huygens à la p. 251 qui précède dans le passage sur les inventeurs que nous venons de citer (p. 470).

II.

LA NON-EXISTENCE DU MOUVEMENT PERPETUEL SUIVANT STEVIN.

1676.[1])

[Fig. 7.]



À la p. 62 du Manuscrit E Huygens dit à propos du plan incliné:

Hujus vero nondum [2]) æque evidens demonſtratio reperta eſt ac noſtra illa libræ, quam explicuimus academicis Pariſinis [3]). Optima hucusque [2]) videtur illa Stevini [4]) qua catenam triangulo circundat; velut hic triangulo ABC [Fig. 7], cujus baſis AC horizonti parallela, injecta eſt catena ABCD. Hanc enim ſatis apparet ultro in neutram partem commovendam, eo quod, etiamſi moveatur, eodem loco maneat catena, neque hilum deſcendat, quatenus ex infinita multitudine particularum æqualium conflata intelligitur. Atqui pars catenæ ADC non magis attrahit partem BA quam BC.

---

[1]) La Pièce a été écrite (p. 61 du Manuscrit) Hagæ 1676 Oct.

[2]) Comparez sur ces mots l'Avertissement qui précède (p. 471).

[3]) Il s'agit de la démonstration contenue dans le mémoire dont nous avons parlé dans la note 6

Ergo cum catena immota maneat, ſequitur partium quoque BA et BC æquale eſſe momentum [5]); quamobrem et ablata parte ADC, partes AB, BC æquiponderabunt. Harum vero gravitates abſolutæ ita ſunt inter ſe ut ipſæ longitudines AB, BC. Ergo quando gravitates ponderum per plana AB, BC ſe mutuo trahentium ſunt inter ſe ſicut ipſorum planorum longitudines, apparet fieri æquilibrium.

Nihil autem intereſt an pondus lateris AB per totam ejus longitudinem diviſum ſit, an totum collectum in E; ſimiliterque pondus catenæ BC in F [6]).

---

de l'Appendice I à la Pars Quarta de l'„Hor. osc." Cet Appendice fait voir que Huygens avait d'abord l'intention, à laquelle il renonça, de fonder la démonstration de l'équilibre de la balance sur l'hypothèse de la non-existence du mouvement perpétuel.

[4]) Comparez la p. 333 du T. XVI.

[5]) Quoiqu'on puisse prendre ce mot dans le sens précis que nous lui donnons aujourd'hui — comparez la p. 341 du T. XVI —, il semble bien plus probable qu'il ait ici son sens général d'inclinaison au mouvement.

[6]) On sait que Stevin orne ses „Beghinselen der Weeghconst" de l'adage „Wonder en is geen wonder", ce qu'on peut traduire, nous semble-t-il, par: „Merveille n'est pas miracle" („en... geen" = „ne ... pas"). Dans la note 3 de la p. 79 du T. III nous avons généralement parlé de „la devise de Simon Stevin". En effet, son fils H. Stevin, en parlant en cet endroit du „spreeckwoort mijns Vaders", semble considérer cet adage comme l'énoncé d'une conviction bien arrêtée. Aux yeux de S. Stevin, pensons-nous, l'existence d'un vrai *eeuwig roersel* ou *perpetuum mobile*, quel qu'il fût, n'aurait été rien moins qu'un miracle. Son fils (T. III, p. 77) entreprend de prouver généralement la non-existence du mouvement perpétuel. Voici la traduction de la réponse de Huygens à sa lettre datant de 1660: „C'est une choſe de grande importance que votre entreprise de démontrer, dans cette brochure, l'impossibilité du *perpetuum mobile*. Je suis, moi aussi, fermement persuadé que le *perpetuum mobile* ne peut être trouvé *ratione mechanica;* de plus cela est en contradiction avec les principes que j'ai toujours suivis dans cet art. Mais il ne semble pas possible d'en donner une démonstration assez claire pour qu'il ne se trouve toujours des personnes recherchant cette chose impossible et tâchant de tromper la Nature".

III.

LA CONSERVATION DES FORCES SUIVANT HUYGENS.

[1693] [1].

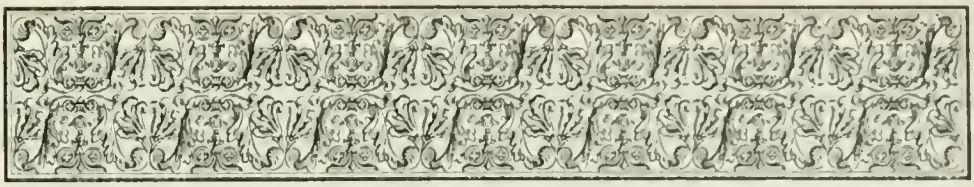
In corporum motibus quibuscunque, nihil virium perditur aut interit nisi effectu edito et exstante ad quem producendum tantundem virium requiritur quantum est id quod decessit. Vires voco potentiam extollendi ponderis. Ita dupla vis est quæ idem pondus duplo altius extollere potest.

---

[1]) Cette Pièce est empruntée à la p. 175 (numération de Huygens) du Manuscrit H. La p. 172 porte la date du 31 janvier 1693 et la p. 176 celle du 12 février suivant. À la p. 182 il parle de son *axiome* de la p. 175 („Ex axiomate nostro pag. 175 in margine vires corporum non interire nisi edito effectu &c.").

Ces pages du Manuscrit H traitent d'une horloge marine. On les trouve plus loin dans le présent Tome.

PRINCIPE DE L'INCITATION DONNÉE AUX CORPS PAR UN AGENT EXTÉRIEUR OU PAR UNE CAUSE INCONNUE, ET DÉCOUVERTE DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ISOCHRONISME DES VIBRATIONS.



Avertiſſement.

Dans un programme, datant d'avant 1673, que nous avons déjà mentionné dans la note 6 de la p. 247 du T. XVII (il eſt intitulé: „Ordre qu'on pourra tenir a traiter des Mechaniques") Huygens parle comme ſuit de la Statique et de la Dynamique [1]):

„Je voudrois traiter en ſuite de la Statique des corps ſurnageans à l'eau, et de leur poſitions ſuivant les diverſes figures, de quoy a eſcrit Archimede, l'on pourroit examiner ſon traitè, et auſſi celuy que j'en ay fait [2]).

Je mettrois icy la ſtatique des poids ſuſpendus par pluſieurs cordes diverſement tirees, mais nous en avons traitè ſuffiſamment cy devant en noſtre Aſſemblee [3]).

Il reſte les matieres qui regardent particulierement le mouvement qui ſont d'une contemplation plus difficile que toutes les autres et comme elles participent de la Phyſique, auſſi ſervent elles autant a cette partie de la Philoſophie qu'aux uſages de la Mechanique.

Il y a en premier lieu a eſtablir la theorie du mouvement des corps qui tombent, dans laquelle je crois qu'il faut ſe ſervir des hypotheſes qui menent aux propoſitions

---

[1]) Ce programme date probablement de 1668, puisqu'on trouve à la p. 218 du Manuscrit C une liste du même genre des „Parties des Mechaniques". Nous reviendrons sur ces programmes, lorsque nous traiterons, avec Huygens, de quelques questions techniques.

[2]) T. XI, Traité „De Iis quæ liquido supernatant".

[3]) Voir les p. 332—333 et 379 du T. XVI. Nous reviendrons sur cette question, à laquelle sont encore vouées plusieurs pages des Manuscrits.

qui s'accordent le mieux avec l'Experience [1]). D'icy dependent auſſi les mouvements des corps jettez et des boulets de canon fleſches &c.

De la meſme theorie depend le mouvement des pendules et la maniere de le rendre parfaitement egal, dont je donneray la demonſtration [2]).

La meſme ſert encore a demonſtrer les centres d'agitation [3]) que je pourray donner enſuite et par les quelles on peut determiner exactement une meſure univerſelle et inalterable a jamais [4]).

Il y a en fin a examiner les effects du mouvement circulaire et ſa force a rejetter du centre, dont j'ay a propoſer une Theorie qui s'accorde parfaitement avec les experiences [5]). Et duquel depend auſſi une belle experience qu'il y a a faire pour prouver que la terre tourne [6])".

Les Pièces I et II qui ſuivent ſe rapportent à la „contemplation" des „matieres qui regardent particulierement le mouvement" et „participent de la Phyſique, partie de la Philoſophie", en ſervant en même temps „aux uſages de la Mechanique". Comparez ſur ce „double but" les p. 32 et 76 qui précèdent.

La Pièce II de 1675 contient des réflexions ſur le mouvement d'un corps ſous

---

[1]) T. XVII, p. 125—137, T. XVIII, p. 124—149.

[2]) T. XVI, p. 344—349 et p. 392—413, T. XVII, p. 95—96 et p. 139—141, T. XVIII, p. 150—203.

[3]) Au début de la Pars Quarta de l'„Hor. osc." Huygens parle des „centra oscillationis seu agitationis". Le sens précis de l'expression „centrum agitationis" pourrait être celui d'un point tel que la somme totale des moments des quantités de mouvement autour de ce point est nulle. C'est là p. e. le sens du mot „centre d'agitation" chez Mariotte lorsqu'il dit (Prop. XIX de la deuxième Partie du „Traitté de la Percussion ou Choc des Corps" — p. 93 des Oeuvres de Mr. Mariotte, T. I, Leide, P. van der Aa, 1717): „Les Centres de vibration [ou oscillation], agitation, & percussion sont un même point dans un triangle qui se meut sur sa base". Cependant nous n'oserions affirmer, puisque Huygens ne parle plus nulle part de cette question dans son livre, s'il a voulu indiquer que le centre d'oscillation jouit de la propriété dont nous venons de parler et sur laquelle on peut consulter les p. 443—445 qui précèdent.

On peut voir à la p. 454 du T. IX ce que Huygens dit en 1690 du Traité de Mariotte, sur lequel on peut aussi consulter les p. 207—209 du T. XVI.

[4]) T. XVI, p. 354—356, T. XVII, p. 120, T. XVIII, p. 58—59 et 348—355.

[5]) T. XVI, p. 235—328, T. XVII, p. 91, note 4, p. 153, 244 et 277, T. XVIII, p. 44—46 et 366—368.

[6]) T. XVI, p. 376—377, T. XVII, p. 247 et 285—286, T. XVIII, p. 46, troisième alinéa. Voir aussi ce qui est dit plus loin dans le présent Tome sur l'expédition de 1686—1687 au Cap de Bonne Espérance. L'avant-dernier alinéa de la p. 224 du T. XVI se rapporte au même sujet.

l'influence d'un agent matériel extérieur ou d'une cauſe inconnue. C'eſt d'une force qu'on peut appeler „newtonienne" — quoique Newton n'ait rien à y voir — qu'il s'agit ici, non pas de la force cartéſienne conſidérée à la p. 469 qui précède. Le corps conſidéré eſt, peut-on dire, un point peſant. Suivant Huygens — ce qui n'était pas l'opinion de tout-le-monde; voir le troiſième alinéa de la note 11 de la p. 453 qui précède — il ne faut pas de force pour qu'un mobile continue ſon mouvement uniforme. Il eſt apparemment queſtion d'un mouvement uniforme *en ligne droite*. Lorſqu'une force agit ſur un corps, elle lui donnera „continuellement de l'accélération".

Lorſque la force agiſſant ſur le mobile provient d'un moteur, elle n'eſt pas toujours — même lorſqu'elle agit dans le ſens du mouvement, ce qui a lieu ici par hypothèſe — la force totale de ce moteur, c.à.d. la force qu'il exercerait ſi le corps était en repos dans la ſituation conſidérée; c'eſt pourquoi il convient de diſtinguer la force exercée de la force totale en l'appelant „incitation".

Le mot „incitatio" ſe trouve d'ailleurs déjà dans la Pièce I de 1673 [7]), dans laquelle il n'y a pas lieu de diſtinguer à cauſe du mouvement que le point peſant poſſède déjà, la force exercée de la force totale. *Incitatio* y eſt toujours la force agiſſante, celle qui donne l'accélération, c.à.d. *la compoſante de la force agiſſante dans le ſens du mouvement*. Il eſt vrai qu'on peut auſſi conſidérer cette „incitatio" comme inhérente au corps (voir dans la quatorzième ligne de la p. 490 l'expreſſion „incitationem quam haberet").

Huygens développe dans la Pièce I la théorie des vibrations harmoniques (pour employer ce terme) en les comparant — heureuſe trouvaille — à des oſcillations cycloïdales; comparaiſon d'où réſulte leur iſochroniſme pour différentes amplitudes; il comprenait que les incitations provenant de cauſes différentes (peſanteur, élaſticité, etc.) ſont équivalentes, comme le dit l'avant-dernier alinéa de la p. 497, ainſi que l'Hypothèſe de la page ſuivante par laquelle ſe termine la Pièce II.

Juſqu'à préſent les hiſtoriens n'ont pas ſignalé Huygens comme le premier ſavant qui ait développé la théorie des vibrations harmoniques. Nous ignorons d'ailleurs s'il a jamais fait part de ſa trouvaille à qui que ce ſoit [8]). Il a certainement cauſé avec Leibniz

---

[7]) Ou 1674.
[8]) Comparez la note 2 de la p. 246 du T. XVII.

ſur ce ſujet, puiſque ce dernier écrit dans ſa lettre du 2 mars 1691 (T. X, p. 52): „M. Newton n'a pas traité des loix du reſſort; il me ſemble de vous avoir entendu dire autres fois que vous les aviés examinées, et que vous aviés demonſtré l'iſochroniſme des vibrations". C'eſt donc pendant le ſéjour de Leibniz à Paris, c.à.d. bientôt après ſa découverte [1]), que Huygens en a fait part au philoſophe allemand; mais ſans entrer dans les détails. Dans ſa réponſe du 26 mars 1691 Huygens ſe contente d'écrire: „J'ay une demonſtration de l'ſochroniſme des vibrations du reſſort, eſtant ſuppoſé qu'il cede dans la meſme proportion de la force qui le preſſe, comme l'experience l'enſeigne conſtamment [2])".

En 1691 Huygens n'eût cependant trahi aucun ſecret en diſant de quelle façon il avait paſſé de la conſidération de la vibration cycloïdale à celle de la vibration harmonique quelconque, puiſqu'on trouve la même choſe dans les „Philoſophiæ naturalis Principia mathematica" de 1687 de Newton: ſuivant le Corollaire à la Prop. II, Theor. XVIII du Liber Primus de ce dernier, dans le cas du mouvement cycloïdal la compoſante de la force agiſſant dans le ſens du mouvement eſt proportionnelle à l'arc que le point peſant doit parcourir pour atteindre le point le plus bas; d'où réſulte, comme le dit déjà l'énoncé du théorème, que „oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora" [3]). La différence eſſentielle c'eſt que Huygens, dans ſon „Hor. oſcill.", avait prouvé d'une autre façon le tautochroniſme de la cycloïde, et que, conſtatant enſuite que la force agiſſante eſt proportionnelle à l'écart, il en avait conclu à l'iſochroniſme des vibrations harmoniques quelconques; tandis que Newton, après avoir remarqué la proportionnalité de la force à l'écart dans le même cas ſpécial, en déduiſit par un raiſonnement ſur les accélérations et les viteſſes, le tautochroniſme de la cycloïde ainſi que la propriété analogue des vibrations quelconques où la force eſt proportionnelle à l'écart [4]). Il eſt de toute évidence que c'eſt la lecture de l'„Hor. oſc." qui a amené Newton à conſidérer l'oſcillation cycloïdale, mais ſon idée de

---

[1]) Comparez la note 9 de la p. 195 du T. XVI.

[2]) T. X, p. 58. Dans la lettre il ne fait pas mention, comme dans la minute (p. 55), de Robert Hooke.

[3]) Newton considère une oscillation cycloïdale — nous dirions hypocycloïdale — dont celle de Huygens est un cas particulier. Comparez la fin de la note 2 de la p. 399 qui précéde.

[4]) Attendu que l'hypocycloïde, comme Newton le remarque, peut dégénérer en une ligne droite, l'isochronisme des vibrations harmoniques suivant une droite résulte immédiatement de celui des oscillations hypocycloïdales.

prouver de cette façon le tautochroniſme peut fort bien avoir été originale [5]): rien n'indique — quoique cela ſoit évidemment poſſible — que la penſée de Huygens ait été divulguée, ni avant, ni après 1687.

Il eſt vrai que 's Graveſande écrit dans ſes „Phyſices Elementa mathematica Experimentis confirmata, ſive Introductio ad Philoſophiam Newtonianam" de 1742 que dans le cas de la cycloïde la force agiſſante eſt proportionnelle à l'arc [6]) et que les vibrations d'une lame élaſtique ſont iſochrones puiſqu'on peut dire „laminam agitari juxta Leges Penduli in Cycloide oſcillati" [7]), à quoi il ajoute: „Hugenius detexit laminæ elaſticæ vibrationes eſſe æquè diuturnas" [8]), mais ces remarques éparſes ne font nullement voir qu'il s'agit ici d'une théorie dont Huygens fut l'auteur. Nous ne croyons donc pas que 's Graveſande ait remarqué la „Pièce I" dans les manuſcrits de Huygens; de fait, comme nous l'avons déjà obſervé à la p. II du T. I, il s'eſt borné, en ſa qualité d'éditeur de Huygens, à reproduire les ouvrages déjà imprimés, ſans tenir compte en aucune façon des manuſcrits, dont le contenu ſemble lui être reſté abſolument inconnu.

Il eſt donc à peu près ſuperflu de dire que ni 's Graveſande ni, ſauf erreur, aucun autre auteur, n'indique que Huygens eſt le premier ſavant qui ait entrepris de donner une théorie mathématique des cordes vibrantes [9]). Cette théorie, il eſt vrai, n'eſt qu'une ébauche, mais c'eſt une ébauche méritoire [10]).

---

[5]) D'ailleurs, dans la Prop. XXXVIII, Theor. XII du Liber Primus, Newton avait déjà démontré d'une autre façon l'isochronisme des vibrations harmoniques suivant une droite. Il y considère la droite comme la limite d'une ellipse; or, suivant la Prop. X, Probl. V du même livre les périodes de toutes les ellipses qu'un mobile peut décrire sous l'influence d'une force émanant d'un centre et proportionnelle à la distance du mobile à ce centre (lequel est en même temps celui des ellipses), sont les mêmes.

[6]) N°. 414, Lib. I, Cap. XX, p. 111.

[7]) N°. 1335, Lib. II, Cap. XIII, p. 384.

[8]) Nous citons d'après la troisième édition, celle de 1742 (Leidæ, apud Joh. Arn. Langerak, Joh. et Herm. Verbeek). La dernière phrase citée est empruntée à la p. XXVIII de la Præfatio de cette édition. Elle ne se trouve pas dans les préfaces des deux éditions antérieures, lesquelles sont reproduites dans la troisième.

Il semble bien que s'Gravesande, en mentionnant „Hugenius" et la „lamina elastica", ne parle que de résultats expérimentaux.

[9]) Voir cependant ce que nous disons plus loin du Père I. G. Pardies.

[10]) On trouve dans les Philos. Transact. de 1713 („The Philosophical Transactions from the Year MDCC to the Year MDCCXX, Abrig'd etc. by Benj. Motte", London, R. Wilkin etc. 1721,

Dans le § 6 de la Pièce I, Huygens parle auſſi de ſes expériences ſur ce ſujet. Il ne dit pas ſi c'était chez lui ou bien à l'Académie qu'il les avait priſes.

Avant lui, Merſenne en avait pris un grand nombre, comme on peut le voir dans ſes „Harmonicorum libri, in quibus agitur de ſonorum natura, cauſis, & effectibus: de Conſonantiis, Diſſonantiis, Rationibus, Generibus, Modis, Cantibus, Compoſitione, orbisque totius Harmonicis Inſtrumentis" [1]). Il avait établi expérimentalement un grand nombre de théorèmes. La Prop. XXIX de la p. 24 p.e. dit que les vibrations de différentes amplitudes d'une même corde, ayant une tenſion donnée, ſont iſochrones. En effet, la hauteur des ſons forts et faibles eſt la même: il ſuffiſait donc de comprendre que ce qui fait la hauteur du ſon, c'eſt le nombre des vibrations. La Prop. IX de la p. 12 dit que les vibrations de deux cordes du même genre de longueurs inégales ſont iſochrones lorſque les tenſions ſont entre elles comme les carrés des longueurs. Etc.

C'eſt de la conſidération des cordes vibrantes — qui formaient déjà dans l'antiquité le ſujet des recherches de Pythagore [2]) et de Ptolémée — que l'auteur de l'„Harmonie Univerſelle" [3]) paſſa à celle d'autres mouvements oſcillatoires [4]). C'eſt lui qui avait dirigé (T. XVI, p. 349, T. XVIII, p. 243) les regards du jeune Huygens ſur le mouvement périodique des pendules. Grâce à Huygens nous voyons ici, par un juſte retour, la théorie des cordes vibrantes profiter des réſultats obtenus dans le domaine des pendules.

Vol. I, p. 53) l'article théorique de Brook Taylor „Of the Motion of a stretcht String", où l'auteur établit, en s'inspirant de l'ouvrage de Newton, que „vibrationes omnes, tam maximæ quam minimæ, peragentur in eodem tempore periodico, & puncti cujusvis motus similis erit oscillationi corporis Funependuli in Cycloide". C'est croyons-nous, la première théorie mathématique sur la corde vibrante après celle, restée inconnue, de Huygens de 1673. Voir encore, dans les Additions et Corrections, un passage de Leibniz qui se rapporte à ce sujet.

Le résultat du calcul est que la corde est isochrone avec un pendule de longueur $\frac{d^2}{c^2} \cdot \frac{N}{P} \cdot L$, où $\frac{c}{d} = \pi$, tandis que P est la tension, N le poids et L la longueur de la corde. Il en résulte pour le temps d'une vibration simple $t = \sqrt{\frac{mL}{P}}$, m étant la masse de la corde, conformément à la dernière formule de la note 3 de la p. 494 qui suit.

[1]) Lutetiæ Parisiorum, G. Baudry, 1648. C'est la deuxième édition latine amplifiée, la première étant de 1636.

[2]) Ou des Pythagoriciens.

[3]) De 1627. Le titre de cet ouvrage exprime la connexion avec l'ouvrage („Harmonika") de Ptolémée.

Cependant il y a une réſerve à faire ſur la priorité de Huygens. Il eſt juſte d'ajouter qu'il connaiſſait dès 1673 l'ouvrage de I. G. Pardies, apparu ſimultanément avec l'„Horologium oſcillatorium" et dont l'auteur, profeſſeur à Paris au „Collège de Clermont", décéda immédiatement après cette publication. Nous parlons de „La Statique ou Science des Forces mouvantes" (citée e.a. dans la note 4 de la p. 304 du T. VII). Dans ſa Préface Pardies ſe dit „réſolu de faire tout un corps de Mécanique". Il parle de ſix „diſcours", dont „La Statique" eſt le deuxième. „Le cinquiéme diſcours", dit-il, „eſt du mouvement de Vibration, c'eſt à dire, de tous les corps qui font un mouvement réciproque allant & venant, comme font les pendules, les cordes tendues, les reſſorts, & pluſieurs autres corps. L'on y décrit une pendule, dont toutes les vibrations ſont d'une égale durée; l'on démontre auſſi que toutes les vibrations d'une corde tendue durent également; que les vibrations de deux cordes d'égale groſſeur, & également tendues, ſont en raiſon réciproque des longueurs des cordes, au lieu que dans les pendules elles ſont ſeulement en raiſon ſous-doublée; que dans les cordes égales, les vibrations ſont en raiſon ſous-doublée des forces ou des poids qui les tendent; que les vibrations ſont encore en raiſon ſous-doublée des groſſeurs des cordes d'égale longueur, & également tendues. Deſorte que l'on démontre par les cauſes tout ce que l'expérience nous fait remarquer dans les ſons & dans l'harmonie des cordes tendues".

On ne ſait ce que ſont devenus les manuſcrits de l'auteur, ni s'il avait déjà rédigé ce cinquième diſcours en tout ou en partie. Son programme fait voir que probablement, comme Huygens, il paſſa, d'une façon ou d'une autre, de la conſidération des pendules à celle des vibrations harmoniques; ce qui eſt d'autant plus croyable qu'il avait trouvé, et publié à la fin de „La Statique", une ingénieuſe démonſtration du tautochroniſme de la cycloïde. Il n'eſt pas impoſſible — quoiqu'on n'en trouve rien chez lui — qu'il ait remarqué, en réfléchiſſant ſur cette démonſtration, que la compoſante de la peſanteur qui agit dans le ſens du mouvement eſt proportionnelle à l'arc, ce que nous avons appelé plus haut (p. 483) la trouvaille de Huygens [5]).

Vers la fin du premier chapitre du „Traité de la Lumière" de 1690 Huygens parle,

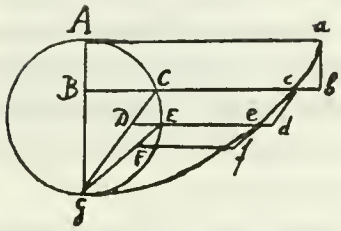
---

[4]) Nous ne parlons pas ici de l'influence de Galilée qui — soit dit en passant — était le fils d'un musicien distingué.

[5]) En 1673 Huygens écrit à Oldenburg à propos de cette démonstration (T. VII, p. 314) que

à propos du ſixième diſcours de Pardies qui eſt du mouvement d'Ondulation etc., de ſon Traité „dont il me fit voir une partie et qu'il ne put achever, étant mort peu de temps après". (Il ignore „ſi ſon écrit s'eſt conſervé"). Il eſt donc poſſible que Pardies ait auſſi cauſé avec Huygens ſur les ſujets du cinquième diſcours, ou même qu'il lui en ait fait voir une partie déjà rédigée.

[Fig. 8.]



„ce n'est pas grande chose .... d'avoir fait la démonstration d'une proposition desia trouvée". Cependant la démonstration de Pardies nous paraît assez remarquable. Il suppose (en observant aussi qu'on peut perfectionner le raisonnement en enfermant le temps total dont il s'agit entre deux limites) que le point pesant parcourt successivement [Fig. 8] les droites *ab*, *cd*, *ef*, etc. — tangentes à la courbe — égales et parallèles à AB, CD, EF, etc., où $AB = \frac{1}{n} AG$, $CD = \frac{1}{n} CG$, $EF = \frac{1}{n} EG$, le nombre arbitraire *n* pouvant être pris fort grand. Un mobile M_1 partant de *a* parcourra l'élément *ab* dans le même temps qu'un mobile M_2, partant de *c*, parcourra *cd*, ou un mobile M_3, partant de *e*, l'élément *ef*. De plus M_1 parcourra ensuite *cd* dans un temps égal à celui nécessaire à M_2 pour parcourir *ef*, etc. Tous les mobiles, de quelque point qu'ils partent, finiront par se rejoindre au point G.

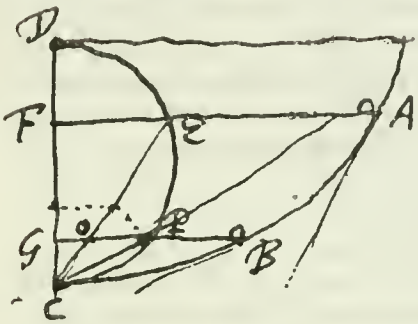
Dans l'exécution de ce calcul il faut faire usage de ce que l'accélération avec laquelle un élément tel que *cd* est parcouru, est proportionnelle à CG, donc aussi à la longueur de l'arc cG, double de CG, ou du moins d'un raisonnement qui suppose implicitement cette proportionnalité.

I.

DECOUVERTE DE LA THEORIE GENERALE DE L'ISOCHRONISME DES VIBRATIONS.

[1673 ou 1674][1]

[Fig. 9.]



§ 1. Si arcus cycloidis AC [Fig. 9] dividatur utcunque in B, erit gravitas ponderis in A ad gravitatem ejusdem in B positi ut arcus AC ad arcum BC.

Est enim gravitas in A ad gravitatem in B ut gravitas super plano EC ad gravitatem super plano PC. hoc est ut PC ad OC, hoc est ut EC ad PC, hoc est ut arcus AC ad arcum BC [2]). quod erat demonstrandum.

[Fig. 10.]

§ 2. CB est ∞ 2CA [Fig. 10] [3]).

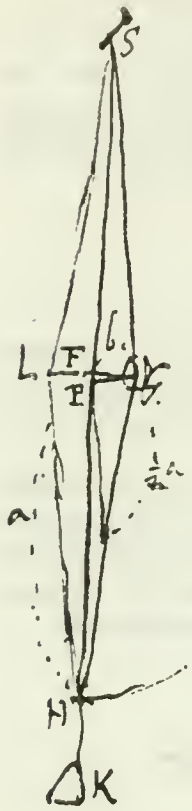
---

[1]) La Pièce, que nous jugeons être de 1673, est empruntée aux p. 411—415 du Manuscrit D. La p. 391 porte la date „ult. Jul. 1673". La première date du Manuscrit E est le 19 décembre 1674. Nous divisons la Pièce en §§.

[2]) Huygens savait depuis longtemps (voir la p. 367, datant de 1659, du T. XIV) que l'arc CB [Fig. 9] est le double de la droite CP parallèle à la tangente en B; mais il ne paraît avoir remarqué qu'après la composition de l'„Hor. osc." le théorème qu'il énonce ici, savoir que la composante du poids qui produit l'accélération est, dans le cas de la cycloïde, proportionnelle à l'arc correspondant se terminant au sommet. Or, comme il avait démontré l'isochronisme des vibrations dans le cas de la cycloïde, il put en conclure — voir le § 3 qui suit — que dans d'autres cas aussi où la force accélérante est proportionnelle à l'écart, la période doit être indépendante de l'amplitude.

[3]) Huygens considère ici une corde horizontale impondérable portant au milieu un point pesant

[Fig. 11.]



S'il demeure en B en tournant, il n'a que faire de faire le tour en si peu de temps que quand il demeure en A, c'est à dire qu'il ne luy faut pas double vitesse, puis qu'un moindre poids que double de celuy qui tient la corde en A est capable de la tenir en B. Donc les plus grands tours sont plus lents que les moindres. Mais en tant que les cordes EA, EB sont censees egales, les tours par B et par A sont isochrones.

§ 3. Ponatur pondus G æquale K [Fig. 11]. quæritur ratio temporis per GF ad tempus casus perpendicularis per FH [1]).

AD [2]) $\infty \frac{1}{2}b$. Unde arcus AE ∞ FG ∞ b [Fig. 12]. Atqui ut tempus per arcum cycloidis EA sit æquale tempori per GF [Fig. 11] oportet esse CA $+$ AD $=$ $b + \frac{1}{2}a \infty \frac{1}{2}$GH nam GH censetur æqualis FH quia FG minima. Iamque incitatio ponderis in G [3]) erit ad incitationem quam haberet in perpendiculari descendens ut FG ad $\frac{1}{2}$GH. ex legibus mechan.

Ergo et AD $+$ AB $= b + \frac{1}{2}a$

$= \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}a$

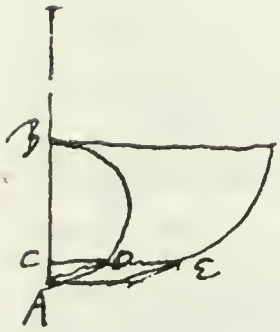
Sed AD est $\frac{1}{2}b$. Ergo BA $\infty \frac{1}{4}a$.

Est autem tempus per EA ad tempus per BA ut semicircumferentia BDA ad BA. Et tempus per BA ad tempus per FH ut 1 ad 2, quia dictum est BA esse $\frac{1}{4}a$ sive $\frac{1}{4}$FH.

Ergo ex æquo, tempus per EA seu per GF ad tempus per FH ut semicircumferentia BDA ad duplam BA, sive ut quadrans circumferentiæ ad diametrum BA.

Ergo vibrationis integræ GL tempus ad tempus par FH ut semicircumferentia ad diametrum.

[Fig. 12.]



Ergo tempus vibrationis integræ GL æquale tempori semioscillationis [4]) penduli longitudinem duplam FH habentis. hoc est tempori semioscillationis penduli SH.

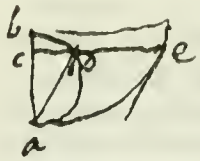
Sit jam pondus K quadruplo gravius quam ante, ac proinde quadruplum ponderis G.

Jam quadruplo etiam, quam ante, majori pondere opus esset ad tenendam chordam inflexam angulo SGK.

Ergo pondus G jam quadruplo majori vi quam ante incitatur, tam in principio lineæ GF, quam in singulis ejus punctis proportionaliter.

A ou B décrivant autour du point C des circonférences de cercle: la tension est si grande qu'il

[Fig. 13.]



Ergo percurrit GF eodem tempore quo arcum *ea* [Fig. 13] cycloidis alterius æqualem ipſi FG, in cujus arcus principio *e* quadruplo magis incitetur quam in principio arcus EA prioris cycloidis.

Oportet igitur *ac* quadruplam eſſe AC [Fig. 12] et *ad* ∞ AD. ſic enim arcus *ea* æqualis fiet arcui EA, et incitatio in *e* ſive per rectam *da* erit quadrupla incitationis in E ſive per rectam DA. Jam vero cum *ca*, *ad*, *ab* ſint proportionales apparet *ba* eſſe $\frac{1}{4}$BA. Ideoque arcum *ea* percurri dimidio temporis quo percurritur arcus EA.

Ergo et GF, exiſtente pondere *K* quadruplo ponderis *G*, duplo minori tempore peragetur quam ante cum pondus *K* ipſi *G* æquale eſſet.

Igitur qualicunque poſita ratione ponderis *K* ad *G*, habebit tempus ſemioſcillationis penduli SH ad vibrationem integram GL rationem ſubduplicatam ponderis *K* ad *G* [5]).

Ergo etiam ſi viciſſim velimus ut manente eodem pondere *K* vibrationes duplo celeriores fiant, oportet in *G* unam quartam prioris ponderis relinqui.

§ 4. Quæritur proportio temporis ambitus circularis per circumferentiam cujus

---

n'est besoin de tenir compte que de la force centrifuge (et centripète). Si cette force etait absolument proportionelle à l'écart, il y aurait isochronisme des vibrations de différentes amplitudes d'après les Prop. I et III sur la force centrifuge (voir la p. 366 qui précède).

[1]) La corde tendue SGH est supposée impondérable; ou, si l'on veut, c'est une corde dont le poids, fort considérable, est supposé concentré en son point milieu. La corde étant verticale, la tension de la partie SG est supérieure à celle de la partie GH. Dans le § 1 Huygens ne tient pas compte de cette circonstance; il suppose la force agissant sur le poids *G* dirigée vers le centre du mouvement F. Mais dans le § 6 il revient sur ce sujet pour apporter la correction nécessaire. Le poids se meut ici, par hypothèse, suivant la droite GFL.

[2]) La corde (Fig. 12).

[3]) C.à.d. la composante, dans le sens du mouvement, de la force agissant sur le poids *G*. Comparez l'Avertissement qui précède.

[4]) Il s'agit de la moitié d'une oscillation simple.

[5]) Il résulte de ce calcul que dans le cas considéré — lorsqu'on ne tient pas encore compte de la correction nécessaire; voir les notes 1 de la p. 491 et 5 de la p. 493 — le temps de la vibration simple, de G à L, est $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{G}{K}}$, où *g* est l'accélération de la pesanteur et $l = 2a$ la longueur de la corde. *K* est la tension de la corde, et *G* son poids concentré en son point milieu. En appelant — ce que Huygens ne fait point; comparez la note 5 de la p. 230 du T. XVI — *m* la masse du poids *G*, on peut écrire $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{ml}{K}}$.

diameter minima GL, ad tempus casus per FH. vel potius ad tempus semioscillationis penduli SH.

Si incitatio ponderis in G esset æqualis gravitati ipsius G vel K, deberet tempus circuitus in circulo GL esse æquale duabus oscillationibus penduli longitudinis FG. per theorema . . . [1]) nostrum de vi centrifuga. Nunc autem incitatio in G est ad pondus absolutum G ut FG ad $\frac{1}{2}$GH, hoc est ut b ad $\frac{1}{2}a$. (nam GH censetur æqualis FH). Ut igitur fiat vis centrifuga æqualis incitationi seu pressioni chordæ flexæ super pondus G. debet fieri sicut b ad mediam proportionalem inter b et $\frac{1}{2}a$, hoc est, sicut b ad $\sqrt{\frac{1}{2}ab}$ ita tempus duarum oscillationum penduli FG ad tempus circuitus per circulum GL. Sit tempus oscillationis unius penduli FG, ∞ n. Ergo $\frac{2n\sqrt{\frac{1}{2}ab}}{b}$ ∞ tempus circuitus per circulum GL.

Verum ut b ad $\sqrt{2ab}$ ita tempus oscillationis penduli FG ad tempus oscillationis penduli SH. Ergo hoc tempus erit $\frac{n\sqrt{2ab}}{b}$.

Erat autem tempus circuitus per circulum GL ∞ $\frac{2n\sqrt{\frac{1}{2}ab}}{b}$ seu $\frac{n\sqrt{2ab}}{b}$.

Ergo hoc tempus circuitus æquale tempori oscillationis penduli SH. ac proinde per ea quæ pag. præced. [2]) duplum temporis vibrationis GL [3]).

§ 5. Poteram pagina præced. [2]) brevius sic rationem colligere.

Est autem tempus per EA æquale tempori semioscillationis penduli duplam longitudinem BA habenti[s], hoc est longitudinem $\frac{1}{2}a$, nam BA est $\frac{1}{4}a$. Ergo et tempus per GF æquale eidem semioscillationi penduli 2BA sive $\frac{1}{2}a$.

Sed hæc semioscillatio est ad semioscillationem penduli SH ut 1 ad 2. Ergo tempus per GF æquale dimidio semioscillationis penduli SH. Ergo tempus totius vibrationis GL æquale semioscillationi penduli SH. vel oscillationi penduli dimidiæ longitudinis FH.

---

[1]) Voir le théorème X à la p. 367 qui précède, ou bien la Proposition identique du Traité „De Vi Centrifuga" à la p. 291 du T. XVI.

[2]) C.à.d. par le § 3.

[3]) Huygens ne calcule ici la période d'une vibration circulaire que pour le cas où la tension K et le poids G sont égaux. Il est évident qu'il eût pu tout aussi bien considérer le cas où cette égalité n'existe pas et qu'alors aussi il serait arrivé à la conclusion que le temps d'une vibration circulaire — c'est le cas déjà considéré dans le § 2 — est le double de celui de la vibration simple dans le cas du § 3. Cette période est donc, d'après ce théorème et la note 5 de la p. 491, $T = 2t = \pi\sqrt{\frac{ml}{K}}$.

§ 6 [4]). Si experimentum capiatur hujus rei, non fuccedet fi filum SH perpendiculari fitu tendatur, quia pondus G præter incitationem à tenfione quam facit K, incitatur etiam velut pendulum a perpendiculari SF extractum, hoc eft velut fi in plano inclinato, ad SG perpendiculari, jaceret.

Ad inftituendum ergo experimentum deberet SH horizontali pofitu jacere, et pondus G alio præterea filo perpendiculari longiffimo fuperne diftineri, ut ne infra rectam SH defcendere poffet. pondus autem K ipfi G æquale fuper trochleam appendendum.

Si tamen manente SH perpendiculari fcire libeat tempus vibrationis GL, addenda eft incitatio quæ ponderi G ex ratione penduli SG advenit ad incitationem a flexu SGH ac pondere K effectam, et ficut fumma hæc ad mediam proportionalem inter hanc fummam et incitationem a pondere K ita erit tempus vibrationis GL fupra definitum ad tempus verum vibrationis GL.

Incitationum rationes inter fe fic colliguntur. Sit GP perpendicularis GS [Fig. 11]. Ergo incitatio ponderis G quatenus SG penduli vicem obtinet, eft ad pondus abfolutam G ut PF ad PG, feu ut FG ad GS five FS, nam hæ æquales cenfentur. Sed incitatio ex pondere K erat ad pondus abfolutum G ut FG ad $\frac{1}{2}$FH vel $\frac{1}{2}$FS. Ergo incitatio ex ratione penduli dimidia eft incitationis ex pondere K.

Ergo fumma duarum incitationum ad incitationem ex pondere K ut 3 at 2. Eftque inter 3 et 2 media proportionalis $\sqrt{6}$.

Ergo ut $\sqrt{6}$ ad 2, ita tempus vibrationis GL ante inventum ad tempus verum vibrationis GL.

Sed tempus vibrationis GL ante inventum æquale erat ofcillationi penduli dimidiæ longitudinis FH.

Cujus penduli ofcillatio eft ad ofcillationem penduli quod $\frac{2}{3}$ habeat fuæ longitudinis, feu $\frac{2}{3}$FH, ficut $\sqrt{6}$ ad 2. Ergo pendulum cujus longitudo $\frac{1}{3}$FH ifochronas ofcillationes habebit vibrationibus GL veris [5]). Quod cum experimentis prorfus confentit.

7 [6]). Sit celeritas puncti gravis A [Fig. 14], cum ex A in B venerit x. celeritas

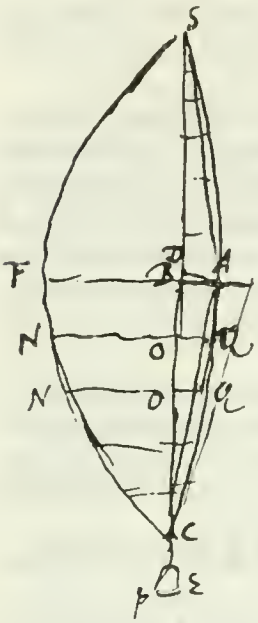
---

[4]) Voir la fin de la note 1 de la p. 491. Nous ne possédons pas la relation des expériences dont il est question dans ce §. Comparez, sur des expériences de ce genre, le premier alinéa de la p. 265 du T. XVII.

[5]) Le temps d'une vibration simple dans le cas de la Fig. 11, les poids G et K étant égaux, n'est donc pas $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ — comparez la note 5 de la p. 491 —, mais $\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

[6]) Apparemment, Huygens considère ici une corde vibrante: ce n'est pas seulement le point ou élément A dont la „gravitas" est θ, mais tous les autres éléments ont le même poids, ou, si l'on veut, la même masse; c'est ce qu'indique le mot „catena". Comme dans le § 3 (p. 490), Huygens commence par considérer le cas où $n\theta$ (poids de la corde divisée en n éléments) est égal au poids p qui tend la corde.

[Fig. 14.]



autem quæ acquireretur casu ex altitudine AB, sit c. Et linea AB sit b. AC ∞ a. pondus E ∞ p. gravitas puncti A sit θ. Et divisa intelligatur catena SAC in tot partes ut una sit ad omnes sicut pondus θ ad pondus p.

Jam ut qu. cc ad qu. xx ita erit AB ∞ b ad $\frac{bxx}{cc}$ altitudinem ad quam ascenditur celeritate x. Sit ista $\frac{bxx}{cc}$ æqualis BF [1]).

Jam si curva SFC sit ejus naturæ ut applicatæ FB, NO sint inter se ut quadrata applicatarum AB, QO [2]), (ponitur autem SAQC parabola a qua insensibiliter differt [2])) referent omnes NO altitudines ad quas ascenditur per celeritates acquisitas punctis singulis catenæ SAC cum erit in recta SC.

Itaque singulæ NO in singulas gravitates θ ductæ, summa productorum omnium debebit æquari producto ex pondere p in descensum ponderis E, qui descensus æquatur $\frac{4}{3}$BD bis hoc est $\frac{8}{3}$BD. quia parabolam SAC eodem modo hic metimur ac si arcus circuli foret [3]).

---

[1]) Puisque $c = \sqrt{2gb}$ — g étant l'accélération de la pesanteur — on a BF $= \frac{x^2}{2g}$. De même ON $= \frac{x'^2}{2g}$, si nous appelons x' la vitesse avec laquelle l'élément Q atteint le point O.

[2]) Huygens fait apparemment, outre l'hypothèse que la forme de la corde vibrante, dans sa position extrême, est à peu près une parabole, celle que tous les éléments de la corde exécutent des vibrations harmoniques: les vitesses x, x' etc. avec lesquelles ils atteignent les points B, O, O, sont alors entre elles comme AB, QO, QO. D'après la note 1 BF : ON $= x^2 : x'^2$; donc aussi BF : ON $=$ AB^2 : QO^2.

Comme Huygens ne rend pas compte de ces hypothèses, nous ne tâcherons pas non plus de le faire. Il est possible qu'il ait songé à une forme sinusoïdale de la corde: voir la p. 528 qui suit, où il dit que la „linea sinuum" diffère peu de la parabole.

[3]) C'est, peut-on dire, une application de la loi de la conservation des forces (comparez le deu-

---

xième alinéa de la p. 471 qui précède), le produit du „poids" p par le carré de sa vitesse étant supposé trop petit pour être pris en considération. Il est dommage que Huygens n'ait pas exécuté le calcul qui suppose évidemment les longueurs NO non seulement *proportionnelles*, mais *égales* aux plus grandes hauteurs que les différents éléments de la corde pourraient atteindre en s'élevant séparément avec les vitesses x, x', etc.

S'il avait entrepris d'exécuter le calcul, il aurait peut-être été amené à considérer nettement la question des unités; il aurait pu dire qu'en formant le produit des „singulæ NO [proportionnelles aux carrés des vitesses, d'après la note 2] in singulas gravitates 6 ductæ", il faut prendre $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ — voir le deuxième alinéa de la note 6 de la p. 359 du T. XVI —, où m est le poids divisé par l'accélération g de la pesanteur.

En appelant t le temps d'une vibration simple, l la longueur et M la masse de la corde, et en répresentant par u le plus grand écart d'un élément de la corde de sa position d'équilibre — écart qui est égal à b pour le milieu de la corde —, on a $v = \frac{\pi u}{t}$

et $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}l} v^2 \frac{M}{l}\,dy = \frac{M\pi^2}{lt^2}\int_0^{\frac{1}{2}l} u^2 dy$. Or, la valeur de cette intégrale est, pour une forme parabolique de la corde, $\frac{4}{15}b^2 l$. La „vis motus" est donc $\frac{4\pi^2}{15}\frac{Mb^2}{t^2}$. En l'égalant à l'„altitudo ducta in gravitatem", c.à.d. au produit du poids p qui est Mg — puisque le poids tendeur est ici supposé égal à celui de la corde —, on a $\frac{4\pi^2}{15}\frac{Mb^2}{t^2} = Mgh$, h étant la différence entre la longueur de la corde vibrante considérée dans sa position extrême et celle de la corde géométrique qui la soustend. Cette différence est d'après Huygens $\frac{4}{3}[\sqrt{l^2 + 4b^2} - l]$ — comparez la p. 107 qui précède — ou $\frac{8}{3}\frac{b^2}{l}$, puisqu'elle est supposée fort petite. Substituant $h = \frac{8}{3}\frac{b^2}{l}$ dans l'équation précédente, on en peut tirer $t = \frac{\pi}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

En supposant le poids tendeur (ou la tension) K — nous écrivons K au lieu de p pour nous conformer aux formules de la note 5 de la p. 491 et de la note 3 de la p. 492 — quelconque, nous aurions obtenu $t = \frac{\pi}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{Ml}{K}}$, ce qui s'accorde fort bien avec la valeur actuellement considérée comme correcte $t = \sqrt{\frac{Ml}{K}}$. Comparez la fin de la note 10 de la p. 485.

Le calcul de la „vis motus" du poids tendeur fait voir que celle-ci est en effet négligeable lorsque l'écart b est fort petit en comparaison de la longueur l.

II.

PRINCIPE DE L'INCITATION DONNEE AUX CORPS PAR UN AGENT EXTÉRIEUR OU PAR UNE CAUSE INCONNUE.

[1675 ou 1676][1])

Un corps qui a acquis une certaine viteſſe de mouvement, continue d'aller avec cette meſme viteſſe, s'il n'y a rien qui agiſſe a diminuer ſon mouvement, ni rien qui l'incite de nouveau.

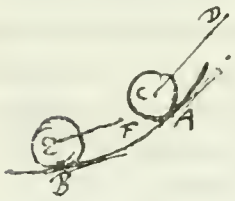
Si quelque choſe agit continuellement a diminuer le mouvement d'un corps, qui eſt en mouvement, il perdra peu a peu de ſa viteſſe.

Et au contraire ſi quelque choſe agit continuellement ſur un corps en le pouſſant du coſtè vers le quel il ſe meut deſia, ſon mouvement recevra continuellement de l'acceleration.

La force qui agit ſur un corps pour le mouvoir quand il eſt en repos ou pour augmenter ou diminuer ſa viteſſe quand il eſt en mouvement, je l'appelleray incitation.

Quand on conſidere la viteſſe du moteur qui cauſe l'incitation, comme infiniment grande en comparaiſon de la viteſſe qui eſt dans le corps meu ou a mouvoir, alors la quantitè de l'incitation a chaſque inſtant de ſon mouvement ſe meſure par la force qu'il faudroit emploier pour empeſcher le corps de commencer a ſe mouvoir, a l'endroit ou il ſe trouve, et dans la direction qu'il a. Soit par ex. une boule [Fig. 15] qui deſcende par une ſurface courbe AB, moins inclinée à l'endroit A qu'en B. L'incitation de cette boule en A ſera egale a la force qu'il faut pour la retenir a cet endroit par la corde CD parallele a la tangente de la ſurface A qui eſt dans le plan vertical. Et l'incitation de la meſme boule en B, ſera egale a la force qu'il faut

[Fig. 15.]



---

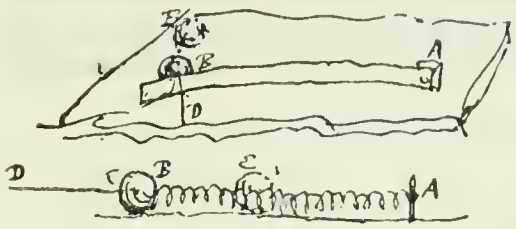
[1]) La Pièce est empruntée aux p. 41—42 du Manuscrit E. Les p. 36 à 39 portent toutes des dates de février 1675, et la p. 58 celle de décembre 1675; mais la p. 40 contient la phrase: „En quitant Paris le prem. Jul. 1676, pour aller en Hollande ..." (déjà imprimée à la p. 416 du T. VII).

Les trois premiers alinéas ont été biffés par Huygens, sans raison apparente.

pour la retenir a cet endroit par la corde EF parallele a la tangente en B. Et ces incitations ſont les meſmes ſoit que la boule commence a ſe mouvoir ou qu'elle ſoit deſia en mouvement, parce que la gravitè agit comme par une viteſſe infiniment grande en comparaiſon du mouvement que l'on ſuppoſe dans la boule.

J'appelleray incitation parfaite celle qui eſt ainſi cauſée par un principe d'infinie viteſſe. Ce qui cauſe la reſtitution des reſſorts, *agit auſſi par une viteſſe extremement grande* [2]), comme il paroit par le mouvement ſoudain des reſſorts qui ſe debandent [Fig. 16], et par la viteſſe de leur vibrations qui ſeroit comme infinie ſi ce n'eſtoit le poids des reſſorts meſmes qui la diminue. C'eſt pour cela que le reſſort de l'air comprimè eſt plus prompt qu'aucun autre, parce que le poids de l'air eſt tout a fait petit.

[Fig. 16.]



Lors donc qu'un corps et [3]) pouſſè ou tirè par un reſſort pour le mettre en mouvement, ou pour accelerer celuy qu'il a deſia acquis, ſon incitation a chaque point de ſon chemin ſe meſure auſſi par la force qu'il faudroit a cet endroit pour l'empeſcher de commencer à ſe mouvoir dans la direction que luy imprime le reſſort. Soit [Fig. 16] le reſſort AB attachè en A, et forcè hors de ſa poſition naturelle, et qu'il pouſſe ou tire le corps C. L'incitation de ce corps en B ſera egale a la force qu'il faudroit pour l'arreſter a cet endroit directement contre l'effort du reſſort [4]). Et cette incitation eſt la meſme ſoit que le corps C commence a eſtre mis en mouvement ou qu'il en ait deſia acquis; pourveu toutefois que l'on conte [5]) pour rien le poids du reſſort comparè au poids du corps. car autrement il faut conſiderer que c'eſt l'incitation du compoſè du corps et du reſſort enſemble.

Il eſt manifeſte par ce qui eſt dit juſqu'icy que les incitations d'un corps quoyque cauſees par differentes cauſes, comme peſanteur reſſort vent attraction d'aimant ou autre, peuvent eſtre egales l'une a l'autre.

L'incitation parfaite d'un corps qui demeure conſtamment egale comme celle de la peſanteur ſur un corps qui deſcend perpendiculairement ou par un plan inclinè je l'appelleray incitation uniforme.

---

[2]) Leçon alternative: „est de cette mesme nature".

[3]) Lisez: „est".

[4]) Expression équivoque: ce n'est pas pour *arrêter* le corps contre l'effort du ressort qu'il faut une force déterminée; mais c'est pour le *maintenir*, *dans la situation considérée*, *dans l'état de repos*. Comparez la Fig. 15 où une force égale à l'incitation retient la boule déjà immobile.

[5]) Lisez: „compte".

L'incitation parfaite, mais qui s'augmente continuellement je l'appelleray incitation croiſſante. Et celle qui diminue continuellement decroiſſante.

incitations differentes uniformes et corps egaux.
quel temps par des eſpaces egaux.
incitations egales ſur des corps inegaux [1]).

Hypothèſe.

Deux corps eſtant poſez egaux, et parcourant des lignes egales avec des incitations qui ſoient egales entre elles a chaque deux points egalement avancez dans les deux lignes, quoyque les incitations des corps vienent de cauſes differentes, les deux lignes ſeront parcourues en des temps egaux.

[1]) Si Huygens avait pris la peine de développer le programme contenu en ces trois lignes, il aurait pu parvenir à distinguer nettement l'un de l'autre le poids et la masse d'un même corps, et plus généralement à dire que les incitations agissant sur des mobiles libres sont entre elles comme les produits des quantités de matière par les accélérations. Comparez les 7 dernières lignes de la p. 45 qui précède.

APPLICATION PRATIQUE AUX HORLOGES DE DIFFÉRENTS MOUVEMENTS VIBRATOIRES PLUS OU MOINS ISOCHRONES.

I. L'application de janvier 1675 du ressort spiral régulateur aux balanciers des montres.

II. L'application de décembre 1683 des vibrations de torsion aux horloges marines (pendulum cylindricum trichordon).

III. Premier projet, de 1683 ou 1684, du „balancier marin parfait" de 1693.

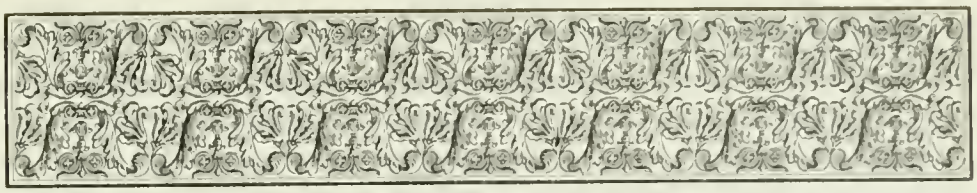
IV. L'application du pendule triangulaire, datant déjà de 1671, à une horloge marine, construite vers 1685, cette dernière étant un remontoir à ressorts.

V. Le „balancier marin parfait" de janvier-février 1693.

VI. La „libratio isochrona melior præcedente" de mars 1693.

VII. La „libra isochronis recursibus" de mars 1694.

VIII. La dernière horloge marine de 1694.



Avertiſſement.

Nous avons vu (p. 483 et ſuiv.) que bien peu de temps après la publication de l'„Horologium oſcillatorium" Huygens comprit que, ſi la cycloïde a le pouvoir de rendre iſochrones les oſcillations du pendule ſimple, elle ne poſſède pas cependant le monopole du tautochroniſme. Le poſſède-t-elle pour le cas du point matériel oſcillant ſous l'influence de la peſanteur conſtante et agiſſant ſuivant des droites parallèles? C'eſt une queſtion que Huygens ne s'eſt pas poſée, paraît-il, en ce temps [1]). Ce qu'il aperçut clairement en 1673 c'eſt que dans *tous* les cas où, comme dans celui de la cycloïde, l'incitation (comparez la p. 483) qui tend à ramener le mobile vibrant vers ſa poſition d'équilibre, eſt proportionnelle à l'écart, la période ſera également indépendante de l'amplitude. Témoin les cordes vibrantes des inſtruments muſicaux (p. 490)

---

[1]) En juillet 1691 les frères Bernoulli parlent (T. X, p. 119) d'une infinité de courbes, autres que la cycloïde, „per quas descendens grave oscillationes peragat isochronas", et Huygens écrit en novembre 1691 (T. X, p. 191) qu'il n'y voit „pas d'impossibilité". Quoiqu'il ne soit pas absolument certain que les Bernoulli et Huygens entendent parler ici du cas de la pesanteur constante et agissant suivant des lignes parallèles — puisqu' à la p. 119 nommée Jacques Bernoulli cite Newton; comparez la note 5 de la p. 168 du T. IX — il est fort possible que Huygens ait cru devoir admettre la possibilité d'oscillations isochrones aussi dans des cas, inconnus à-lui-même, où la force ramenant le mobile vers la position d'équilibre ne serait *pas* proportionnelle à l'écart. Voir cependant à la p. 584 qui suit, le passage de 1693 où il dit que pour que les oscillations soient „exactè isochronæ", elles *doivent* être comme il résulte des considérations sur le „motus in cycloide".

dont le tautochroniſme s'expliquait déſormais par l'analogie de leur mouvement avec celui du pendule cycloïdal. Or, des cordes vibrantes aux reſſorts (p. 497), il n'y a qu'un pas (p. 487).

Les reſſorts étaient fort connus comme moteurs des horloges. L'idée de s'en ſervir auſſi pour régler leur mouvement ſe préſenta tout naturellement à l'eſprit de Huygens lorſqu'il eut découvert la raiſon d'être du tautochroniſme de pluſieurs genres de vibrations — évidemment en admettant, pour les vibrations élaſtiques, la loi formulée par R. Hooke dans un écrit de 1678 par les mots „ut tenſio ſic vis" [1]) —, et qu'il put donc abandonner la cycloïde ſans en abandonner le principe. C'eſt apparemment à ſa découverte théorique qu'il fait alluſion, ſans ſe trahir, en diſant dans ſon article de février 1675 dans le Journal des Sçavans (T. VII, p. 424) que le „mouvement [des montres à reſſort ſpiral régulateur] eſt réglé par un principe d'égalité, de même qu'eſt celui des pendules corrigé par la Cycloïde". On pourrait objecter qu'il n'eſt pas abſolument évident ce qu'il faut entendre par l'incitation cenſée proportionnelle à l'écart, lorsqu'il s'agit du mouvement *rotatoire* d'un balancier dû à un reſſort ſpiral (figure de la p. 425 du T. VII): dans le cas de la cycloïde il n'eſt queſtion que d'un point matériel ſe mouvant ſuivant une *ligne*. Il était pourtant fort naturel de ſuppoſer que l'expérience ferait voir généralement, entre certaines limites, le tautochroniſme non ſeulement des reſſorts droits, c.à.d. hélicoïdaux (p. 497), mais auſſi des reſſorts ſpiraux, et que ce tautochroniſme admettrait une explication théorique analogue à celle donnée pour les vibrations harmoniques linéaires du point matériel. Voir à ce ſujet la p. 512 qui ſuit.

Il y avait une autre conſidération également forte qui induiſit Huygens à tourner en janvier 1675 ſes regards vers le reſſort régulateur des balanciers: c'eſt que l'idée de régler leur mouvement par des reſſorts n'était nullement nouvelle. Nous l'avons déjà dit à la première page du préſent Tome (p. 3), en renvoyant le lecteur à la note 7 de la p. 159 du T. XVII, où il eſt queſtion d'une invention françaiſe. Dans ſon mémoire de juillet 1674 adreſſé à l'Académie des Sciences J. de Hautefeuille parle auſſi, en faiſant mention de Pardies (ligne 5 d'en bas de la p. 459 du T. VII; comparez la p. 487 qui précède), de l'application d'un reſſort au balancier des mon-

---

[1]) Voir la note 24 de la p. 525 du T. VII, le troisième alinéa de la p. 94 du T. IX et la note 2 de la p. 484 du présent Tome.

[2]) T. VII, p. 517. En 1675, après la publication de Huygens, il parle (p. 518) de son idée „of

tres. En Angleterre R. Hooke dit en 1675 avoir eu depuis longtemps cette idée qu'il considéra toujours comme sienne par excellence [2]).

En parlant d'une „considération également forte", nous disons d'ailleurs plus que nous ne savons, plus même que Huygens n'a pu savoir: qu'il s'agisse d'autrui ou de nous-mêmes, ni la force des motifs qui déterminent à l'action, ni celle des idées qui en engendrent d'autres, ne peuvent être mesurées par nous, quel que soit notre désir d'être objectifs. La découverte théorique de Huygens ne vint peut-être qu'ἐτρύνειν sa pensée πάρος μεμαυῖαν [3]): il est possible que déjà avant 1673 il ait songé à s'occuper lui-même de la question du ressort régulateur, puisqu'il dit en septembre 1675 (T. V, p. 486) que dès 1660 — voir la note suivante — il ne trouvait pas bonne la manière d'appliquer le ressort qu'il avait vue en France et qu'il en savait déjà en ce temps „de beaucoup meilleures".

Ce que nous croyons comprendre, c'est qu'après sa découverte théorique — restée, paraît-il, inconnue en ce moment à tout-le-monde; comparez les dernières lignes de la p. 483 — il était enclin à considérer le ressort spiral régulateur du balancier comme une invention due entièrement à lui-même. D'ailleurs, il semble — quoique nous ne sachions pas au juste de quoy s'occupait en 1660 l'horloger Martinot inspiré par le duc de Roanais et Bl. Pascal [4]), ni ce que d'autres horlogers français [5]), ou R. Hooke, ont pu concevoir — que jusque là on n'avait guère songé à régler le mouvement du balancier des montres qu'à l'aide de ressorts hélicoïdaux, ce qui est autre chose: si de Hautefeuille [6]) avait eu connaissance de l'application d'un ressort spiral

---

applying Springs *to the arbor* [comme Huygens: nous soulignons] of the Ballance of a Watch".

Voir sur la priorité de Huygens les remarques de Leibniz citées dans la note de la p. 454 du T. VII. Ces „Remarques sur le discours de Mr. H[enry] S[ully] touchant la manière de gouverner les Horloges à Pendule et les montres à spirale" se trouvent dans le livre de Sully „Regle artificielle du Temps, ou Traité de la division naturelle & artificielle du Temps: Des Horloges & des Montres de differentes Constructions: De la maniere de les connoître & de les regler", Paris, 1717. Comme Sully le dit dans cet ouvrage, il l'avait montré à Leibniz, à Vienne, avant l'impression (Leibniz mourut en 1716). Voir sur Huygens et Sully la p. 520 qui suit.

3) Homère, l'Iliade, Livre XXII, v. 186. Comparez la note 1 de la p. 516 qui suit.

4) Voyez la note 7, déjà mentionnée dans le texte, de la p. 159 du T. XVII. Dans son Journal de Voyage, dont il est aussi question dans cette note, Huygens écrit: „11 [Nov. 1660]. Martinot l'horloger me vint veoir, parla de l'invention du ressort au lieu de pendule". Martinot faisait grand cas de sa construction (T. IV, p. 264—265).

5) Voir la fin de l'avant-dernier alinéa de la p. 442 du T. VII.

6) J. de Hautefeuille se servait de ressorts hélicoïdaux (voir la figure de la p. 449 du T. VII). Comparez la p. 413 du T. VII (horloge de d'Alesme). L'histoire du „ressort en spirale appliqué par un bout à la pendule" (T. VII, p. 412) n'est pas claire.

aux balanciers avant 1675, il aurait dû le dire dans le „Factum" des p. 439 et suiv. du T. VII. Le 30 janvier (T. VII, p. 400) Huygens envoya l'anagramme de son invention à Oldenburg. Nous pouvons nous figurer son indignation lorsque Thuret, à qui était due la réalisation pratique de l'échappement (p. 407 et 410 du T. VII) — Huygens n'avait pas construit de modèle, comme il le faisait en d'autres occasions [1]) — eut la prétention d'y avoir eu quelque part [2]). Dans sa lettre du 20 février 1675 à Oldenburg (T. VII, p. 422) Huygens lui donne l'explication de l'anagramme, puisque, dit-il, par „la mauvaise foy" de Thuret „le secret ne s'en est pas bien gardè".

Huygens obtint le 15 février 1675 (T. VII, p. 419) pour la France un privilège pour les horloges portatives tant sur terre que sur mer, qu'il avait demandé dix jours auparavant (T. VII, p. 401), mais il dut renoncer à le faire enregistrer (T. VII, p. 416). Les Etats de Hollande et de West-frise lui accordèrent le 25 septembre 1675 pour 15 ans un octroi pour les horloges marines nouvellement inventées, mais pas encore construites; voir la p. 523 qui suit. Fort probablement (voir les premières lignes de la p. 411 du T. VII, et comparez les p. 7 et 20 du présent Tome) son père a fait valoir son influence auprès des Etats. Les mêmes Etats lui accordèrent le 27 septembre (p. 524) un octroi, également pour 15 ans, pour les horloges de poche. Les termes de cet „appointement" ressemblent beaucoup à celui du 4 octobre suivant des Etats-Généraux sur le même sujet, que nous avons déjà publié à la p. 507 du T. VII [3]).

Le désir de construire des horloges exactes — principalement en vue de la détermination des longitudes — était si vif que les concurrents se passionnaient tout naturellement [4]). D'autre part nous comprenons que le père Constantijn, toujours maître

---

[1]) Comparez la note 9 de la p. 32 qui précède.

[2]) Nous regrettons pourtant de ne pouvoir appliquer ici le fameux précepte: „Audi et alteram partem"; car, quant à la lettre de Thuret de septembre 1675 (T. VII, p. 498), où il dit n'avoir eu aucune part à l'invention, il est assez évident qu'il n'avait pas la liberté de ne pas l'écrire. Voir sur les prétentions de Thuret le deuxième alinéa de la p. 408, le quatrième alinéa de la p. 412, le deuxième alinéa de la p. 415, le deuxième alinéa de la p. 421, ainsi que la p. 435 du T. VII.

À la p. 484 du T. VII Huygens parle de certaines relations entre Thuret et de Hautefeuille.

[3]) Nous ne pensons pas que Huygens ait demandé dans les diverses provinces l'„attache" dont il est question à la fin de ce document. L'archiviste d'Arnhem nous a fait savoir que l'attache n'a apparemment pas été accordée (ni demandée) en Gueldre. Comparez sur les attaches la p. 78 du T. XVII.

[4]) Voir sur les réclamations de R. Hooke la note 1 de la p. 422, la note 7 de la p. 423, ainsi que

de lui-même, annota ſur la lettre de ſon fils où celui-ci, parlant de Thuret, donne libre carrière à ſa colère [5]) — Conſtantijn eût pu donner le même conſeil à R. Hooke dont il appréciait également les grands mérites [6]) — les paroles claſſiques bien appropriées à la circonſtance: „Ne ſævi, magne ſacerdos" [7]).

Après le mois de novembre 1675, où il fait ſon éloge [8]), Huygens ne parle plus jamais de Thuret [9]).

À la Haye S. Ooſterwyck fabriqua en 1676 des montres à reſſort *droit* (c.à.d. ſans doute hélicoïdal) que Huygens (T. VIII, p. 11) appelle „les ouvrages de la plus nouvelle façon". Mais nul n'ignore que le reſſort ſpiral a fini par prévaloir.

L'application du reſſort ſpiral régulateur au balancier des montres peut avoir lieu de pluſieurs manières différentes. On peut attacher les palettes, qui frappent la roue

---

les p. 427, 455, 468—472, 475, 477, 481, 482, 489, 499, 506, 510, 513, 514 et 516—552 du T. VII. Comparez aussi le Chap. X („The Balance Spring") de „The Evolution of Clockwork" par J. Drummond Robertson, cité e. a. à la p. 60 qui précède.

5) Lettre d'août 1675 à Constantijn frère (T. VII, p. 484).

6) Voir sa lettre anglaise du 8 août 1673 à R. Hooke („De briefwisseling van Const. Huygens", éd. J. A. Worp, T. VI, la Haye, 1917, p. 330). Comparez la p. 432 du T. VII (lettre de mars 1657 de Const. H. à H. Oldenburg).

7) Virgile, l'Enéide, Livre VI, v. 544: „Ne sævi, magna sacerdos".

8) Voir la p. 542 du T. VII.

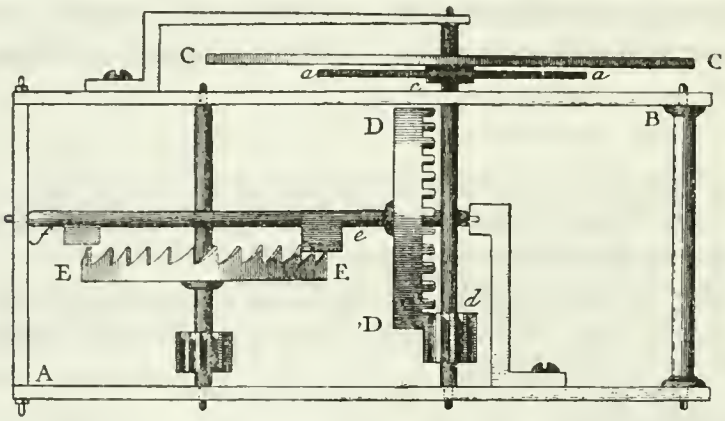
9) Isaac Thuret est mentionné plusieurs fois dans les „Comptes des Bâtiments du Roi, sous le règne de Louis XIV (1664—1687)", Paris, Imprimerie nationale, 1881 (2 vol.), publiés par J. Guiffrey. Son nom apparaît pour la première fois en 1669, où il est question des „ouvrages qu'il a fait à l'Académie des Sciences". En 1672 et dans les quinze années suivantes il est „retenu pour entretenir toutes les pendules de l'Académie des Sciences, tant celles qui sont à l'Observatoire que dans ladite Académie". En 1687 nous apprenons qu'il occupe une partie des galeries du Louvre. En décembre 1680 il est payé de la somme la plus forte qu'on trouve à son compte, soit 8000 livres, „pour une machine du mouvement des planettes". En mai 1682 il est question d'une machine „qu'il a faite pour les éclipses" et en août 1687 d'„une machine paralactique servant aux observations".

La machine planétaire est celle de Roemer, mentionnée à la date du 27 août 1680 par J. B. du Hamel à la p. 192 de sa „Regiæ Scientiarum Academiæ Historia" de 1701: du Hamel dit que cette machine avait été construite par Thuret. Il en fut de même de la „machina Lunæ motibus dimetiendis" dont Roemer présenta le projet le 30 août suivant: elle fut achevée „brevi post tempore ab eodem artifice"; c'est évidemment la machine „pour les éclipses" de 1682.

Nous ajoutons que P. Horrebow, dans sa „Basis astronomiæ" de 1735 — citée aussi à la p. 600 qui suit — dit que la machine planétaire de Roemer était mue à la main, et qu'elle représentait le mouvement du soleil et des planètes suivant le système géocentrique de Tycho Brahé (p. 132 et Pl. XI).

de rencontre, directement à l'axe du balancier, auquel eſt également attaché — comparez la note 2 de la p. 502 — une des extrémités du reſſort ſpiral; c'eſt le diſpoſitif de la deuxième figure de la p. 408, de la première de la p. 409 et de la deuxième de la p. 414 (toutes empruntées au manuſcrit E) du T. VII. On peut auſſi, comme l'indique la troiſième figure — datant du 23 janvier, c.à.d. du lendemain de la conſtruction du premier modèle par Thuret — de la p. 409 du T. VII, monter ſur l'axe de la verge à palettes, auquel eſt attaché ici auſſi une des extrémités du reſſort ſpiral, une roue qui engrène dans une autre montée ſur l'axe du balancier. Plus cette dernière

[Fig. 17.]



roue eſt petite (dans la figure de Huygens elle n'eſt pas plus petite que l'autre), plus le balancier fera de larges oſcillations. On peut en troiſième lieu conſtruire l'échappement comme l'indiquent la figure, publiée en février 1675 par Huygens, de la p. 425 du T. VII, et la Fig. 17, empruntée à la Pl. XIV de l'„Hiſtoire de la Meſure du Temps par les Horloges" de 1802 de F. Berthoud (voir la p. 31 du T XVII), où *CC* eſt le balancier et *aa* le reſſort ſpiral. Ici ſurtout le balancier fait de larges oſcillations, d'où le nom d'*échappement à pirouette*. Berthoud écrit (T. I, p. 143): „On voit que les palettes, et l'axe qui les porte, parcourant un petit arc, la roue de champ *DD* fait décrire au pignon [*d*] une grande partie de ſa révolution et par conſéquent auſſi au balancier; et on peut varier, à volonté, l'étendue des arcs du régulateur, ſelon que la roue de champ *D* porte un plus grand ou plus petit nombre de dents, et que le pignon a plus ou moins de diamètre et par conſéquent de dents." C'eſt à bon droit, puiſque les deux figures s'accordent, que Berthoud parle de „la montre à pirouette d'Huygens", de „la diſpoſition que Huygens a donnée à l'échappement en

appliquant le ſpiral au balancier". Il ſemble toutefois poſſible que ce ſoit Thuret qui ait donné à l'échappement cette forme-là, puiſque nous ſavons (T. VII, p. 406) que Thuret montra le 23 janvier à Huygens „un autre modelle du meſme balancier", et que Huygens crut plus tard que „des lors il avoit le deſſein de s'attribuer cette invention". Ce deuxième modèle n'était donc évidemment pas identique avec le premier. À la p. 407 du T. VII Huygens l'appelle „un pareil modelle ou un peu deguiſé" [1]), et il avoue (p. 410) que Thuret a „contribuè beaucoup de ſon induſtrie a l'execution".

En quatrième lieu, on pourrait appliquer le reſſort ſpiral régulateur à *deux* balanciers égaux [2]) dont les pignons s'engrènent, ou qui s'engrènent eux-mêmes, comme Huygens le propoſe (deuxième figure de la p. 409 du T. VII). Nous renvoyons le lecteur, pour cette conſtruction comme pour quelques détails hiſtoriques, à la Pièce I qui ſuit (note 2 de la p. 522) [3]).

En admettant — voir ce que nous diſons plus loin ſur les horloges de juillet 1683 — qu'il ait été poſſible dès les jours de Huygens de conſtruire, en ſe ſervant du reſſort ſpiral régulateur, des horloges marines marchant bien, comme Huygens le dit dans ſa requête du 5 février 1675 (T. VII, p. 401), — nous voulons dire: marchant bien dans la chambre d'un obſervateur — on ne peut pas cependant avoir été dès lors en poſſeſſion d'inſtruments de préciſion permettant de déterminer exactement les longitudes: l'influence de la température ſur les reſſorts doit y avoir mis un obſtacle regardé ſans doute en ce moment comme inſurmontable. En 1666 Huygens avait parlé lui-même de cette difficulté dans le cas des reſſorts moteurs (premier alinéa de la p. 9 qui précède). En 1675, lorſque d'autres firent la même obſervation à propos des reſſorts régulateurs [4]), il ſe montra d'abord plus ſanguin [5]). Mais plus tard (1683)

---

[1]) Comparez la note *a* de Huygens à la p. 499 du T. VII.

[2]) Plus tard (voir la p. 525) Huygens remarque expressément que dans ce cas il vaut probablement mieux se servir d'un seul ressort que d'en appliquer un à chaque balancier.

[3]) Il est d'ailleurs évident que, pour être mieux renseigné sur les différentes applications qu'on peut faire du ressort spiral régulateur, le lecteur devrait consulter des ouvrages d'horlogers ou s'adresser à des spécialistes compétents.

[4]) T. VII, p. 427, 433.

[5]) T. VII, p. 457.

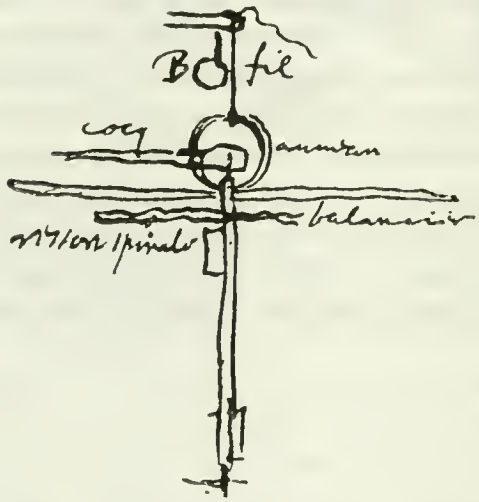
il dut reconnaître que l'influence de la température eſt indéniable [1]). Rien n'indique que, par ſuite de la déciſion des Etats de Hollande et de Weſtfriſe du 25 ſeptembre 1675 (p. 523), les „Gecommitteerde Raden" et les „Collegien ter Admiraliteyt" aient fait faire des expériences menant à cette concluſion. De telles expériences ne pourraient d'ailleurs dater que de 1681, 1682 ou 1683: voir la note 1. Rappelons auſſi qu'en août 1679 [2]) Huygens écrit qu'„il y a plus d'eſperance de reuſſir avec des balanciers avec un reſſort ſpirale, mais conſtruits en grand volume" et qu' „il vaudroit la peine de faire cette eſpreuve". Ce qui ſemble le plus probable c'eſt qu'il ait conſtaté lui-même l'influence de la température [3]).

Forcé de chercher autre choſe il conſtruiſit le modèle d'un „pendulum cylindricum trichordon" ſans reſſort [4]) (Pièce II, p. 527), où les vibrations provenant d'une eſpèce

---

[1]) Voir à la p. 527 qui suit le début du § 1, datant de décembre 1683. Vers le 1 janvier 1681 Huygens écrit (Manuscrit F. p. 46; la p. 45 porte la date du 27 décembre 1680): Suspendre le balancier [Fig. 18] par un fil de foye, mais en forte que les deux pivots ne puiſſent fortir de leur trous lors qu'on voudra coucher la machine [il s'agit ici de l'horloge destinée à mouvoir le planétaire]. le fil 3 ou 4 fois plus long qu'il n'eſt repreſentè icy. un petit contrepoids B qui ſoit egal a la peſanteur du balancier. En faiſant ce balancier grand, j'auray un eſſay de la juſteſſe de ces horologes a reſſort ſpirale". En ce moment la question de la justesse de ces horloges était donc encore indécise.

[Fig. 18].



Le ressort spiral de l'horloge du planétaire, exécuté par van Ceulen en 1682, est représenté avec son balancier à la p. 525 [Fig. 21].

[2]) T. VIII, p. 197.

[3]) Toutefois nous ne pensons pas qu'il ait fait sur ce sujet un grand nombre d'expériences précises. Dans ses „Remarques" citées dans la note 2 de la p. 502 Leibniz écrit: „Par rapport aux Ressorts à spirale, dont on se sert dans les montres de poche, il seroit important d'examiner, combien l'Air a de l'influence sur les Vibrations d'un tel Ressort, et particulierement, combien le froid et le chaud en changent l'égalité".

[4]) C.à.d. sans ressort régulateur. Il y avait encore dans l'horloge des ressorts moteurs: voir les notes 8 et 11 de la p. 533.

de torſion ſont à fort peu près iſochrones, puiſque le moment qui agit ſur le pendule eſt à peu de choſe près proportionnel à l'angle de torſion (note 1 de la p. 528). Il peut donc dire qu'il y a ici l'effet d'un reſſort, ſans reſſort, de même qu'il eût pu dire en introduiſant le reſſort ſpiral dans les montres qu'il y a ici, ſans cycloïde, l'effet d'une cycloïde (ce qu'il dit en effet — deuxième alinéa de la p. 502 — en termes quelque peu différents). C'eſt toujours le même principe qui ſubſiſte. Et en ſuppoſant la longueur des fils invariable (voir la p. 544 du T. XVII), le défaut des horloges à reſſort régulateur ſe trouvait ainſi corrigé.

Les horloges conſtruites d'après ce modèle à la Haye par l'horloger J. van Ceulen (§ 4 à la p. 532) [5]) paraiſſent être celles qui furent eſſayées en 1685 par Huygens ſur le Zuyderzee. En effet, comme cela reſſort d'une lettre de J. Gallois à Huygens (T. VIII, p. 405), ce dernier avait écrit vers la fin de 1682 qu'il ſe propoſait de faire de nouveau l'épreuve du „ſecret des longitudes"; en juillet 1683 (T. VIII, p. 429) il ſe dit „requis par la Cie des Indes Orientales" — les „Reſolutiën vande Bewindhebbers vande O.I. Cie ter Camer tot Amſterdam" (Archives de l'Etat à la Haye)

---

[5]) D'après un registre que nous avons consulté aux Archives communales de la Haye, Johannes van Ceulen, le célèbre horloger bien connu des collectionneurs, acheta en janvier 1677 une maison „aen 't Pleijn", donnant sur la Heerestraat, donc vis-à-vis de la maison de Constantijn Huygens père, où Christiaan II. demeurait en 1677 (note 6 de la p. 4) et ensuite de 1681 à 1687. Il est fort naturel que Huygens s'adressa à cet horloger-là, et qu'une collaboration active s'ensuivit. Huygens parle de lui pour la dernière fois en octobre 1684 et Hudde en septembre 1685 (voir le texte).

Van Ceulen devint membre de la Corporation des Horlogers de la Haye en 1688 et fut plusieurs fois „hooftman" ou „deken" dans les années suivantes.

Les nos 1270 et 1279 des Archives notariales de la Haye contiennent son testament et toutes les pièces du notaire qui se rapportent à la succession. Il mourut le 7 décembre 1715 dans la maison du Plein, laissant e.a. à son fils homonyme, également maître-horloger, son „groot staende Horologie genaemdt 't Correctorium". Ce „Correctorium" peut avoir été une horloge à pendule de 12 pieds: dans un passage biffé de la p. 218 du Manuscrit F Huygens dit que van Ceulen a construit plusieurs horloges de cette espèce: en dan noch sal moeten op landt 2 draeden in de meridiaen ſpannen en een teycken doen doen [il s'agit d'un coup de mousquet ou de canon; voir la l. 24 de la p. 58 et les p. 579 et 580 du T. IX]. dit ſal in 't toekomende konnen beter verricht werden als men een horologie met een langh pendulum van 12 voet gelijck van Ceulen er [?] verſcheyden gemaeckt heeft aen land ſal hebben verordineert ontrent de plaets daer de ſchepen leggen die op reijs gaen, want dit horologie geſtelt ſijnde ſal men het daghelyx verſchil der zee pendula daer aen konnen bekennen". Comparez la p. 288 du T. IX.

disent en effet (p. 526 qui suit) que Huygens fut invité le 31 décembre 1682 à s'occuper de la question des longitudes — et sa lettre du 12 décembre 1683 à Fullenius (T. VIII, p. 475) fait voir que c'est à la suite de cette instigation que fut inventé le „pend. cyl. trichordon". Les deux horloges construites par J. van Ceulen, dont Huygens parle en juillet, août et septembre 1683 (T. VIII, p. 429, 439, 453) — nous les mentionnons de nouveau dans le premier alinéa de la p. 513 qui suit — furent changées par lui „de cette façon" vers la fin de décembre 1683 (§ 4 à la p. 532). D'après les „Resolutiën" déjà mentionnées une lettre de Huygens que nous ne possédons pas et dont il n'a pas été fait mention dans la Correspondance, fut lue (p. 526) dans l'assemblée des Directeurs de la Cie le 28 février 1684: il y déclare être parvenu à faire accorder les deux horloges si bien entre elles que la différence journalière n'est que de 1 ou 2 secondes, à quoi il croit encore pouvoir remédier. Voir cependant, à la p. 533 § 6, ce qu'il écrit, également en 1684, sur l'impossibilité d'obtenir la „derniere egalitè". Le 30 août 1685 il fut décidé, d'après les „Resolutiën" (p. 534), de mettre un galliot à la disposition de Huygens qui avait proposé de faire lui-même l'essai des horloges sur mer. Voir la lettre du 3 septembre 1685 de J. Hudde à Huygens (T. IX, p. 24), où il faut lire „van Ceulen" au lieu de „van Teilen". Voir encore sur cette expédition les p. 25—32 du T. IX. D'après les „Resolutiën" Hudde fit le 17 septembre sur ce sujet un rapport oral, où il dit que les expériences étaient à refaire (p. 539). Quoique Huygens (T. IX, p. 31) écrive encore le 3 octobre être „asseurè que [les horloges] souffriront facilement le mouvement des grands vaisseaux, dans quelque temps qu'il fasse", le rapport de Hudde a apparemment amené les intéressés à ne plus faire usage du „pend. cyl. trichordon" dans les expériences suivantes. Les minutes de la p. 37 du T. IX font voir qu'en octobre Huygens resta en correspondance avec Hudde. P. van Dam — mentionné aux p. 37, 579 et 580 du T. IX et 80 du T. X —, dans sa „Beschrijvinge van de Oost-Indische Compagnie" présentée aux Directeurs en 1701 et publiée en 1927—1929 par F. W. Stapel [1]), écrit dans le chapitre des „Nieuwe Inventiën" [2]) que Huygens se servit dans l'expédition de 1685 de deux horloges non suspendues: „twee leggende horologies" (expression qui conviendrait à des horloges à ressort spiral régulateur, mais qui s'applique aussi fort

[1]) Rijks Geschiedkundige Publicatiën, la Haye, M. Nijhoff.
[2]) Ch. 49, p. 679.

bien à des „pend. cyl. trichorda", en ſuppoſant les fils aſſez courts) qui ne ſe montrèrent pas aſſez exactes („maar die men heeft bevonden niet te kunnen weſen van ſodanige accurateſſe en onveranderlijckheyt, als tot die uytvindinge nootſaeckelijk ſoude werden vereyſcht") de ſorte qu'on renonça à s'en ſervir („dat daarvan allmede niet is geworden"). Nous ignorons les détails de la conſtruction de l'habile [3]) van Ceulen. Voir cependant le § 6 à la p. 533 qui ſuit.

Les pages ſur le „pend. cyl. trichordon" (p. 527—533) ſont intéreſſantes à un point de vue ſcientifique.

D'abord puiſqu'il y eſt queſtion de la „linea ſinuum" (ou „ſinusoïde", pour employer un terme plus moderne), obtenue par le développement ſur un plan de l'interſection d'un cylindre avec une ſphère, dont le centre ſe trouve ſur le cylindre et dont le rayon eſt égal à ſon diamètre; autrement dit, par le développement ſur un plan d'une ligne cyclocylindrique, comme s'exprime A. Lalovera, ou cycloï-cylindrique, ſuivant la terminologie de Bl. Paſcal [4]). On obtient la même ligne par le développement ſur un plan de la ſection elliptique obtenue en coupant un cylindre par un plan incliné à 45°, développement dont Huygens s'était ſervi en 1658 (note 4 de la p. 529) [5]). Lalovera apprit de Paſcal que ſa ligne cyclocylindrique ſpéciale étendue ſur un plan, n'eſt autre que la „petite cycloïde" ou „compagne de la roulette" conſidérée déjà auparavant par Roberval [4]).

---

[3]) T. VIII, p. 342. En octobre 1682 Huygens écrit qu'il n'aurait pas pu trouver à Paris „un ouvrier aussi habile" (T. VIII, p. 393). Il est intéressant de comparer cette opinion à celle exprimée par Huygens en 1667 (T. XVIII, p. 19, deuxième alinéa).

[4]) Voir à ce sujet les „Oeuvres de Bl. Pascal", éd. L. Brunschvicg, P. Boutroux et F. Gazier, T. VIII, 1914, p. 24, 121 et suiv., 203 et suiv., et l'article „Pascal et Lalouvère" par P. Tannery dans les „Mém. de la Soc. d. Sciences phys. et nat. de Bordeaux", 3e Série, T. V. Paris, Gauthier-Villars, 1890. Lalovera parle de la ligne cyclocylindrique — Fermat avait attiré son attention sur cette courbe; comparez les p. 209—210 du T. I de 1891 des Oeuvres de Fermat, édition de P. Tannery et Ch. Henry, Paris, Gauthier-Villars — dont celle considérée dans le texte est un cas particulier, la „cyclocylindrique primaire de premier ordre" de Lalovera, le rayon et le centre de la sphère qui coupe le cylindre pouvant en général être quelconques. Ce n'est d'ailleurs que dans le cas considéré dans le texte que Lalovera trouva la quadrature de la courbe d'après son ouvrage „Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libris", de 1660. Voir encore sur Lalovera la note 6 de la p. 246 du T. II, déjà citée à la p. 204 qui précède (note 2).

[5]) Comparez la note 9 de la p. 337 du T. X, se rapportant à une Pièce de 1692. En rédigeant cette note, nous n'avions pas encore remarqué que Huygens s'était servi de la courbe en question en 1658 et en 1683.

Ce qui eſt plus important, c'eſt qu'il s'agit ici des lois du mouvement d'un ſyſtème qui tourne, comme le pendule conſidéré dans l'„Horologium oſcillatorium", autour d'un axe fixe — vertical cette fois — ſous l'influence de forces déterminées, le moment des forces autour de l'axe étant proportionnel à l'écart angulaire, vu que l'amplitude des oſcillations dans l'un et l'autre cas eſt petite par hypothèſe. La proportionnalité inverſe de la période d'oſcillation avec la racine carrée du moment de ces forces autour de l'axe (T. XVI, p. 341; T. XVII, p. 188, note 2), eſt admiſe par Huygens comme une choſe évidente [1]), le coëfficient de proportionnalité n'étant autre, à un facteur numérique près, que la racine carrée de ce que nous appelons le moment d'inertie (T. XVI, p. 378). L'équation, pour employer ce terme, reconnue vraie par Huygens dans le cas du pendule compoſé [2]), peut apparemment ſervir auſſi ſelon lui dans des cas analogues. Il y a ici une généraliſation remarquable. D'ailleurs nous avons vu (deuxième alinéa de la p. 502) que déjà en 1675 il conſidérait comme évident que l'indépendance de la période de l'amplitude de la vibration, démontrée pour le cas de mouvements linéaires accomplis ſous l'influence d'une force proportionnelle à l'écart linéaire, ſubſiſte lorſqu'il s'agit d'une vibration due à des forces dont le moment autour de l'axe de rotation eſt proportionnel à l'écart angulaire.

Les affirmations du § 3 de la p. 530 dont nous parlons, réſultent, peut-on dire, des formules $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (T. XVI, p. 410) et $l = \frac{I}{Mb}$ (p. 33 qui précède).

En effet, on peut en tirer, pour des oſcillations du pendule phyſique aſſez petites et pouvant donc être conſidérées comme iſochrones, la formule $T = \pi \sqrt{\frac{I}{Mgb}}$; et l'on peut admettre par analogie que dans le cas du „pendulum cylindricum trichordon"

$$T = C \sqrt{\frac{I}{\text{Moment des forces pour un écart angulaire déterminé}}},$$

C étant une conſtante.

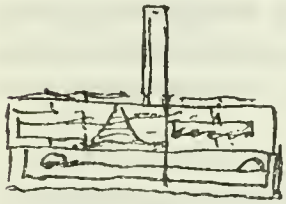
---

[1]) Comparez les notes 4 et suiv. de la p. 531 qui suit, et aussi les notes 6 de la p. 565 et 4 de la p. 567.

[2]) C. à. d. l'équation $T = \pi \sqrt{\frac{I}{Mgb}}$ qui suit.

Huygens a certainement éprouvé de la ſatisfaction en conſtatant dans le cas conſidéré l'accord de la théorie avec l'obſervation. Mais pratiquement, comme nous l'avons dit, la nouvelle horloge n'eut pas de ſuccès. Vers la fin de 1685 Huygens et van Ceulen revinrent donc [3]) au remontoir à reſſorts déjà conſtruit en 1658, quoique ſans remontage *fréquent*, par S. Coſter (et Cl. Paſcal), ainſi que par J. Fromanteel (p. 182 du T. XVII) et plus tard par I. Thuret, comme Huygens écrit à Chapelain l'avoir fait également (même endroit). La fuſée, ſupprimée par Coſter dans les horloges de chambre à reſſort moteur, et dont Huygens ne s'était pas ſervi dans ſon horloge marine de 1672 (T. XVIII, p. 15), qui n'était pas un remontoir, fut réintroduite par lui dans l'horloge de 1685 [4]). Nous ignorons s'il y en avait une dans la conſtruction de Thuret. Quant aux horloges marines à reſſort ſpiral régulateur — on en a certainement fabriqué quelques-unes: les horloges de van Ceulen mentionnées e. a. en juillet 1683 (T. VIII, p. 429—430; nous avons déjà cité ce paſſage à la p. 510), dont Huygens parle auſſi en octobre 1682 (T. VIII, p. 394) étaient apparemment de cette eſpèce — il paraît probable qu'elles avaient des fuſées, comme elles en ont encore aujourd'hui, d'autant plus que les horloges de poche à ſpiral régulateur (Fig. 19, empruntée à la p. 43 du Manuſcrit E) en avaient, tout comme les œufs de Nuremberg du ſeizième ſiècle, et qu'il y a auſſi une fuſée dans l'horloge conſtruite par J. van Ceulen en 1682, faiſant partie du planétaire de Huygens, dont nous avons déjà parlé dans la note 1 de la p. 508.

[Fig 19.]



Huygens ne nous a laiſſé aucune deſcription de l'intérieur des l'horloges de 1685. Mais dans ſes remarques ſur l'expédition de 1690—1692 il nous apprend (note 2 de la p. 650 qui ſuit) qu'elles provenaient des horloges précédentes, celles-ci ayant été „tournées ſens deſſus-deſſous". Voir auſſi le § 6, datant de 1684 ou 1685, de la p. 533. Les ſeuls renſeignements que nous poſſédions en outre ſont ceux contenus dans certains paragraphes de l'Inſtruction de décembre 1685 pour J. de Graaf et Th. Helder [5]), imprimée aux p. 55—76 du T. IX. Ce n'eſt que grâce à cette Inſtruction — ainſi qu'au rapport de Huygens d'avril 1888 [1]) ſur le journal de

[3]) Voir cependant le deuxième alinéa de la présente page.
[4]) Comparez la note 12 de la p. 31 du T. XVII et la note 1 de la p. 541 qui suit.
[5]) Manuscrit F, p. 334: In d'oude Keyſer op 't Speuy. Tom. Helder.

de Graaf dont nous avons dit en 1901 qu'une copie a été conſervée [2]) — que nous ſavons que l'horloge de 1685 était un remontoir [3]). En ce temps le remontoir à reſſorts à remontage fréquent était ſans doute généralement connu, puiſque Huygens parle (N° XXVII à la p. 542 qui ſuit) du „double déclenchement, comme diſent les horlogers". La Fig. 36 (p. 540) et le texte de la Pièce IV font voir que le poids du pendule triangulaire était globulaire, comme dans la Fig. 7 de 1671 (p. 13 qui précède). Nous ignorons s'il y avait encore des arcs cycloïdaux (voir ſur eux la note 5 de la p. 17). D'après le N° IV de la p. 541 le pendule était partiellement rigide; cependant, d'après le N° XXXV, il était ſuſpendu à des fils. Fort probablement les arcs cycloïdaux étaient donc toujours là. Il n'y avait apparemment plus de poids curſeurs comme en 1671 [4]).

Il était évidemment poſſible de remonter l'horloge ſans qu'elle s'arrêtât: voir à la p. 621 qui ſuit la Pièce III ſur la „maniere de faire qu'en montant l'horloge elle ne diſcontinue point ſon mouvement; dont les horlogers ſe ſervent ſans en ſcavoir rendre raiſon". Conſultez auſſi, à la p. 604, la fin de l'Avertiſſement correſpondant.

Cette horloge-là — ou plutôt les deux horloges de ce genre dont il eſt queſtion dans le N° I de la p. 539 — ont eu un grand ſuccès dans le voyage du Cap de la Bonne Eſpérance à Texel: elles ont ſervi à démontrer la diminution de la peſanteur due à la rotation journalière de la Terre. Voir plus loin dans le préſent Tome le Chapitre ſur les réſultats des expéditions maritimes.

Le ſuccès partiel de l'expédition de 1686—1687 induiſit les Directeurs de la Cie des Indes Orientales à faire — ſur l'avis de B. de Volder [5]) — une nouvelle expérience, celle de 1690—1692, dont le réſultat fut hélas bien peu ſatisfaiſant, comme nous l'avons déjà fait reſſortir dans le dernier alinéa de la p. 11 du T. XVII. Cette expérience fut faite avec les mêmes horloges que la précédente (T. IX, p. 467), quelques légères corrections y ayant été apportées conformément aux obſervations de Huygens et aux remarques de l'horloger van der Duſſen qui avait pris part à la première expé-

[1]) Voir le troisième alinéa de la p. 290 du T. IX.
[2]) Voir la note 3 de la p. 266 du T. IX.
[3]) Comparez la note 2 de la p. 17 du présent Tome. Le ressort du petit tambour était en cuivre (T. IX, dernières lignes de la p. 289).
[4]) Voir la note 3 de la p. 542 qui suit.
[5]) Voir la fin du deuxième alinéa de la p. 343 du T. IX.

dition (T. IX, p. 288—290, 418—419, 467, 528)[6]. Il eſt vrai que Huygens, après avoir examiné le journal de J. de Graaf (qui paraît ne pas avoir été conſervé, voir la note 1 de la p. 341 du T. X), dit le 6 mars 1693 que les réſultats ne ſont pas auſſi mauvais qu'on l'avait cru (T. X, p. 422—424). Voir auſſi ſa correſpondance avec de Volder dans le même Tome et ſes remarques citées à la p. 513.

Il avait pourtant fort bien compris qu'il fallait chercher autre choſe que l'horloge de 1685. Bien peu de temps après avoir reçu le journal (novembre 1692) il s'était mis de nouveau à l'œuvre, et dans ſa lettre déjà citée aux Directeurs de la Cie des Indes Orientales[7]) il déclare ne pas inſiſter ſur de nouvelles expériences avec la dite horloge „puiſqu'en cette occaſion j'ai fait une trouvaille différente et beaucoup meilleure dont je m'occupe en ce moment, par laquelle tout ce qui donne quelque difficulté dans l'application de l'invention eſt abſolument écarté". Il s'agit du „balancier marin parfait" de janvier-février 1693 (Pièce V à la p. 546), — ou plutôt de la „libratio iſochrona melior præcedente", portant la même date que la lettre citée, ſavoir le 6 mars 1693 (Pièce VI à la p. 562). Rien n'indique que les Directeurs de la Cie ſe ſoient intéreſſés à cette nouvelle conſtruction ou à celles de 1694. Huygens ne s'eſt plus adreſſé à eux, quoiqu'il l'eût certainement fait s'il eût vécu aſſez longtemps pour publier la deſcription de ſa dernière horloge munie du balancier à cornes de bouc hélicoïdales[8]).

Dans l'expédition de 1686—1687, et plus encore dans celle de 1690—1692, on avait remarqué 1° que les châſſis dans leſquels les horloges étaient ſuſpendues (p. 539, N° III) ne les empêchaient pas d'être ſecouées par les coups de vague (p. 549), 2° que le mouvement du pendule donnait un petit mouvement à toute l'horloge ainſi ſuſpendue, ce qui était la cauſe principale de l'irrégularité de la marche (p. 549 et 569), 3° que la ſuſpenſion du pendule à des fils de ſoie (p. 543, N° XXXV) était défectueuſe (p. 549), 4° que les reſſorts n'opéraient pas toujours de même force (comparez la p. 9 qui précède), 5° que les horloges étaient trop compliquées.

---

[6]) À la p. 132 v. du Manuscrit G Huygens écrit: Van der Dussen, Horologiemaecker tot Dordrecht in de Wijnstraet. Suivant les archives de Dordrecht il était né à Swijndrecht et fut enterré le 4 octobre 1689. En cette occasion il est appelé „Willem van der Dussen oorlogemaker naest het Stadthuis".

[7]) T. X, p. 424.

[8]) Voir la note 1 de la p. 576 qui suit, et les p. 685 et 702 du T. X. L'extérieur de l'horloge achevée de 1694 est représenté à la p. 592 (Fig. 94).

C'eſt apparemment pour obvier à ces deux derniers inconvénients que Huygens décida que la nouvelle horloge ne devait contenir aucun reſſort, pas de fuſée et peu de roues, et qu'elle devait être à poids moteur (p. 549). Il y a en effet un poids moteur dans l'horloge repréſentée à la p. 572 (Fig. 78). Dans la Fig. 94 de la p. 592 les cordes ſeules ſont indiquées. De plus il ſe réſolut à abandonner le pendule pour revenir au balancier. Quant aux châſſis, ils devaient déſormais être attachés au plancher *d'en bas* et munis de poids, pour amortir les fortes ſecouſſes (p. 549).

Il aurait probablement pris quelques précautions, s'il avait pu faire l'épreuve de ſes horloges ſur mer, pour empêcher le ballottement des poids moteurs: voir à ce ſujet les p. 556 et 577. Il n'en eſt pas moins remarquable qu'après tout il ait eu plus de confiance dans les poids que dans les reſſorts; quoique dans un mémoire anonyme, qui ſe trouve parmi les manuſcrits de ſon père [1]), il ſoit déjà dit que les poids ne peuvent ſervir ſur mer et qu'il y faut faire uſage d'horloges à reſſorts comparables aux horloges de poche. Il eſt vrai que l'auteur de ce mémoire n'avait apparemment fait aucune expérience; il ſe borne à donner le conſeil de faire conſtruire des horloges marines par les plus grands maîtres [2]).

Il était réſervé à Huygens de donner ſuite à ce conſeil [3]). Nous ignorons ſi en 1693 il travaillait toujours avec J. van Ceulen. Ce qui eſt certain c'eſt qu'en 1694 B. van der Cloeſen [4]) était ſon „ouvrier" (p. 593); nous penſons qu'il en fut de même en

---

[1]) Handschriften Constantijn Huygens, Vol. 47 (Kon. Academie van Wetenschappen, Amsterdam). Mons. W. Ploeg, dans sa dissertation — thèse de doctorat — sur „Constantijn Huygens en de Natuurwetenschappen" (juin 1934, Nijgh & van Ditmar, Rotterdam) donne (p. 107—109) les titres des manuscrits de ce volume. Il s'agit en grande partie, paraît-il, de manuscrits ayant appartenu au père Constantijn, quoiqu'on y trouve aussi des écrits datant d'après sa mort. Le mémoire en question est intitulé: „Middel om Oost en West te vinden, etc." Il est sans doute ancien, puisqu'il n'y est question, semble-t-il, que d'horloges à une seule aiguille: „Den uijrwijser dient gemaeckt, dat hij gae niet met hanghende gewichten (dat te scheep niet te passe en comt) maer met veren van binnen, gelijck de cleene horologikens, die men bij sich draegt".

[2]) „Dat se soo net ende vast-gaende gemaeckt werden alst mogelijck is, van de vermaerste meesters diemen weet".

[3]) Parmi les grands maîtres qui travaillèrent pour Huygens il convient de ne pas oublier P. Visbach, aussi connu des collectionneurs que J. van Ceulen. Nous avons dit à la p. 12 du T. XVII que Huygens ne fait mention de lui qu'en 1691. Toutefois son nom se rencontre aussi en 1690 dans le manuscrit G. Dans la note 1 de la p. 477 du T. IX nous avons écrit: „Rekening van verbael". Huygens avait écrit: „Rekening van Visbach".

[4]) D'après un document conservé aux archives communales de la Haye — comparez la note 5

1693. On trouve aux p. 593—596 *in extenſo* le protocole des obſervations qui eurent lieu du 19 avril au 21 mai 1694: elles ſont bien voir l'intimité de la collaboration du ſavant et de l'horloger.

Plus Huygens avance en âge, mieux il voit que la perfection des horloges dépend de celle des détails. C'eſt par conſéquent à la perfection des détails que ſont vouées un grand nombre des pages qui ſuivent.

Il n'abandonne pas toutefois ſon idée primordiale que la théorie a ici ſon mot à dire: l'iſochroniſme des vibrations doit réſulter de la proportionnalité du moment moteur à l'écart angulaire.

Il s'agiſſait donc de rendre parfaitement, ou preſque parfaitement, iſochrones les oſcillations libres de différentes amplitudes d'un balancier ſe mouvant dans un plan vertical [5]). Celui-ci devait être grand pour régler la marche de l'horloge et ne pas être gouverné par elle (p. 569). Au balancier il fallait attacher un poids — puiſque les reſſorts étaient exclus — produiſant un moment moteur poſſédant la propriété nommée. Huygens tâcha d'abord — comme il l'avait fait anciennement pour le pendule; voir les p. 17—20 du T. XVII — de trouver par expérience la forme de la courbe contre laquelle le ruban auquel le poids était ſuſpendu devait venir s'appliquer (p. 563), mais bientôt il en découvrit la forme théorique: il s'agiſſait de la courbe qu'on obtient par l'évolution d'une circonférence de cercle.

Comme nous l'obſervons auſſi dans les notes 6 de la p. 565 et 4 de la p. 567, cette ſolution aurait été exacte ſi le moment d'inertie du balancier par rapport à ſon axe eût été abſolument conſtant; mais ce moment varie par la préſence même du poids

de la p. 158 du T. XVII — Bernard van der Cloesen fut élu „hooftman" lors de la constitution de la Corporation des Horlogers en 1688 à la Haye. Il est souvent nommé, soit comme „hooftman", soit comme doyen („decken") dans les pièces suivantes. En 1712, comme l'atteste c. a. une inscription latine sur le socle, cet „ingeniosissimus artifex" répara et porta au „culmen perfectionis" le planétaire communément appelé „de Leidsche Sphaera", qui fut construit par Steven Tracy de Rotterdam et se trouve actuellement au „Nederlandsch hist. natuurw. Museum" à Leiden. Van der Cloesen vivait encore en 1719, puisqu'on a trouvé aux archives communales de la Haye une requête de lui de cette année; elle concerne son fils Olivier et est adressée au bourgmestre de la Haye.

[5]) Ailleurs (p. 573, Fig 79) Huygens parle incidemment d'un balancier tournant dans un plan horizontal.

régulateur. Il eſt vrai que plus le balancier eſt grand, moins cette variation eſt importante. Il eſt poſſible qu'au début Huygens n'ait pas remarqué ce léger défaut. En 1694 en tout cas il s'en rendit fort bien compte puiſque les calculs des p. 583—589 ſervent à évaluer la grandeur de l'erreur.

On pourrait encore aujourd'hui ſe propoſer — comme Euler le fit ſans beaucoup de ſuccès dans le cas de la cycloïde; voir les p. 46 et 428 qui précèdent — de calculer la forme exacte que la courbe en queſtion doit avoir pour que l'oſcillation ſoit rigoureuſement iſochrone, du moins en théorie et en ſuppoſant que le ruban reſte vertical, ce qui d'ailleurs, comme Huygens lui-même l'obſerve, n'eſt pas abſolument vrai, quelque lentes que ſoient les oſcillations (p. 587). Un calcul de ce genre, ſuppoſé que l'exécution en ſoit poſſible, n'aurait ſans doute aucune importance pratique.

Ce qui, malgré Huygens, paraît plus important — comparez la note 2 de la p. 560 — c'eſt que la gravité du poids régulateur — ou des poids régulateurs, car il y en a deux ou pluſieurs dans les balanciers de 1694; voir p.e. la Fig. 89 à la p. 579 — varie lorſque la partie du vaiſſeau où ſe trouve l'horloge monte ou deſcend d'un mouvement accéléré.

Beaucoup de gens parlent dans ce cas d'une augmentation (ou diminution) *apparente* du poids conſidéré [1]). Huygens dit ſimplement que le poids régulateur [2]) „gravior fit". Ceci mérite d'être remarqué. Nous avons déjà obſervé dans le T. XVI (note 5 de la p. 198) que la conception relativiſte — comparez le troiſième alinéa de la p. 197 du T. XVI — s'impoſait à ſon eſprit.

C'eſt auſſi en 1693, en travaillant à ſes horloges, qu'il a énoncé l'important axiome

---

[1]) C'est ainsi que s'exprime p. e. F. Marguet à la p. 139 de son ouvrage cité à la p. 546 qui suit („les changements de la pesanteur apparente à bord").

[2]) Peu importe qu'il s'agit en cet endroit, non pas d'un poids régulateur suspendu à un ruban qui s'applique contre une „corne de bouc", mais d'une partie d'un „chapelet" ou chaînette régulatrice.

que les forces se conservent dans la nature: voir la p. 554 qui suit et la p. 477 qui précède [3]).

En fin de compte, il y a lieu de se demander ce que sont devenues les dernières horloges construites par Huygens à la Haye. Outre les deux horloges nommées, il y en a eu au moins une troisième dont il parle dans sa dernière lettre connue, celle du 4 mars 1695 (T. X, p. 709). Il y dit que sa nouvelle invention a été accommodée à une vieille horloge „a pendule de 3 pieds, qui montre aussi l'heure du soleil, sans qu'il soit besoin de l'Equation du temps". Nous supposons que ces paroles signifient que le balancier à cornes de bouc hélicoïdales avait été introduit dans l'horloge au lieu du pendule de 3 pieds [4]).

Cette dernière horloge paraît être restée dans la famille, attendu qu'un descendant de la famille Huygens, A. J. Royer, légua en avril 1809 à l'Université de Leiden, outre le planétaire, l'„equatiehorlogie, door wijlen mijn oud-oom Christiaan Huygens geïnventeerd" [5]). Mais cette horloge est aujourd'hui introuvable. Nous ajoutons que le texte de Huygens ne dit pas qu'il s'agissait d'une „equatiehorloge" inventée par lui. Des horloges de ce genre existaient déjà; voir p. e. les p. 378—379 du T. VI (horloge de Mercator) [6]).

Quant aux deux — ou plus de deux — autres, nous ignorons leur histoire. Mais la comparaison des Fig. 39 de la p. 547 et 64 de la p. 562 — la p. 180 du Manuscrit H, où se trouve cette dernière, a d'ailleurs déjà été reproduite en 1833 en fac-simile

---

[3]) Voir aussi la note 6 de la p. 579 qui suit.

[4]) On peut douter que cette horloge ait été destinée à l'usage sur mer, puisqu' elle doit avoir eu un grand nombre de roues (T. VI, p. 379), ce que Huygens voulait éviter (p. 516).

[5]) P. C. Molhuysen „Bronnen tot de Geschiedenis der Leidsche Universiteit", T. VII (la Haye, M. Nijhoff, 1924), p. 354 et 368.

[6]) Cependant les horloges de ce genre — voir sur l'horloge à équation, peut-être anglaise, qui se trouvait en 1699 dans le cabinet du roi Charles II d'Espagne, la p. 184 du T. I de l'„Histoire de la Mesure du Temps etc." de 1802 de F. Berthoud — étaient sans doute très rares, puisque Leibniz ne les connaissait pas. Il écrit dans ses Remarques de ± 1715 (voir la note 2 de la p. 502): „Je ne veux point parler icy de la Reduction du Tems égal au Tems apparent, cependant je reconnois, que si la Machine de l'Horloge ou de la Montre faisoit cette Reduction par elle même, suivant ce que l'ingenieux Auteur [H. Sully] de ce Discours nous fait esperer, ce seroit quelque chose de très-beau et de très-commode".

à la fin du T. II des „Chriſtiani Hugenii aliorumque ſeculi XVII virorum celebrium Exercitationes mathematicæ et Philoſophicæ" publiées à la Haye par P. J. Uylenbroek — fait voir immédiatement, ce qui toutefois n'a pas encore été remarqué, la très grande reſſemblance du régulateur de Sully avec celui, preſqu' inconnu juſqu'ici, de Huygens [1]). Voir encore ſur Huygens et Sully le texte des p. 546—547. Il ſemble permis de conclure que Sully a vu l'horloge de Huygens et van der Cloeſen, d'autant plus que nous ſavons qu'il viſita la Hollande lorſque ce dernier était encore en vie. Sully avait été „apprenticed to Charles Gretton" en Angleterre en 1694 [2]). Suivant F. J. Britten [3]) „on the completion of his apprenticeship he travelled on the Continent, viſiting Holland and Auſtria. From Vienna [voir la fin de la note 2 de la p. 502] he went to Paris". C'eſt à Leiden que, d'après J. Drummond Robertſon [4]), il publia en 1711 ſon premier ouvrage, intitulé „Abrégé de quelques règles pour faire un bon uſage des montres, etc." Il mérite d'être remarqué que Sully dans ſon ouvrage de 1726 [5]) ne dit pas que les courbes en queſtion ſont de ſon invention ni que ce ſont des développantes de cercle; ce qui ſe conçoit aiſément s'il ne faiſait qu'imiter ce qu'il avait vu, et peut-être acquis, en Hollande, de ſorte que l'équation des courbes lui était inconnue. L'invention de Sully, c'eſt que chez lui, comme le montre la Fig. 39, le ballottement du poids régulateur eſt rendu impoſſible. Par l'influence indirecte exercée ſur l'eſprit de Sully l'œuvre de Huygens des dernières années ſe rattache viſiblement à celle des grands horlogers anglais et français du dix-huitième ſiècle.

---

[1]) F. Marguet (ouvrage cité à la p. 546) dit (p. 139) de Sully: „Son horloge marine était construite sur des principes entièrement originaux". Comparez la note 6.

[2]) Suivant le secrétaire de la „Clockmakers Company" (et suivant une liste publiée par cette Compagnie en 1931 à l'occasion de son troiscentième anniversaire).

[3]) F. J. Britten „Old Clocks and Watches & Their Makers", 3ième éd. 1911, London, B. T. Batsford, p. 323. On trouve la même chose dans la sixième édition fort récente de Britten et dans l'„Histoire de l'Horlogerie" de P. du Bois, publiée à Paris en 1849—1850.

[4]) „The Evolution of Clockwork", p. 341.

[5]) „Description abrégée d'une Horloge d'une nouvelle Invention, pour la plus juste mesure du Temps sur Mer, avec le jugement de l'Acad. Royale des Sciences sur cette Invention, et une Dissertation sur la Nature des Tentatives pour la Découverte des Longitudes dans la Navigation, & sur l'usage des Horloges, pour la mesure du Tems en Mer" par Henry Sully, Horloger de S. A. S. Monseigneur le Duc d'Orleans, Paris, chez Briasson, 1726.

[6]) R. T. Gould écrit à la p. 36 de „The marine Chronometer": „Sully attached great importance to the precise from of these cheeks, which he described as a curve of his invention, previously unknown to geometers, and possessing the power of making the vibrations of lever and balance isochronous".

Nous ne voyons pas qu'il ait parlé expressément d'une courbe de son invention, bien qu'il amène le lecteur à croire qu'il doit en être l'inventeur. Dans l'ouvrage de 1726 il écrit (p. 2—3): „J'ai eu pour objet dans mes Recherches, une Machine, dont le mouvement fût aussi égal et aussi constant, *s'il est possible*, que celui d'une Pendule à Secondes, & qui n'eût pas les imperfections ausquelles les Pendules sont sujettes en Mer & en differens Climats.

Je réduis ces imperfections à trois principales, qui sont:

1° Les Variations, quelques petites qu'elles soient, provenantes de la dilatation & retrecissement des Métaux, & de tous les Corps, dont la chaleur & le froid sont des causes évidentes, sans en exclurre d'autres.

2° Les Variations encore bien plus considerables, causées par l'inégalité de la Pesanteur des corps en divers endroits du Globe terrestre, laquelle n'est pas encore réduite à des Regles certaines.

3° La difficulté, ou peut-être l'impossibilité de suspendre une Pendule, de longueur à mesurer le tems avec la justesse requise, dans un Vaisseau sur Mer, de maniere que, les divers mouvemens du Vaisseau ne dérange[nt] pas le mouvement particulier de la Pendule.

J'ai tâché d'éviter de pareils inconveniens dans la construction de mon nouvel Horloge. Vous jugerez de la maniere dont je me suis pris pour y réüssir. Si j'ai eu le bonheur d'y avoir ajoûté d'autres proprietez importantes à mon dessein, c'est peu qu'elles soient nouvelles, je n'y regarde que leurs utilitez. En voici deux des principales:

Le premiere de ces proprietez se trouve par l'application d'une certaine Courbe, *qui n'est pas encore connuë des Geometres, & qui excitera peut-être leur curiosité*, de conserver une parfaite isochronlsme aux Arcs des vibrations de diverses grandeurs, & de quelque cause que cette diversité de grandeur des Arcs puisse provenir [N.B. Van der Cloesen peut avoir dit à Sully que Huygens avait cet espoir. Comparez le dernier alinéa de la note 1 de la p. 25 qui précède].

La seconde consiste dans une methode de réduire les frotemens de la Puissance reglante à la moindre quantité qu'on veut, ou presque à zero [comparez la p. 546 qui suit].

Ne pouvant entrer ici dans de grands détails, je me flâte que l'explication des Figures, & les Notes suivantes vous suffiront, pour en pouvoir tirer la plûpart des preuves des propositions ci-dessus".

À la p. 43, vers la fin de son livre, Sully écrit:

„C'est pourquoy les Directeurs, & Principaux Interessez des Compagnies des Indes, d'Angleterre, d'Hollande, des Pays-Bas imperiaux & de France, & les riches Negotians des autres Pays Maritimes, ne feroient peut-être pas mal de s'informer attentivement de quelle utilité pourra leur être cette Invention. Il ne leur coûtera pas grand peine de consulter là-dessus les plus scavans hommes en ces sortes de matieres, ni de grands frais pour en faire *des Experiences*". À la p. 14, écrite le 22 mars 1724, il fait mention de l'„Horologium oscillatorium" de Huygens, dont il connaît déjà l'édition nouvelle de cette année par 's Gravesande.

I.

L'APPLICATION DE JANVIER 1675 DU RESSORT SPIRAL RÉGULATEUR AUX BALANCIERS DES MONTRES.

[La Pièce (Manuſcrit E, p. 35—36), intitulée „Balancier de montre reglè par un reſſort" et contenant deux fois le mot εὕρηκα, a été publiée aux p. 408—409 du T. VII. Elle eſt ſuivie (p. 409—416) par le „journal" (Manuſcrit E, p. 36—40) ſe rapportant au même ſujet, que Huygens commença le 1 février (p. 411, l. 1) et dont font apparemment déjà partie le deuxième et le troiſième alinéa de la p. 409. La fin du journal (T. VII, p. 415, note 22) date de juillet 1676[1]). L'article de février 1675 du Journal des Sçavans occupe les p. 424—425 du T. VII. — Voir ſur cette invention les p. 501—508 de l'Avertiſſement qui précède.]

---

[1]) Il faut y lire „boete" au lieu de „boite" (l. 16 de la p. 410 et 3 de la p. 412); „aussi et que" au lieu de „aussi que" (l. 2 d'en bas de la p. 410); „autheur" au lieu de „l'autheur" (l. 1 d'en bas de la p. 413); „point" au lieu de „pas" (l. 8 de la p. 414); „j'aurois eu" au lieu de „j'aurois" (l. 7 de la p. 416). Le premier alinéa de la p. 413 doit commencer comme suit: „le 17e. Dim. J'eſtois preſt d'aller trouver M. Colbert a S. Germain, mais M. Perrault . . . ."

[2]) Voir les p. 481 et 489 du T. VII. Des montres à ressort spiral à balancier unique furent fabriquées à Paris en grand nombre (voir le quatrième alinéa de la note de la p. 454 du T. VII). Le stadhouder Guillaume III en reçut une en juillet 1675 (T. VII, p. 464 et 480), le roi Louis XIV en possédait une en août 1675 (T. VII, p. 493) et le duc de York en avait une à sa disposition en septembre 1675 (T. VII, p. 509), La précision n'était pas bien grande et les montres s'arrêtaient parfois (voir p. e. les p. 477, 481 en 490 du T. VII et 28 du T. VIII). Les premières n'avaient que l'aiguille des heures, puisque Huygens dit en août 1675 (T. VII, p. 489) qu'il peut en envoyer un deuxième à Mil. Brouncker „ou il y ait des minutes". Mais il n'y avait pas encore d'aiguille à secondes (même endroit). Les horlogers, travaillant indépendamment de Huygens, eurent évidemment une grande part au perfectionnement de la montre (T. VII, p. 510). Celles de Thuret étaient en 1675 les meilleures (T. VII, p. 542). Les montres étaient souvent en forme de poire (T. VII, p. 483, 485).

Quant à la construction de l'horloge avec deux balanciers, F. Marguet dans son ouvrage cité aussi à la p. 546 qui suit, écrit (p. 141) que l'horloge marine de 1736 de Harrison „avait

Réponſe des Etats de Hollande et de Weſtfriſe à une requête (inconnue) de Chr. Huygens au ſujet de la détermination des longitudes [3]).

25 *ſeptembre* 1675.

Op het verſoeck van Chriſtiaan Huygens van Zuylichem verſoeckende octroy op ſeeckere ſoorte van horologes bij hem van nieuws geinventeert en die ſoo correct ſouden gaen dat die naer het gevoelen van den ſuppliant in grooter formaet gemaeckt ſijnde ter zee ſoude connen werden gebruyct en dienen ſoude connen totte langh vergeefs geſochte deſignatie van longitude gemeinelijck genaemt Ooſt en Weſt, is aen den ſelven het verſochte octroy toegeſtaen voor den tijt van vijſthien jaeren en voorts op de voorſ. requeſte geappoſtilleert.

De Staten van Hollandt ende Weſtvrieslandt vinden goet dat deze requeſte ten aenſien van longitude gemeynlick genaemt het Ooſt ende Weſt, geſtelt ſal werden in handen van de Heeren Gedeputeerden der Stadt Dordrecht ende andere haere Ed. Gr. Mo. Gecommitteerde Raden tot de ſaecke van de zee, omme d'ſelve met ende nevens de Collegien ter Admiraliteyt in deze Provincien reſiderende ten dien reguarde ende ten aenſien van het ſucces van het gebruyck van dien te examineren ende te dienen van hare conſideratien ende advijs.

Les Archiviſtes de la Haye, qui nous ont fait parvenir cette Pièce et la ſuivante, nous ont en même temps fait ſavoir que les notes, d'ailleurs ſommaires, du député de Dordrecht Muys van Holy des années 1675 et 1676 (et il en eſt probablement de même pour les années ſuivantes) ſur les réunions de la commiſſion nommée — la „Beſogne uit de Staten van Holland voor de Zeezaken" préſidée par Dordrecht, à laquelle furent ſouvent adjoints les „Gedeputeerden uit de Admiraliteit" — ne contiennent rien ſur ce ſujet.

---

deux balanciers liés: c'était une idée de Leibnitz": il y a en effet deux balanciers dans le modèle — d'ailleurs fort différent de ceux de Huygens — proposé par Leibnitz dans son article de mars 1675 dans le Journal des Sçavans. Ce modèle n'a d'ailleurs pas été exécuté, puisque Leibniz écrit à ce propos: „Lorsque Mr. Huguens publia son Ressort vibrant à spirale, je publiay un peu après dans le Journal des Sçavants un autre Principe d'égalité, qui n'est pas phisique, comme est la supposition de l'égalité des vibrations des Pendules ou des Ressorts, mais purement mécanique, consistant dans une parfaite Restitution de ce qui doit vibrer, puisqu' alors les Vibrations sont égales, parce qu'elles sont justement les mêmes... J'ay pensé quelquefois à faire executer cette Invention, qui promet des nouveaux avantages assez considérables; Mais j'ay toûjours manqué de l'assistance d'un bon Maître, qui eût une bonne volonté d'y travailler. Etc." („Remarques etc." citées aussi dans la note 2 de la p. 502 qui précède).

Voir sur des horloges à double balancier construites en Angleterre peut-être déjà avant 1675 la p. 181 de „The Evolution of Clockwork" de J. Drummond Robertson.

[3]) Texte emprunté aux Résolutions des Etats de Hollande et de Westfrise (Archives de l'Etat à la Haye).

Les Etats de Hollande et de Weſtfriſe à Chr. Huygens [1]).

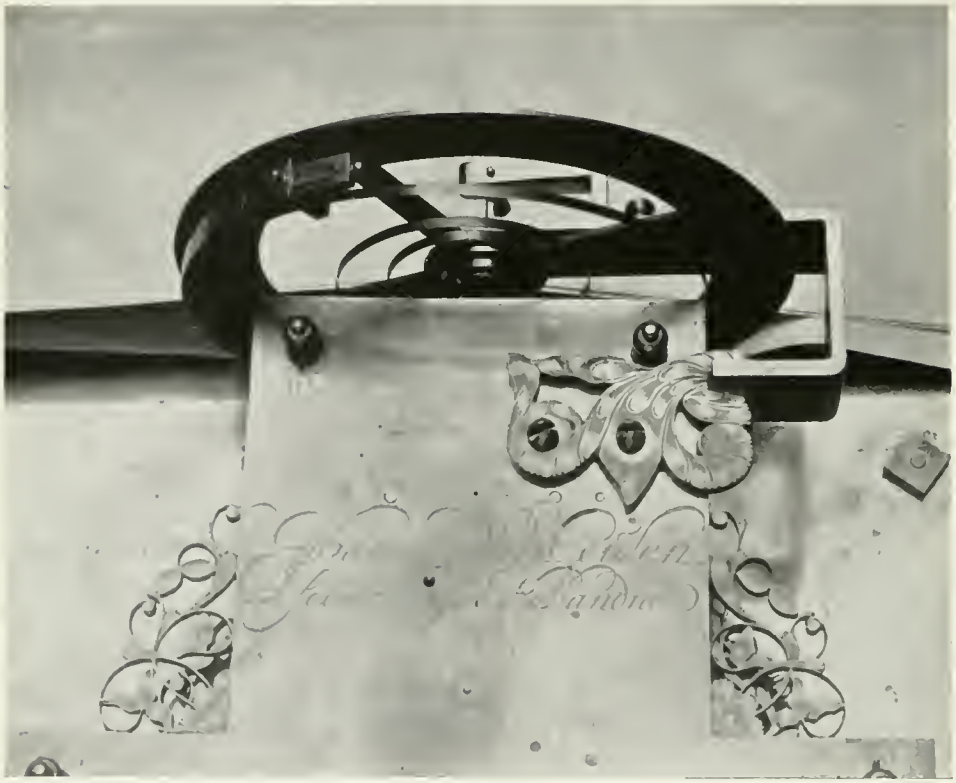
27 *ſeptembre* 1675.

De Staten van Holland enz. doen te weten, alſoo ons vertoont is bij Chriſtiaen Huygens van Zuylichem, hoe dat onlangs bij hem was geïnventeert ſekere niewe conſtructie van horologien, bequaam om in den ſack te werden gedragen, welckers beweginge niettemin even zoo eenparigh, exact ende ſeker bleeff als die van de ſlingerwercken voor deſen bij hem ſuppliant geinventeert ende nu allom in groot gebruyck, ende alſoo hy ſuppliant genegen was deſelve inventie ten dienſte van 't gemeen aen den dagh te brengen verſocht reverentelijck, wanneer deſelve aen ons ofte aen heeren commiſſariſſen van onſen 't wegen daer toe verſocht, ſoude weſen gecommuniceert ende verthoont, dat het ons goede geliefte moghte zijn hem ſuppliant te vergunnen octroy ende privilegie by het welcke allen ende ijegelycken in deſe onſe provintie verboden wierde ſodanige horologien ſonder ſijn ſuppliants permiſſie naer te maecken, hetzij in 't geheel ofte ten dele, het ſij dan oock onder pretext van eenige veranderingh ofte herſchickinge ofte anderſſints, in wat forme ofte maniere het ſoude mogen weſen, ofte elders gemaeckt ſijnde ende met ſeecker ſijns ſuppliants eighen merck niet geteeckent zijnde in deſe onſe provintie te koop te brengen ofte te verthonen, op pene van de ſomme van drie duyſent gulden ten proffijte van hem ſuppliant nevens de confiscatie van ſodanige verboden wercken te verbeuren — ſoo iſt dat wij de ſaecke ende 't verſoeck voorſ. overgemerckt hebbende ende genegen weſende ten bede van den ſuppliant uyt onſe reghte wetenſchap, ſouveraine maght, ende autoriteijt, den ſuppliant geconſenteert ende geoctroyeert hebben, conſenteren ende octroijeren denſelven mits deſen omme het voorſ. horologie geduyrende den tijt van vijfthien naeſtkomende achtereenvolgende jaeren binnen onſen lande van Hollandt ende Weſtvrieſlandt alleene te mogen maken ofte doen maken. verbiedende allen ende ijegelijcken het voorſ. horologie ſonder ſijns ſuppliants permiſſie in den voorſeyden onſen lande van Hollandt ende Weſtvrieſlandt naer te maecken het ſij int geheel ofte ten deele, hetſij dan oock onder pretext van eenige veranderinge ofte herſchickinge ofte anderſints in wat forme ofte maniere het ſoude mogen weſen ofte elders naergemaeckt ſijnde ende met ſeecker ſijn ſuppliants eygen merck niet geteeckent ſijnde binnen den voorſeyden onſen lande te brengen om te verkoopen ofte te verthoonen op verbeurte van alle de naergemaeckte ingebrachte ofte vercochte horologien ende een boete van drye hondert gulden daer en boven te verbeuren, t' apliceeren een derde part voor den officier, die de calange doen ſal, een derde part voor de armen der plaetſe, daer het caſus voorvallen ſal ende 't reſterende derde part voor den ſuppliant.

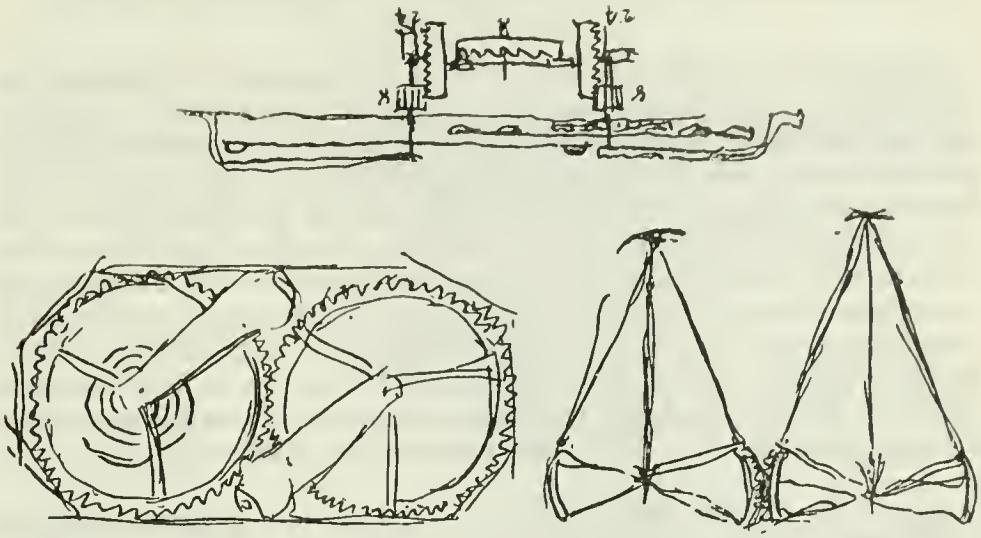
---

[1]) Le texte qui suit est emprunté aux „Minuut Octroyen" de 1675 des Archives des Etats de

[Fig. 21.]



[Fig. 20.]



La Fig. 20, empruntée à la p. 43 du Manuscrit E datant de 1675 (ou 1676, comparez la note 1 de la p. 496), représente trois modèles de balanciers doubles (comparez le deuxième alinéa de la p. 507). Conformément à ce qu'on voit dans le premier et le troisième modèle, Huygens écrit: „Je crois qu'il ne faudroit mettre qu'a l'un des balanciers un petit reſſort [ſpiral], parce que ſi on en en met auſſi a l'autre on aura de la peine a les faire quadrer enſemble".

La conſtruction à deux balanciers n'a apparemment pas eu de ſuccès en ce moment; mais plus tard d'autres conſtructeurs y ſont revenus [2]).

La Fig. 21 repréſente le reſſort ſpiral et le balancier du planétaire de Huygens, conſtruit par van Ceulen, qui ſe trouve actuellement dans le „Nederlandſch hiſt. natuurw. Muſeum" à Leiden. Comparez la note 1 de la p. 508 qui précède. Huygens avait eu d'abord l'intention d'employer une horloge à pendule, puiſqu'il écrit (Manuſcrit F. p. 23, datant de 1680): „Le pendule pourra eſtre d'environ $18\frac{1}{2}$ pouces, pour faire 2 ſecondes en 3 vibrations". Il ajouta plus tard: „J'ay pris le balancier a reſſort ſpirale pour plus grande commoditè". À la p. 47 du même Manuſcrit il avait écrit en marge à côté d'un paſſage biffé: „Il vaudra mieux de faire cette horloge avec un balancier à reſſort ſpirale, pour avoir moins d'embaras en l'ouvrant. Car auſſi bien il ne s'agit pas d'une grande exactitude pour ce qui eſt des heures [3]). faire le temps du balancier en ſorte qu'on puiſſe touſjours appliquer une pendule de 18 pouces". Toutefois le balancier du planétaire fait une oſcillation ſimple en une ſeconde.

Hollande et de Weſtfrise (Archives de l'Etat à la Haye). Comme on voit la Pièce s'accorde en grande partie avec l'octroi donné en octobre par les Etats-Généraux (T. VII, p. 507).

[2]) Voir la note 2 de la p. 522 qui précède.

[3]) Dans ses „Remarques" — voir la fin de la note 2 de la p. 522 — Leibniz écrit: „Il est vray, que la

Resolutiën vande Bewindhebberen vande Oostindische Comp.ie ter Camer tot Amsterdam.

Donderdagh den 31 Decemb. 1682.... De Heer Burgermeester Hudde heeft ter vergaderingh voortgebraght, en openinge gedaen van 't gene sijn Ed.t is voorgekomen, omtrent seeckere nieuwe inventie van horologien van die accuraetheijt, dat deselve in den tijdt van een etmael geen secunde verlopen; waer door seer apparent sal konnen werden uijtgevonden het Oost en West; waer op sijnde gedelibereert is sijn Ed.t voor de gedane openinge bedanckt, en wijders geresolveert sijn Ed.t te versoecken, om het bestier hier van op sigh te nemen, mitsgaders dit werck te dirigeren, en te vervolgen, om ware het doenlijck ten goeden effecte te brengen: ten dien eijnde te corresponderen, mitsgaders de hulpe en assistentie te versoecken van de Heer Huijgens, sich op die saken naeuw verstaende, neffens eenen van Ceulen, die de voornoemde horologien is maekende, met die verdere authorisatie, om daer aen te koste te leggen en te spenderen tot een somme van een of twee duijsent gulden toe.

Maandach den 28 Februarij 1684 [1]). Is ter vergaderingh geproduceert een brieff door de Heer Huijgens aan de Heer Burgermeester Hudde geschreven; dienende tot notificatie, dat sijn Ed.t in het uijtvinden en maeken van accurate horologien, om daer door te vinden het Oost en West, daer toe sijn Ed.t bij resolutie vanden 31sten December 1682 is versocht, soo verre is geadvanceert, dat de selve vanden anderen niet meer als een, of ten uijttersten twee secunden verschilden, met vast vertrouwen, dat sijn Ed.t dat different soude cunnen remedieren, en het werck in korten tot een volkomen perfectie brengen, waer op sijnde gedelibereert, is verstaen den gemelten Heer Burgemeester voor sijne gedaene openingh te bedancken, en sijn Ed.t wijders te versoecken, om daer over een brieff van danckseggingе uijt den naem van deze vergaderingh aen den gemelten Heer Huijgens te schrijven, en sijn Ed.t daer bij tot continuatie in sijnen goeden ijver te animeren.

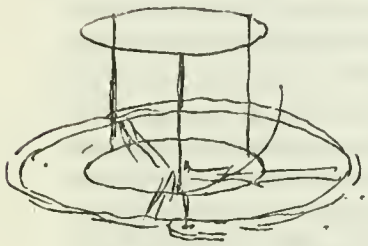
Pendule a beaucoup plus de part au gouvernement de l'Horloge, que le Ressort à spirale n'en a au gouvernement de la montre. Outre la preuve qu'on en a alléguée, en voicy une autre tout aussi sensible: c'est que l'Horloge à Pendule ne sçauroit aller à moins qu'on ne mette la Pendule en vibration, mais la montre va par sa propre force, et fait vibrer le Ressort spiral".

[1]) En publiant en cet endroit la résolution du 28 février 1684, nous admettons qu'en ce moment van Ceulen n'avait pas encore changé en „pend. cyl. trich." les deux horloges à ressort spiral régulateur: voir le § 4 de la p. 532 qui suit. C'est sans doute à ce changement que Huygens fait allusion dans sa lettre en disant que les horloges seront perfectionnées. Nous regrettons de ne pas posséder des horloges marines construites par van Ceulen des esquisses telles que celle de la p. 15 qui précède (Fig. 10).

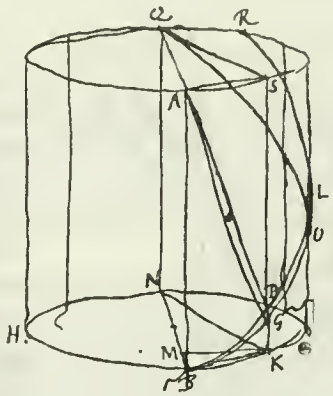
II.

L'APPLICATION DE DÉCEMBRE 1683 DES VIBRATIONS DE TORSION AUX HORLOGES MARINES (PENDULUM CYLINDRICUM TRICHORDON) [1]).

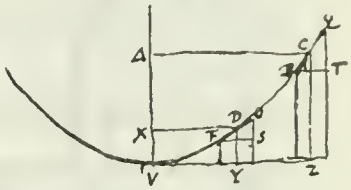
[Fig. 22.]



[Fig. 23.]



[Fig. 24.]



ἐυρηκα Hagæ, 4 Dec. 1683.

§ 1. Pendulum cylindricum Trichordon [Fig. 22]. Inventum poſtquam elaterem ſpiralem frigore accelerare motum horologij repperi [2]). Hic effectum elateris abſque elatere habemus [3]). Aequalitas recurſuum exiſteret ſi punctum moveretur in parabola cujus $\frac{1}{2}$ lat. rectum AB [Fig. 23], cylindro circumplicata. AB ∞ diam. BN [Fig. 23] [4]). Demonſtratio hinc. Si parabolam [Fig. 24] tangant rectæ FO, BQ in punctis D et C, unde ducantur perpendiculares in VZ, tangentem in vertice, rectæ autem ab FO et à BQ eidem VZ perpendiculares intercipiant partes ejus æquales, ſintque FS, BT ipſi VZ parallelæ [5]) erit QT ad OS ut CΔ ad DX, ſive ut ZV ad YV. Sed VY, VZ ſunt

---

[1]) La Pièce, que nous divisons en cinq §§, est empruntée aux p. 179—180 du Manuscrit F.

[2]) Voir sur la question de l'influence de la température sur la période de vibration des ressorts spiraux la p. 508 l'Avertissement qui précède.

[3]) Il y a donc ici une certaine continuité: comparez la p. 509 de l'Avertissement.

[4]) Voir sur la courbe décrite par le point B le § 2 qui suit, notamment les notes 4 et 7 de la p. 529.

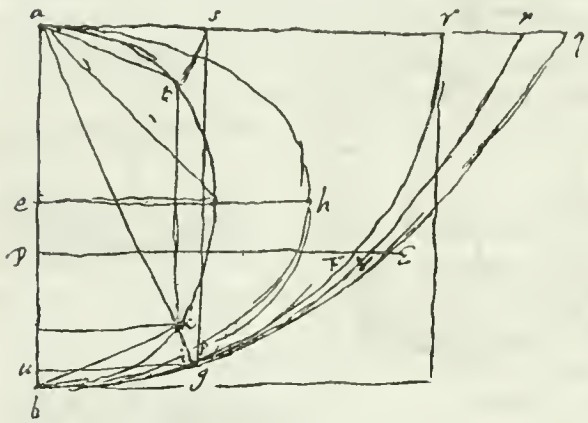
[5]) On a donc FS = BT.

diſtantiæ quibus a quiete extrahitur punctum B in figura cylindri [Fig. 23], quantum ad motum horizontalem. Renitentiæ vero itemque incitationes ponderis B horizontaliter tracti in punctis parabolæ D, C [Fig. 24], ſunt inter ſe ut QT ad OS quia BT, FS æquales [1]). Igitur erunt etiam iſtæ incitationes ut ZV ad YV. Unde æqualitas recurſuum [2]).

AB ∞ diam. BN [Fig. 23]. Si BK ſit $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, fient recurſus $\frac{1}{4}$ ipſius. ſit punctum G inferius P, ubi eſſe deberet ad æquabilis motus lineam deſcribendam, tantum $\frac{1}{1000}$ AB, poſita nempe BPLR parabola [3]) ut oportet.

[Fig. 25.]

7 Dec. 1683.



Imo parabola *bvr* cujus ſemilatus rectum *ab*.

§ 2. Circulo AQ [Fig. 23] immoto, movetur horizontaliter circulus hic BN tribus filis è ſuperiore ſuſpenſus, unde circulus hic ſurſum fertur. Et punctum B deſcribit curvam quandam BGOQ in ſuperficie cylindrica, quæ curva ſi cum ſuperficie illa in planum explicetur erit linea ſinuum quam vocant, in qua ſi ad axem *ba* [Fig. 25] applicetur quopiam DE normaliter, ea æquabitur arcui *b*F à quadrante *br* abſciſſo.

---

[1]) Dans l'état de repos la tension de chacun des trois fils est $\frac{1}{3}$ G, G étant le poids du cercle inférieur. Lorsqu'on tourne ce cercle de manière que les trois fils font désormais un angle α avec la verticale, et qu'on maintient le cercle dans cette position en appliquant une force horizontale tangentielle K („renitentia") en chacune des extrémités inférieures des fils, la tension S des fils, dont la composante verticale est toujours $\frac{1}{3}$ G, sera telle que $K = \frac{1}{3}$ G tg α. Les forces K égales et contraires qui mettent le cercle en mouvement lorsqu'on ne le retient plus („incitationes") sont donc proportionnelles à tg α. Or α est aussi l'angle entre la tangente à la courbe que l'extrémité inférieure du fil va décrire et la projection de la tangente sur un plan horizontal (puisque la tangente est perpendiculaire au fil). Les „renitentiæ" en D et C [Fig. 24] seraient donc proportionnelles à $\frac{QT}{BT}$ et $\frac{OS}{FS}$ respectivement (c.à.d. à QT et OS, puisque BT=FS), si la courbe décrite, rendue plane par le développement du cylindre de la Fig. 23, était une parabole.

[2]) D'après les p. 483 et suiv. du présent Tome.

[3]) Après le développement du cylindre sur un plan.

Si enim quæratur hujus curvæ punctum G [Fig. 23] in recta KS, constat junctâ SA angulum ASG esse rectum. unde quadr. SG æquale differentiæ quadratorum AG, AS quorum AG qu. æquale est AB sive AQ. unde qu. SG ∞ qu. SQ sive KN. Evoluto igitur arcu BK, sive in altera figura [Fig. 25] arcu *at* in *as*, si ponatur perpendicularis *sg* æqualis KN sive in altera, *ak*, habebitur in plano evoluto punctum *g*. Ducatur *gu* applicata, quæ secet arcum *b*F*r* in *i*. Quod si jam ostendatur *ug* ∞ arcui *bi*, erit punctum *g* in curva illa sinuum [4]). Ostenditur autem sic. Cum *sg* sive *au* sit ∞ *ak* ex constructione, erit perpendicularis *iu* æqualis *bk*, quia producta *ak* incidit in *i* [5]). Unde arcus *bi* æqualis erit arcui *bk* quia [6]) &c. sed *bk* arcus æqualis est rectæ *as* sive *ug*. Ergo *ug* æqualis arcui *bi*. quod erat demonstrandum [7]).

---

[4]) En prenant dans la Fig. 25 *aq* pour axe des x et *ab* pour axe des y, on peut en effet démontrer qu'une courbe construite de telle manière que l'abscisse *ug* ou x, sur laquelle se trouve le point *i*, est égale à l'arc *bi* du quart de circonférence *bFr*, a pour équation $y = R \cos \frac{x}{R}$, en posant $ab = R$: la courbe est donc une sinusoïde. Voyez sur l'histoire de la sinusoïde la p. 511 de l'Avertissement qui précède.

Cette mise en équation ne correspond évidemment pas avec le raisonnement de Huygens. Il avait considéré en 1658 la courbe (BRVC de la Fig. 4 de la p. 348 du T. XIV) provenant du développement sur un plan de la surface courbe d'un onglet cylindrique: il avait constaté que l'ellipse qui limite cet onglet est changée de cette façon en une courbe — Roberval (voir à la p. 108 des „Divers Ouvrages de Math. et de Phys. par MM. de l'Ac. R. des Sciences" de 1693, ses „Observations sur la composition des mouvements etc.") l'appelle la „compagne de la cycloïde" — pour laquelle (dans la figure nommée du T. XIV) HR = arc BK (l. 10 d'en bas de la p. 348), ce qui correspond dans la présente Fig. 25 à l'égalité de x ou *ug* avec l'arc *bi*. Dès que cette dernière égalité a été démontrée dans le cas de la Fig. 25, il apparaît que la ligne en question est la même que celle considérée en 1658 (à laquelle Huygens ne donnait pas encore en ce temps le nom de „linea sinuum").

Ceci ne veut pas dire que dans la présente Fig. 23 la ligne tracée par le point B sur le cylindre soit une ellipse. En effet dans l'équation $y = R \cos \frac{x}{R}$ la longueur R est le *diamètre* du cylindre; tandis que dans le cas des Fig. 3 et 4 de la p. 348 du T. XIV on obtient la même équation $y = r \cos \frac{x}{r}$ (le plan qui coupe le cylindre étant incliné à 45°; si l'angle d'inclinaison était β, on trouverait $y = r \operatorname{tg}. \beta \cos \frac{x}{r}$) où r représente le *rayon* du cylindre. Dans la présente Fig. 25 la demi-circonférence *bkta* correspond à la demi-circonférence BKN de la Fig. 23; mais la circonférence à *rayon* R est *bFr* et c'est sur elle que se trouve le point *i*.

[5]) Les triangles *aui* et *akb* sont congruents, puisqu'ils sont rectangles et qu'on a de plus $ai = ab$ et $au = ak$. D'où résulte à la fois que le prolongement de *ak* passe par le point *i* et que $iu = bk$.

[6]) L'égalité des arcs *bi* et *bk* résulte de l'égalité des angles *bai* et *bak*, et du fait que le rayon du quart de circonférence *biFr* est le double de celui de la demi-circonférence *bka*.

[7]) En comparant (Fig. 25) la courbe *bgq* ou $y = R \cos \frac{x}{R}$ (note 4) avec la parabole *bvr* à demi

Spatium *bg=qab* eſt æquale quadrato ab *ab* [1]).

Curva *bg=q* eſt æqualis curvæ dimidiæ Ellipſis *ahb* poſita *eh* potentiâ dupla ad radium *ae* [2]).

§ 3. Quæcunque fuerit longitudo filorum AB [Fig. 23 et 26] ſemper motus iſo-

---

latus rectum *ab* ou R, dont il est aussi question dans la Fig. 24 et le § 1, et qui a pour équation $y = R - \frac{x^2}{2R}$, on voit que la différence des ordonnées pour une même valeur de x (PG dans la Fig. 23) est $R\left(\cos\frac{x}{R} - 1\right) + \frac{x^2}{2R}$, ou $\frac{1}{R^3}\left[\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!\,R^2} + \frac{x^8}{8!\,R^4}\cdots\right]$, ce qui est inférieur à $\frac{x^4}{4!\,R^3}$, donc aussi à $\frac{1}{1000}R$, pour $x = \frac{\pi}{8}R$, valeur considérée par Huygens dans le § 1.

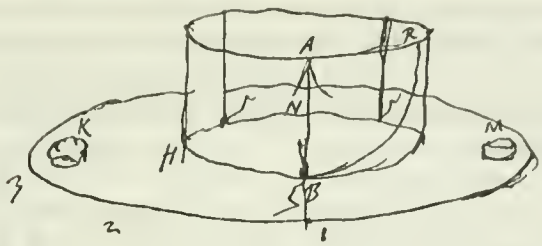
Comment est-il arrivé à cette conclusion? Nous nous proposons de revenir sur cette question purement mathématique dans un des Tomes suivants.

[1]) On a en effet $\int_0^{\frac{1}{2}\pi R} R\cos\frac{x}{R}\,dx = R^2$. Voir sur la démonstration de Huygens les deux premières lignes de la p. 349 du T. XIV et comparez, sur cette quadrature, le dernier alinéa de la p. 52 du T. I (lettre de Mersenne à Huygens de janvier 1647); Mersenne parle (sans le nommer) d'un résultat obtenu par Roberval; voir la p. 95 du supplément de 1922 par C. de Waard à l'édition des Oeuvres de Fermat par Tannery et Henry (Paris, Gauthier-Villars).

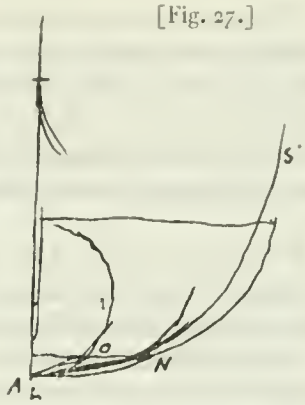
[2]) On peut vérifier de la manière suivante l'exactitude de ce résultat. La longueur de la moitié de l'ellipse qui a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, où $a > b$, est $S = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$, où $\frac{x}{a} = \sin\varphi$ et $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. Dans le cas considéré par Huygens $a = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ et $b = \frac{1}{2}R$. On a donc: $S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2 - \sin^2\varphi}\,d\varphi$, ou bien $S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \cos^2\varphi}\,d\varphi$, ou encore $S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \sin^2\psi}\,d\psi$, en prenant $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Quant à la longueur de l'arc considéré de la sinusoïde $y = R\cos\frac{x}{R}$, elle est $L = \int_0^{\frac{\pi R}{2}}\sqrt{1 + \sin^2\frac{x}{R}}\,dx$, ce qui se réduit également, en posant $\frac{x}{R} = \psi$, à la valeur $R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \sin^2\psi}\,d\psi$. On a donc $L = S$. C. Q. F. D.

Rappelons, sans tâcher pour le moment de reconstituer le raisonnement de Huygens — voir la fin de la note 7 de la p. 529 — que Pascal dans la lettre de 1659 de „A. Dettonville" à Huygens (notre T. II, p. 307, 397) réduit „la dimension des lignes de toutes sortes de roulettes... à des lignes eliptiques".

[Fig. 26.]



[Fig. 27.]



chronus eſt per parabolam BR cylindro applicatam cujus $\frac{1}{2}$ latus rectum AB [3]).

Pondere orbis BHN aut annuli aucto, idem tempus recurſus permanet [4]). Sed extenſo orbe vel circumferentia penſili pondus continente lentior evadit motus ſecundum rationem diametrorum [5]). Ponamus duplam.

---

[3]) Cette affirmation n'est pas corroborée, comme précédemment (fin du § 1 et note 7 de la p. 529) — et comme Huygens aurait sans doute pu le faire ici aussi —, par une évaluation numérique de la différence des ordonnées, pour une même abscisse donnée, de la ligne décrite sur le cylindre par le point B, et de la parabole nommée, appliquée au cylindre. Lorsqu'on développe le cylindre sur un plan, la ligne décrite par B devient une courbe à équation $y = \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \frac{x}{R}}$, l étant la longueur des fils, et R, comme précédemment, le diamètre du cylindre. Les axes sont choisis comme dans la note 7 nommée. L'équation de la parabole est $y = l - \frac{x^2}{2l}$. Le développement en série fait voir que la différence des ordonnées des deux courbes (la première moins la deuxième) pour une même valeur de x a pour premier terme $\frac{x^4}{2l}\left[\frac{1}{3R^2} - \frac{1}{4l^2}\right]$. Le terme en x^2 disparaît donc comme dans le cas $l = R$ considéré dans la note 7, de sorte que le mouvement est toujours approximativement isochrone, ainsi que Huygens le dit.

[4]) À cause, peut-on-dire, de la proportionnalité de la pesanteur et de la masse: comparez la note 7 de la p. 45 qui précède, et la note 3 de la p. 578 qui suit.

[5]) Puisque le moment d'inertie I du cercle mobile augmente dans la proportion n^4 lorsque le rayon devient n fois plus grand (l'épaisseur et le poids spécifique restant les mêmes), que le moment des forces agissant sur le cercle pour un angle de torsion donné devient en même temps, comme le poids, n^2 fois plus grand, et que la période est proportionnelle à la racine carrée du quotient de I par le moment des forces pour un angle de torsion donné.

Huygens, dans la démonstration du texte qui suit, assimile les oscillations considérées autour de l'axe vertical à des vibrations linéaires, comme nous l'avons déjà dit à la p. 512 de l'Avertissement qui précède. Voir encore à ce sujet la note 4 de la p. 567 qui suit.

Fit itaque motus ponderum per ſimiles arcus duplo major, poſita eadem altitudine aſcenſus. unde tempora ſunt in cycloidibus, ubi, in eadem altitudine, arcus ſunt dupli [Fig. 27]. quod ut fiat debent ſubtenſæ LO, LN in circumferentijs circulorum genitorum eſſe in ratione dupla. unde diametri in quadrupla. diametri autem bis ſumptæ faciunt pendula iſtarum cycloidum; quorum igitur longitudo rationis quadruplæ, facit recurſuum tempora rationis duplæ.

Ponderibus minoribus K, M, ponderi orbis additis [Fig. 26] [1]), poterimus ea verſus centrum promovendo, accelerare non nihil recurſuum tempora; ſed ſciendum longe minus in hoc ipſorum eſſe momentum quam in circulis ſimpliciter ſuſpenſis e centro [2]).

Quadruplicando fila AB, fit motus duplo lentior, ut in pendulis [3]). Si duplicetur diſtantia filorum AB à centro, manente eodem annulo, erunt tempora ut in cycloidibus, ubi, in æqualibus arcubus, altitudines ſunt quadruplæ. unde efficitur tempora hic fore ſubdupla priorum [4]).

[Fig. 28.]

§ 4. Le 17 dec. 1683 j'ay portè a Van Ceulen l'horloger le modelle que j'avois fait de ce mouvement de Pendule Cylindrique, pour changer de cette facon les 2 horloges que je luy avois fait faire pour la Compagnie des Indes Orientales [5]). J'avois priè mon frere de Zeelhem de venir avec moy: parce que ledit horloger s'imaginoit d'avoir trouvè la meſme choſe que moy [6]), apres m'en avoir ouy dire quelque choſe en gros. Mais ayant vu le modelle il avoua que ce qu'il avoit modelè n'y reſſembloit nullement.

§ 5. 10 Jun. 1684.

Optima ratio horum ſi filis longis utamur [Fig. 28] puta $9\frac{1}{2}$ vel 38 pollicum quæ extremo annuli margini illigentur, atque ita circulare pendulum fiat; axe annuli in foramen ſtabile immiſſo propter navis motum.

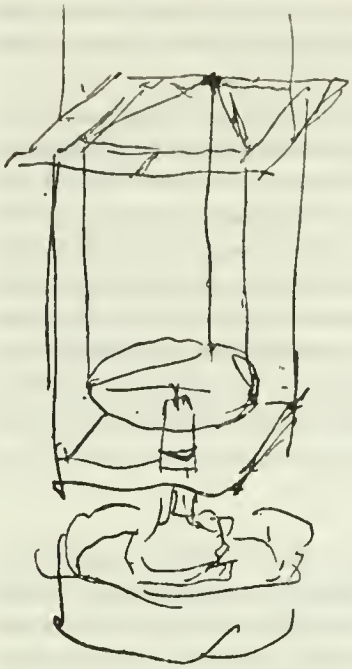
---

[1]) Comparez la note 2 de la p. 28 du T. XVII.

[2]) Dans les deux cas le moment d'inertie I varie par hypothèse de la même quantité. Mais le moment des forces est bien plus petit lorsque le cercle n'est suspendu qu'à un seul fil tordu. Le $\frac{\partial T}{\partial I}$ (où T est la période), qui est inversement proportionnel, comme T elle-même, à la racine carrée du moment des forces pour un écart angulaire donné, est d'autant plus grand que ce moment est plus petit.

[3]) Cæteris paribus, le moment des forces est proportionnel à tg α (note 1 de la p. 528), c.à.d. à fort peu près à la longueur des fils. Et la période est inversement proportionnelle à la racine carrée du moment des forces.

[Fig. 29.]



§ 6[7]).

que l'on ne doit pas demander ces mouvements [Fig. 29] dans une derniere egalitè, mais a peu pres.

que l'invention de la detente ſans manquer eſt de grande importance [8]) qui peut etre appliquée au pendule triangulaire [9]).

que ces meſſieurs les directeurs de la Compagnie des Indes ne devroient pas regarder a quelque peu de depenſe, pour arriver a cette invention ſi utile [10]).

Tourner les horloges ſaits pour en faire des pendules triangulaires [11]). l'une au moins. et laiſſer l'autre comme elle eſt pour la grande agitation du vaiſſeau.

Reſolutiën van de Bewinthebberen van de Ooſtindiſche Comp.ie ter Camer tot Amſterdam.

Donderdag den 27sten Julij 1684 . . . . Den Heer Burgemeeſter Hudde heeft ter vergaderingh geproponeert, dat ſijn Ed.t bij reſolutien van den 31sten December 1682

---

4) Le moment des forces étant doublé, la période sera diminuée dans le rapport $1/\sqrt{2}$.

5) Comparez la p. 513 de l'Avertissement qui précède.

6) Comparez la note 9 de la p. 32 qui précède.

7) Le „§ 6" est emprunté à la p. 192 du Manuscrit F. La p. 193 porte la date du 2 mai 1684. Toutefois il paraît probable que le § 6 date de fin 1685: comparez le 4ième alinéa avec le premier alinéa de la p. 539.

8) Nous ne savons pas exactement de quelle invention il s'agit. Il semble bien que Huygens parle ici de la construction d'un remontoir (comparez l'expression „ontsluijtingh", p.e. dans la note 2 de la p. 17 qui précède). Il est en effet presque certain que les horloges à „pendulum cylindricum trichordon" construites par J. van Ceulen ont été des remontoirs à ressorts, remarque qui s'applique aussi aux horloges à ressort spiral qui furent changées en elles (l. 7 de la p. 510). Comparez la note 11.

9) Nous savons en effet que l'horloge à pendule triangulaire qui fait son apparition en 1685, était un remontoir: voir p.e. la note citée dans la note précédente, et la Pièce IV qui suit (p. 539).

10) Comparez les p. 509—511 de l'Avertissement qui précède.

11) Cette remarque porte à croire (comparez la note 8) que l'agencement des roues des horloges à „pendulum cylindricum trichordon" ne différait pas énormément de celui des roues des horloges à pendule triangulaire qui leur succédèrent. Comparez le deuxième alinéa de la p. 513.

en 28 Februarij 1684 geauthoriſeert ſijnde, om met den Heer Huijgens en eenen van Ceulen te corresponderen over het uijtvinden en maeken van ſeer accurate horologien, die van malkanderen in een etmael geen ſecunde ſouden verlopen, waerdoor ſoude cunnen werden uijtgevonden het Ooſt en Weſt en daer aen te ſpenderen een à twee duijſent gulden, ſijn Ed.t dat werck ſoo veel in hem is geweeſt heeft voortgeſet, ſonder dat evenwel tot noch toe het gewenſchte ooghwit is bereijckt; dat ſijn Ed.t beſt geacht heeft, alvoren verder te continueren, hier van kenniſſe aen deſe vergaderingh te geven, item voor te ſtellen, of de ſelve ſoude cunnen goetvinden te doen uijttellen aen den voornoemden van Ceulen, een man van weijnigh vermogen [1]), twee honderd ſilvere ducatons, op reeckeningh van ſijnen gedanen arbeijt; waarop ſijnde gedelibereert, is verſtaen den Heer Burgemeeſter Hudde voor ſijne gedane communicatie te bedancken, ſijn Ed.t te verſoecken, om conform de reſolutien hier boven geallegueert, den Heer Huygens te verſoecken en te animeren, om in ſijnen goeden ijver te willen continueren; wijders aen den voornoemden van Ceulen toe te laten komen de voorſz. twee hondert ducatons, om ware het doenlijk deſe dienſtige ſaeke tot perfectie te brengen.

Donderdagh den 30 Auguſt: 1685... Den Heer Burgemeeſter Hudde de vergaderingh voorgedragen hebbende, dat den Heer Huijgens preſenteert [2]) perſonelijk een preuve in zee te nemen van de accurate horologien bij ſijn Ed.t uijtgevonden, en met voorkenniſſe van deſe vergaderingh gedaen maeken, of deſelve de bewegingen vande zee kunnen uijtſtaen, waer door als dan gemeijnt werd, dat ſoude cunnen werden uijtgevonden het Ooſt en Weſt, ſoo als daer toe de reſolutien van den 31 December 1682, 28 Februarij, en 27 Julij 1684 tenderen, is de voorſz. propoſitie en preſentatie voor ganſch aengenaem opgenomen, en is dienvolgende verſtaen dat den voornoemden Heer Huijgens daer toe ſal werden gepreſenteert het galjot van Comp.ie alhier, en den perſoon van Barent Fockes [3]), om het ſelve te voeren, die ſigh ſal poſteren en ſeijlen daer het ſijn Ed.t goetvinden ſal; werdende de Heeren van de Equippagie verſocht en geauthoriſeert, om het daer toe bequaem te maeken. En den gemelten Heer Burgemeeſter Hudde om den horologie maecker van Ceulen, die het werck heeft gemaeckt, te laten toekomen voor de tweede mael twee hondert ducatons, mitsgaders aen de Smith, die daer toe heeft geholpen ſeventigh gulden, met

---

[1]) J. van Ceulen (voir sur lui la note 4 de la p. 509 qui précède) n'était nullement dépourvu de biens. Mais il était sans doute „een man van weijnigh vermogen" en comparaison avec les riches négotiants d'Amsterdam.

[2]) Dans la lettre inconnue du 29 août, dont il est question dans la lettre de Hudde à Huygens du 3 septembre: voir la p. 24 du T. IX.

[3]) Mentionné aussi aux p. 27, 31 et 579 du T. IX.

verder verſoeck op den welgemelten Heer Hudde om hier over het opſicht en directie te blijven houden, ten eijnde dat deſſein tot verlightinge van de zeevaert ten goeden effecte magh werden gebraght.

Donderdagh den 6 September 1685 . . . . De Heer Burgemeeſter Hudde ter vergaderingh gecommuniceert hebbende ſeeckere miſſive door den Heer Huygens aen Sijn Ed.t geſchreven [4]), waer bij den ſelven Heer Huijgens verſocht, dat deſe vergaderingh hem in de aenſtaende toght om preuve te nemen van de horologien bij ſijn Ed.t uijtgevonden, waer door te vinden ſoude weſen het Ooſt en Weſt breder in de reſolutie van den 30 des voorleden maents en andere meer vervat, ſoude willen toevoegen Mr. de Graef [5]) of iemant anders in die materie ervaren, tot ſijn Ed.s aſſiſtentie en getuijge, is verſtaen den welgemelten Heer Burgemeeſter te verſoecken en te authoriſeren, om den voorn. de Graef of een ander daer toe te diſponeren, ſijnde wijders ſijn WelEd.t voor de gedaene openingh bedanckt.

---

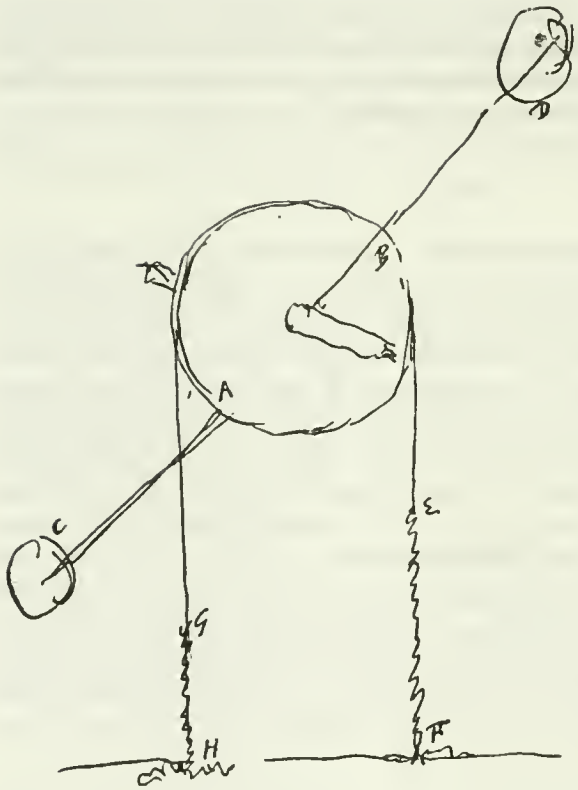
[4]) Nous ne connaissons pas cette lettre.

[5]) Il s'agit de Johannes de Graaf: voir la Pièce IV qui suit (non pas d'Isaak de Graaf — T. IX, p. 27, note 3 —, comme nous l'avons déjà remarqué dans la note 1 de la p. 266 du T. IX).

III.

PREMIER PROJET DE 1683 OU 1684 DU „BALANCIER MARIN PARFAIT" DE 1693.

[Fig. 30.]



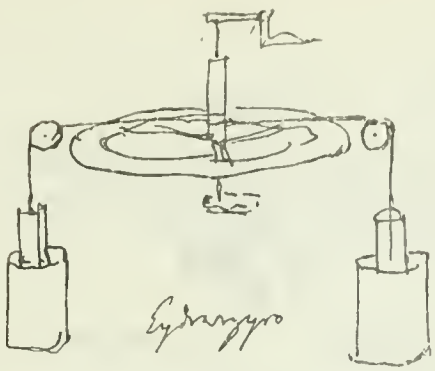
A [1]). Aliud genus motus iſochroni orbis AB [Fig. 30] ſuper axe horizontali mobilis affixis ponderibus C, D. Orbi filum circumjectum cui appenduntur catenulæ æquales EF, GH planum HF ſemper contingentes. Indito motu, creſcit pondus catenulæ alterius ſuper reliquam idque in eadem ratione qua circumferentia orbis verſatur. Unde incitatio pro ratione diſtantiæ a quiete, atque hinc recurſuum minorum majorumque æqualitas [2]). Idem fiet ſi loco catenularum appenſi fuerint cylindri tenues liquido immerſi ut argento vivo vel oleo &c.

Sed motus ponderum ſuper axe horizontali non æque liber eſt ac in ſuſpenſione. Poſſet orbis gravitans eſſe horizontalis et ex filo pendens [Fig. 31], inſerne axem foramini inſertum habens, ſila vero bina axi circumvoluta, ac per orbiculos ad cylindros euntia de quibus dictum.

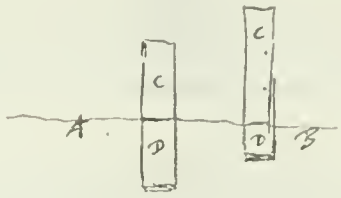
---

[1]) La Pièce A est empruntée à la p. 181 du Manuscrit F qui suit les pages mentionnées dans la note 1 de la p. 527 qui précède. L'idée de faire usage de chaînes pendantes venant s'appliquer sur une table et exerçant par conséquent une force variable se trouve déjà dans le projet de

[Fig. 31.][3])



[Fig. 32.]



[Fig. 33.]

B[4]). AB [Fig. 32] ſurface du vif argent ou de l'eau. CD un corps cylindrique qui ſurnage librement avec la partie D enfoncée. Si on le fait baiſſer d'un pouce, (ou autre eſpace), il peſe autant vers en haut qu'il peſe vers le bas, quand on le hauſſe d'un pouce. Et le meſme arrive ſoit que la liqueur ſoit comme une mer [Fig. 32] ou qu'elle ſoit enfermée dans un vaiſſeau cylindrique [Fig. 33]. Et les forces de ces peſanteurs croiſſent en baiſſant ou hauſſant le dit corps, en meſme raiſon que celles d'un reſſort comprimè, c'eſt a dire en raiſon des enfoncements ou elevations. De ſorte que c'eſt icy un reſſort qui n'eſt pas ſuject aux alterations du froid et du chaud, comme ſont tous les autres.

EF [Fig. 34] eſt un rectangle de fil de fer au quel la chorde eſt attachee en H et G. HN fer roide. K, L, ſont des poulies. Ou au lieu de poulies ce peuvent eſtre des bras d'une petite verge horizontale appuiée au milieu ſur un cuneus, comme les balances. Ou ſeulement des poulies appuiées ſur un cuneus au lieu d'axe.

1659 de Huygens d'une horloge à pendule conique (T. XVII, p. 88). On y rencontre également les „cylindri tennes liquido immersi".

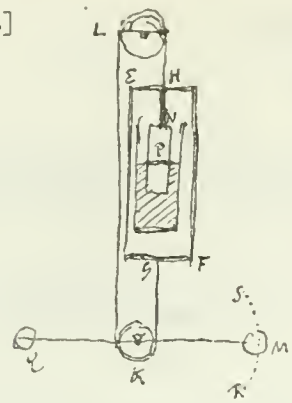
Voyez aussi sur ces derniers de la p. 556 qui suit.

[2]) La proportionnalité de la puissance mouvante ou „incitatio" avec l'écart, doit entraîner l'isochronisme des oscillations: comparez les 501 et 509 de l'Avertissement. On voit aisément que, si le balancier est en équilibre dans la position horizontale, le moment résultant qui tend à le ramener dans cette position, est en effet proportionnel à l'écart angulaire. Attendu que le bras de levier est constant, on peut d'ailleurs interpréter ici le mot „incitatio" soit comme un moment soit comme une force (comme dans la Pièce II à la p. 496 qui précède).

[3]) On lit dans la figure: „hydrargyro".

[4]) La Pièce B est empruntée à la p. 5 r. du Manuscrit G, datant sans doute de 1688, puisque la p. 8 r. porte la date du 20 décembre 1688.

[Fig. 34.]



[Fig. 35.]

Angulus librationis cunei in centro cylindri filum evolventis [Fig. 35].

Cum M deprimetur [Fig. 34], cogetur defcendere cylindrus P et amplius mergi in hydrargyrum. Qui ergo cylindrus afcendere nitetur, et impreffo motu in pondera MQ ea ultra fitum horizontalem impellet, eoque ex hydrargyro attolletur ultra æquilibrium cylindrus P, atque ita denuo defcendet et volvendo orbem K deorfum coget M.

IV.

L'APPLICATION DU PENDULE TRIANGULAIRE, DATANT DÉJÀ DE 1671, À UNE HORLOGE MARINE CONSTRUITE VERS 1685, CETTE DERNIÈRE ETANT UN REMONTOIR À RESSORTS.

Resolutiën vande Bewindhebberen van de Oostindische Comp.ie ter Camer tot Amsterdam.

Maandagh den 17 September 1685 . . . . Den Heer Burgemeester Hudde ter vergaderingh gecommuniceert hebbende hoe en op wat wijse is uijtgevallen de preuve bij den Heer Huijgens met Comp.s galjot te water genomen vande horologien bij sijn Ed.t geinventeert [1]), en dat 't selve sal dienen te werden vervat, is verstaen den welgemelten heer Hudde voor de gedaene openingh te bedancken, & sijn Ed.t te versoecken conform voorige authorisatie in de sorge over dat werk te willen continueren.

La suite de cette Pièce — comparez le dernier alinéa de la p. 513 qui précède — est la traduction d'une partie de l'Instruction de Huygens de décembre 1685 pour Johannes de Graaf [2]) et Thomas Helder [3]). Comme le T. XVII contient une version du „Kort Onderwijs" de 1665, nous nous bornons ici à ce qui se rapporte directement à l'horloge.

I. On prendra dans le navire deux des nouvelles horloges à pendule, etc.

II. Pour suspendre les horloges dans le navire, on réservera un petit coin du salon ou d'un autre endroit commode et sec, et on le guarantira de la poussière en calfeutrant les fentes, puisque les horloges sont ouvertes en bas. Il doit y avoir là une fenêtre et une petite table où l'on puisse mettre et démonter les horloges lorsqu'il en est besoin.

III. On trouve ci-contre [Fig. 36] la figure de l'horloge et des châssis de fer dans

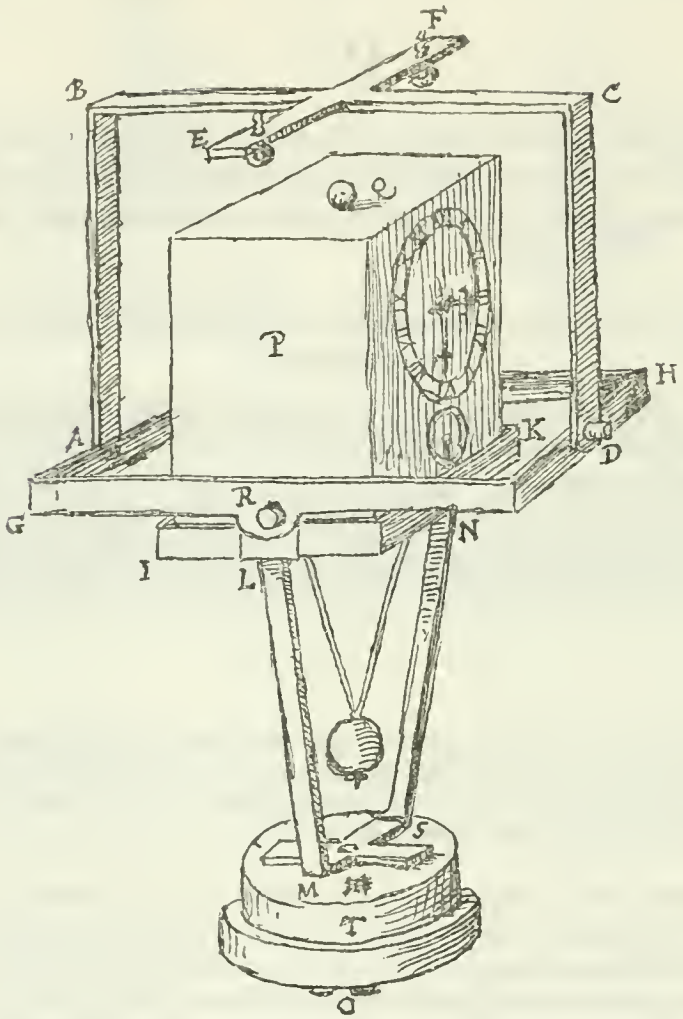
---

[1]) Il s'agit de l'expédition du Zuyderzee; comparez la p. 510 de l'Avertissement, et la Pièce II qui précède.

[2]) Comparez sur J. de Graaf la note 5 de la p. 535.

[3]) T. IX, p. 55—76. Th. Helder mourut à bord du vaisseau Alcmaer pendant l'expédition de 1686—1687 (T. IX, p. 37).

[Fig. 36.]



lesquels elle est suspendue. Cette figure permet d'indiquer comment il faut attacher l'horloge au vaisseau, et ce qu'il faut observer à cet égard.

ABCD est une anse de fer, avec une croix à la partie supérieure, puisque EF est perpendiculaire à BC. Le plus grand des deux châssis est GH, mobile autour des axes A et D qui traversent les extrémités inférieures de l'anse. Le plus petit est IK tournant à l'intérieur de GH autour de deux axes opposés R dont on n'en voit qu'un. À ce châssis IK sont attachés en-dessous, dans le plan vertical passant par les axes R, les fers LM, NS convergeant vers le bas et y portant ensemble une vis verticale également dirigée vers le bas. Sur cette dernière on enfile le poids T ayant au milieu un

large trou; et on le maintient immobile à l'aide d'une petite plaque et d'un écrou O. Ce poids eſt d'environ 40 livres; plus il eſt lourd, mieux cela vaut. L'horloge P n'eſt placée dans le châſſis IK qu'après que ce dernier a été attaché au plaſond à l'aide de l'anſe. Cela ſe fait avec les vis E et F, de telle manière que le bras EF ſoit dirigé ſuivant la longueur du vaiſſeau; d'où réſulte que le plan de la croix EFBC eſt horizontal ou à peu près lorſque le navire eſt à l'ancre, et que l'horloge, lorſque le navire penche d'un côté, ne riſque guère de ſe heurter contre les bras BA et CD. Il faut ſurtout avoir égard à ce que cette croix ſoit toujours et partout bien en contact avec le plafond; s'il eſt néceſſaire, on peut mieux le fixer en plaçant des coins ou autres petits morceaux de bois au-deſſus des extrémités B et C. Sinon, l'horloge prend par la force de ſon pendule un petit mouvement oſcillatoire, qui, bien que souvent inviſible, accélère ſa marche et la rend abſolument irrégulière.

IV. Pour donner à l'horloge la poſition verticale, on déplacera et tournera le plomb inférieur M (ce qui peut aiſément ſe faire à cauſe de la largeur du trou central) juſqu'à ce qu'une petite boule ou bille Q qu'on laiſſe tomber ſur la face ſupérieure ne roule pas en bas. Après avoir fait cette expérience ſur terre et marqué ſur le plomb T les lignes qui coïncident avec la croix MS, on aſſurera la poſition verticale dans le navire en viſſant le plomb à l'horloge comme ces lignes l'indiquent.

Le pendule conſtruit en forme de triangle et portant un plomb en bas ne ſera accroché qu'après que l'horloge aura été placée dans le châſſis, parce qu'autrement il riſquerait d'être courbé ou briſé.

Après que l'horloge a été miſe en mouvement, on ne déplacera ni ne tournera plus le plomb inférieur, et on n'augmentera pas ſon poids.

. . . . . .

XVI. Pour faire accorder l'horloge avec l'heure du ſoleil.

. . . . . Après quoi l'on avancera ou retardera [les aiguilles de] l'horloge; ſans cependant déplacer l'aiguille des ſecondes, parce que celle-ci doit coïncider avec le chiffre 60 au moment où ſe produit le déclenchement et le remontage du petit reſſort [1]).

. . . . . retarder l'horloge (de 30′6″). À cet effet, retardez d'abord l'aiguille des minutes de 30′, arrêtez enſuite le pendule durant 6 ſecondes que vous pourrez évaluer, ſoit ſimplement en comptant, ſoit en regardant le pendule, auquel on peut laiſſer un très petit mouvement ſans que l'aiguille des ſecondes avance. Lorſque les 6 ſecondes ſeront écoulées, rendez au pendule ſon mouvement ordinaire.

---

[1]) Ces passages (N°s XVI et XXVII) font voir que l'horloge était un remontoir, comme nous l'avons déjà dit à la p. 514 qui précède.

Si l'horloge avait dû être avancée de 30′6″, il aurait fallu avancer l'aiguille des minutes de 31′, c.a.d. une de plus que 30, et arrêter le pendule durant 54″.

XXVII. Règles ſur la conduite des horloges. L'aiguille des ſecondes tourne avec une parfaite régularité. Lorſqu'elle a fait une révolution entière au bout d'une minute, la roue de rencontre, à laquelle elle eſt attachée, eſt animée d'une nouvelle force par un double déclenchement, comme diſent les horlogers. Le premier déclenchement a lieu lorſque l'aiguille atteint le chiffre 30, le deuxième au chiffre 60. En remontant l'horloge, on aura la précaution de ceſſer le remontage lorſque l'aiguille des ſecondes s'approche du chiffre 30 et ſurtout lorſqu'elle va atteindre le chiffre 60. Ceci pour que le déclenchement et le remontage du petit reſſort ne ſe produiſent pas avec trop de véhémence, ce qui donnerait lieu à des arrêts trop bruſques de ſorte que ce reſſort ſerait trop ſecoué [1]).

XXVIII. Vers la fin du remontage on tournera la clef uniformément et aſſez lentement, pour qu'à la fin l'arrêt de la fuſée ſe produiſe ſans choc, car ſinon l'effort portera ſur les dents des roues, qui riſqueront d'être déformées ou briſées [2]).

XXIX. En ſuſpendant l'horloge on veillera à ce que les deux plombs ſoient adaptés l'un à l'autre et à la croix de fer inférieure comme ils l'étaient ſur terre, c.a.d. ſuivant les ſignes ou raies qu'on y a faits.

XXX. Lorſqu'on veut ôter l'horloge du châſſis pour y pratiquer quelque changement, il faut d'abord décrocher le pendule et le placer dans ſa caſe; c'eſt après la réintroduction de l'horloge dans le châſſis, qu'on doit de nouveau l'y accrocher, ce qui ſe fait le plus aiſément en ouvrant le volet à couliſſe de l'horloge.

XXXI. Les petits plombs des pendules y ont été fixés à coups de marteau, de ſorte que lorſqu'on veut faire avancer ou retarder le pendule, cela doit être fait ou bien par le raccourciſſement ou l'allongement des fils par le moyen de la vis, ou bien en montant ou baiſſant le petit plomb [3]) à l'aide d'un martelet. On indiquera d'abord par une raie ſur l'axe la première poſition.

XXXII. Lorſque l'horloge a été de nouveau ſuſpendue et que le pendule y a été attaché — ou bien lorſqu'on a oublié de la remonter de ſorte qu'elle s'eſt arrêtée — et qu'on veut de nouveau la mettre en train, on la remontera d'abord en tout ou en partie. Alors on mettra le pendule en branle, et pendant qu'il ſe meut, on reculera doucement l'aiguille des ſecondes en y appuyant le doigt près du centre. A chaque

---

[1]) Voir la note 1 de la p. 541.

[2]) Le N° XXVIII fait voir que l'horloge était pourvue d'une fusée (note 2 de la p. 17). Comparez le N° XXXIV qui suit.

[3]) Le singulier indique qu'il s'agit du poids globulaire qu'on voit dans la Fig. 36; non pas de petits poids curseurs comme il y en avait jadis (Fig. 8 et 9 de la p. 14).

coup du pendule on entendra alors la roue de rencontre reculer d'une dent. On continuera jusqu'à ce qu'on entende le demi-déclenchement ou le déclenchement total. En ce moment on doit laisser l'aiguille des secondes libre. Alors l'horloge continuera sa marche.

Et si par hasard, en appuyant trop, en sens inverse de la marche, sur l'aiguille des secondes, on l'a quelque peu tournée par rapport à son axe, de sorte que le déclenchement total et le remontage de la roue de rencontre ne se produisent pas au moment où l'aiguille atteint le chiffre 60, on la tournera de nouveau sur l'axe dans le sens de la marche, en arrêtant doucement d'un doigt la roue de rencontre qu'on peut aisément atteindre par en-dessous.

XXXIII. Lorsqu'on est obligé de démonter l'horloge, il faut surtout songer à détendre d'abord le ressort du grand barillet; c'est ce qu'on fait en serrant son axe dans un étau à main et en levant le cliquet de l'autre main. Si l'on négligeait de le faire, il est à peu près certain qu'il se produirait quelque rupture.

XXXIV. Dans cette détente on laisse toutefois au grand ressort un peu de force afin que la chaîne ne se déplace pas sur le barillet. Si elle venait néanmoins à se déplacer, il faut veiller à ce que la chaîne vienne s'enchâsser, dès le commencement du remontage, dans les raies de la fusée; à cet effet il faut de la main déplacer de nouveau quelque peu la chaîne sur le barillet. Une fois bien placée, elle restera en position.

XXXV. On se pourvoira non seulement de l'étau à main déjà mentionné, mais aussi d'une pince, d'une tournevis, de quelques limes, d'un marteau et d'autres ustensiles d'horloger de ce genre, ainsi que de fil de soie pareil à celui par lequel sont suspendus les pendules. Lorsqu'on a renouvelé les fils — ou un seul fil — d'un pendule, il faut fortement tirer sur eux; ce qu'il faut répéter, après l'accrochage du pendule, dans la direction nouvelle des fils. On prévient ainsi les glissements et les allongements qui pourraient autrement résulter du mouvement continuel des pendules [4]).

---

[4]) Les p. 207 et suiv. du Manuscrit F contiennent encore plusieurs remarques pratiques sur les horloges marines, p.e.

„Voor den horologer. Als de slaghen van de slinger kreupel gaen, kan men die gelijck maecken met het armtie [la fourchette] dat de slinger leijdt een klein weijnigh te verbuijgen, douwende het in sijn midden wat door nae de sijde daer het niet vroegh genoegh en loft. men kan dit doen sonder het horologe of slinger af te nemen, dewijl men van onderen met de vingers daer bij kan".

A propos des fils Huygens dit encore:

„Als men nieuwe draden aen de slinger gedaen heeft, of als men het horologe van

Resolutiën vande Bewinthebberen vande Oostindische Comp.ie ter Camer tot Amsterdam.

Maendagh den 1 Sept. 1687 .... Op de propositie ter vergaderingh gedaen, is goetgevonden en verstaen dat aen de heer van Zuijlichem [1]) in den Haagh zullen werden gesonden de Daghregisters ofte Journalen gehouden wegens de twee horologien, dewelcke op een van de Comp.s Schepen nae de Caep sijn gebraght geweest, mitsgaders 't geen verder tot sijn E. verlightinge soude kunnen dienen, sullende deselve Journalen [2]) derwaerts worden gebraght door de soon van den examinateur van der Graeff [3]), om gemelte sijn E. dienaengaende mede te dienen van mondelingh berigh[t] [4]).

Donderdagh den 29 April 1688 ... Gelesen sijnde een brief [5]) vande heer Christiaen Huygens, heere van Zelem [1]), rakende de vindinge van Oost en West, geschreven aen de heer Burgemeester Hudde, hebbende tot bijlaegen een deductie [6]) en Caerte [7]) tot deselve materie specterende, is nae deliberatie goedtgevonden de voorsz. brief, deductie, en Caerte te stellen in handen van de heeren van het Packhuijs om bij haar E. te werden geëxamineert, en de vergaderingh dienaengaende te dienen van consideratien en advis [8]).

---

nieuws opgehangen heeft, soo is goedt dat men een dagh of twee laet gaen eer men begint het daghelijks verschil te observeren want ick heb veelmaels bevonden dat het eenigen tijdt van nooden heeft, het zij om het recken of recht uijt spannen der draeden, eer het op sijn eenparighe gangh komt.

.... Sijden draed mede nemen. dicke roode strick sij [comparez les dernières lignes de la p. 16 qui précède]. geen sterck gedraeijde sijde, om dat te veel kan recken. Men soude sulcke stick sijde wel wat dicker konnen laten twernen.

.... De sijde draeden te lacken of met hars boven aen strijcken voor het doorschieten, voor 't gedreun van 't canon schieten".

[1]) Peu après la mort de Constantijn Huygens père, qui eut lieu le 26 mars 1687, Christiaan H. échangea le titre de „seigneur de Zuylichem" contre celui de „seigneur de Zeelhem".

[2]) Voir la note 3 de la p. 266 du T. IX.

[3]) C.à.d. par Johannes de Graaf, fils d'Abraham de Graaf.

[4]) Dans sa lettre du 1 septembre 1687 à son frère Constantijn (T. IX, p. 208) Huygens dit déjà qu'il attend les journaux de la première expédition au Cap de Bonne Espérance. Le départ avait eu lieu de 24 mai 1686.

[5]) C'est la lettre du 24 avril 1688, qu'on trouve à la p. 267 du T. IX.

[6]) Il s'agit du rapport qui occupe les p. 272—291 du T. IX.

[7]) Nous avons publié cette carte à la fin du T. IX.

Maendagh den 8 Augustij 1689 .... Gehoort sijnde het rapport en advis van de heeren van het Pakhuys bij resolutie van den 29 April des verleden jaars 1688 gecommitteert om t' examineren sekere brief van de heer Christiaen Huijgens heere van Zelem, nevens sekere bijlagen daer toe horende, rakende de vindinge van Oost en West, mitsgaders noch gelezen een brief van de heer de Volder, Philosophiae et Matheseos Professor tot Leyden, houdende eenige consideratien omtrent deselve materie [9]), is nae deliberatie verstaen, dat van d'horologien door de gemelte heer Huijgens tot dien eijnde geinventeert, een nader proef sal worden genomen, en deselve sodanigh als staen te worden verandert [10]), onder opsight van eenige personen hun des verstaende andermael nae Cabo de bonne Esperance overgebragt, wordende gemelte heeren van het Pakhuijs bij desen versogt, en cum plenâ geautoriseert, om het gunt voorz. is, en het geen daer toe verder mogt worden gerequireert, soo spoedigh als doenlijk is werkstelligh te maken.

Maendagh den 11 Decemb. 1690 .... Nogh is goet gevonden dat Johannes de Graef aangenomen voor ondercoopman, zijnde gedespicieert, en vervolgens aengestelt, om als observateur der Horloges naer de caep de goede hoop te gaen, mitsgaders van sijn verrightingen en observatien dieswegen, hem te koomen doen rapport, weder, bij sijn aencomste alhier, in voornoemde qualiteit van ondercoopman op de eerst vertrekkende scheepen sal worden geemployeert en aengestelt [11]).

---

[8]) Hudde fit part à Huygens de cette résolution dans sa lettre du 30 avril (T. IX, p. 294).

[9]) Le rapport de B. de Volder, du 22 juillet 1689, occupe les p. 339—343 du T. IX.

[10]) Il est plusieurs fois question dans les lettres qu'on trouve dans le T. IX de quelques corrections à apporter aux horloges de 1685, comme nous l'avons dit aussi à la p. 514 de l'Avertissement qui précède.

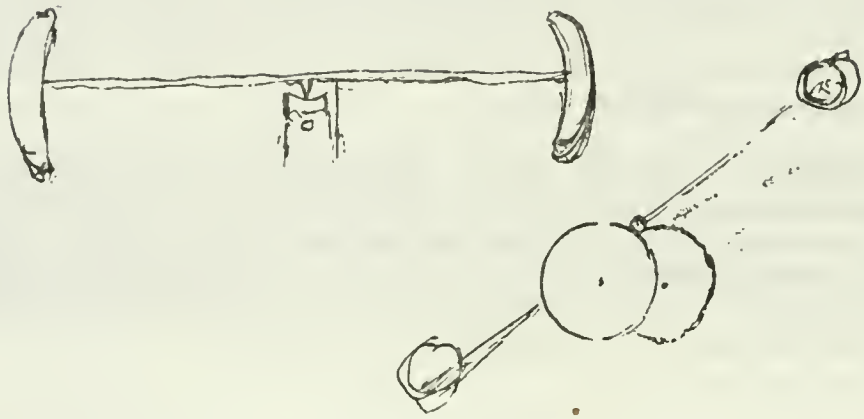
[11]) Hudde avait peut-être déjà communiqué cette résolution à Huygens avant que celui-ci lui écrivit la lettre du 14 décembre (T. IX, p. 567).

On peut voir dans le T. IX, que Huygens resta en correspondance avec J. de Graaf jusqu'au départ du vaisseau Brandenburg pour le Cap de Bonne Espérance, lequel eut lieu un des derniers jours de décembre 1690.

V.

LE „BALANCIER MARIN PARFAIT" DE JANVIER-FEVRIER 1693.

[Fig. 37.] [Fig. 38.]



A. Les Fig. 37 et 38, empruntées à la p. 165 du Manuſcrit H [1]), ſont voir qu'en janvier 1693 (ou peut-être déjà en décembre 1692) Huygens reprit l'idée du balancier de la Pièce III. Ces premières figures ne montrent pas les chaînettes pendantes servant à aſſurer dans la meſure du poſſible l'iſochronisme des oſcillations: on les retrouve dans la Fig. 40 qui ſuit. Les Fig. 37 et 38 indiquent que Huygens ſongeait à diminuer le frottement autant que poſſible. F. Marguet dans ſon „Hiſtoire générale de la Navigation du XVe au XXe ſiècle" [2]) écrit (p. 138—140) à propos de l'horloger Henry Sully (1680—1728) qui „était anglais, mais était venu s'établir en France, vers 1714" — nous avons déjà dit à la p. 520 que Sully a fort probablement profité des idées de Huygens —: „Sully fut plus heureux en trouvant le moyen de diminuer les frottements par une innovation qui devait faire fortune et être largement utiliſée par ſes ſucceſſeurs. C'était une découverte importante, puiſque, à l'époque de Sully, une montre ordinaire des mieux faites pouvait varier, au bout d'un certain temps, d'une demi-heure en vingt-quatre heures, par ſuite de l'augmentation des frottements [ceci ſemble exagéré]. Pour cela il appuyait l'extrémité de l'axe du balancier ſur deux roues de grand diamètre, ſubſtituant ainſi un roulement à un gliſſement. Ce n'eſt pas que cette invention [Fig. 39] [3]) ne lui fût conteſtée. Il avait reçu les conſeils de Newton [4]) et de Leibnitz et il avait été

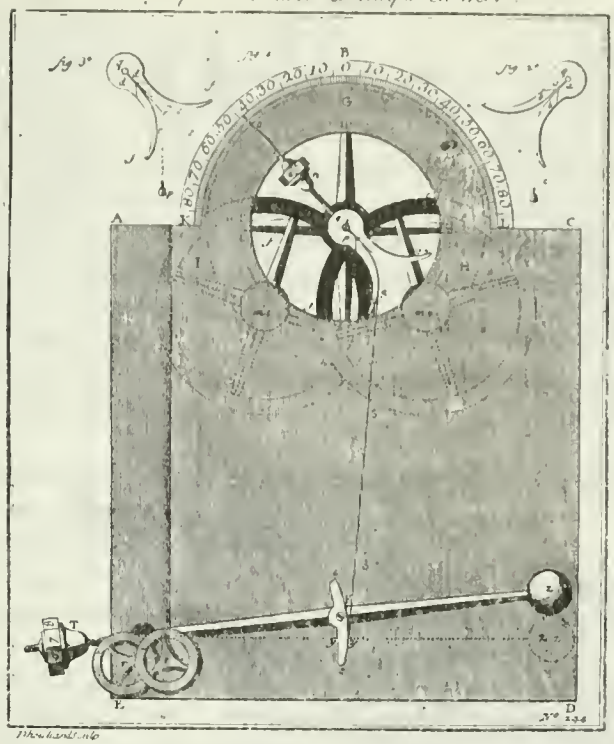
---

[1]) Les p. 155 et 172 sont respectivement datées „18 Dec. 1692" et „31 Jan. 1693".

[2]) Paris, Société d'Editions géograph. marit. et coloniales, 1931.

[3]) La Fig. 39 — où l'on voit que l'extrémité de l'axe du balancier I G H est appuyée sur deux „rouleaux" — est empruntée au T. IV (Paris, G. Martin etc., 1735) des „Machines et Inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences depuis son établissement jusqu'à présent;

[Fig. 39.]



en correſpondance avec J. Bernouilli et Graham de la Société Royale, célèbre par ſes horloges et ſes inſtruments de préciſion. Bernouilli lui dit qu'il avait déjà vu ſes rouleaux . . . Quant à Graham il lui écrivit qu'il avait vu le même ſyſtème dans une vieille horloge à pendule [5]). La Fig. 38 fait voir que Huygens a eu cette idée déjà en 1693 et rien n'indique qu'il l'ait empruntée à autrui. Il eſt vrai que nous ignorons s'il eſt ici vraiment original et s'il a conſtruit un modèle des rouleaux. Comparez encore la Fig. 81 de la p. 575.

---

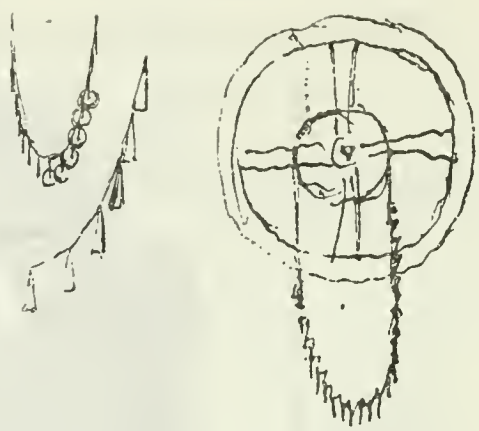
avec leur Description, par M. Gallon". Cette figure a été publiée aussi par Sully dans sa „Description abrégée d'une Horloge d'une nouvelle construction, pour la plus juste mesure de temps en mer", Paris, 1726, et reproduite par R. T. Gould „The marine Chronometer" de 1923 (déjà cité dans le T. XVII). On lit dans la figure originale: „Henricus Sully Londinensis invenit 1721 et fecit 1724". Gould nous apprend (p. 36) que l'horloge de Sully est conservée au Musée de la „Clockmakers Company at the Guildhall".

4) D'après R. T. Gould, p. 35, Newton et Wren attirèrent l'attention de Sully sur les horloges marines en 1703.

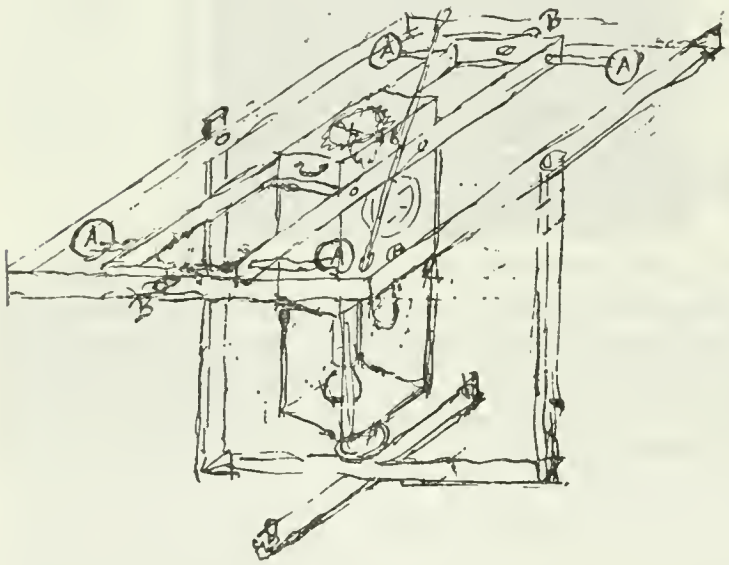
5) R. T. Gould dit (p. 37) que la lettre de Graham dans laquelle ce dernier assure avoir déjà vu la construction de Sully date de 1724. F. Berthoud cite cette lettre aux p. 365 et suiv. du T. II de son „Histoire de la Mesure du Temps par les Horloges" de 1802. Suivant Berthoud Graham

[Fig. 40.]

[Fig. 42.]



[Fig. 41.]



[Fig. 43.]

écrit: „Votre moyen de diminuer les frottemens sur les axes est fort bon. Je n'ai rien vu de semblable dans notre Art, qu'une seule fois, il y a plus de vingt ans: c'étoit le pivot supérieur du balancier d'une vieille horloge à balancier, qui étoit contenu et qui tournoit entre trois roues posées à cet effet. Il paroissoit que ces roues n'avoient pas été faites par le constructeur de l'horloge, et qu'une autre main les y avoit ajoutées". Dans sa réponse Sully écrit d'après Berthoud: „A l'égard de ma méthode pour diminuer les frottements sur les axes, j'ignorois qu'on l'eût employée dans l'exercice de notre Art; mais ayant vu une grande roue qui servoit à tourner une meule suspendue à-peu-près de la même façon, je sentis le bon usage que l'on en pourroit faire dans l'Horlogerie; je crois m'en être servi utilement dans cette machine. Si au

B[1]). 31 Jan. 1693.

Balancier marin parfait [Fig. 40, 41 et 42].

Aura les balancements lents, et egaux par demonſtration[2]), ne ſoufriront rien du mouvement du vaiſſeau. On ſcaura la difference journaliere, apres l'avoir embarquée, ſans obſervation.

Il n'y aura aucun reſſort. On la remontera à ſon aiſe, et ſans qu'elle arreſte.

Pourra ſurpaſſer la juſteſſe des pendules ordinaires de 3 pieds. La ſuſpenſion ſera ſure et invariable ſans fil de ſoie comme aux autres. Le mouvement du balancier n'en donnera point a l'horloge comme aux autres, qui gaſtoit le plus leur mouvement.

Le Chaſſi attaché au plancher d'en bas [Fig. 41]. Cercle d'heures devant, balancier derriere. On peut ſuſpendre l'horloge dans les chaſſis apres qu'ils ſont placez. Il aura pour cela une bande platte qui l'entoure en haut. Ira avec contrepoids qui pendront en bas, a double poulie[3]). Ainſi on pourra le remonter ſans qu'il s'arreſte, et ſera ſans fuſée[4]).

Les poids A attachez au chaſſis qui tient l'horloge, l'empeſcheront d'eſtre ſecouè par les coups de vague contre le vaiſſeau.

Tout l'ouvrage des roues doit eſtre grand et fort.

Peu de roues, quand il ne devroit aller qu'une heure ou deux, il en ſera plus juſte.

Roue de rencontre ſera horizontale au deſſous de l'axe du balancier. l'eguille des ſecondes peut bien eſtre au haut de l'horloge.

Le bas eſt une caiſſe quarrée dans la quelle les contrepoids trouvent ſur place. Et au deſſous de la quelle eſt attachè un poids pour tenir l'horloge droite, lequel poids n'a que faire d'eſtre grand comme cydevant.

Le chapelet [Fig. 42][5]) en dedans de l'horloge. les axes des roues ne l'empeſcheront pas s'ils ſont au milieu.

On reglera l'horloge a terre, eſtant ſuſpendue dans ſes chaſſis.

On pourra lever la plaque de deſſus et puis le balancier.

---

défaut de cette roue, appliquée à une meule, j'avois connu la vieille horloge, je m'imagine qu'elle m'auroit fourni les mêmes idées, lesquelles je n'aurois peut-être point eues, sans *quelques rencontres semblables* [nous soulignons]".

[1]) Manuscrit H. p. 172—179. Huygens écrivit ensuite à la p. 172: „Hiſce omnibus quæ uſque ad pag. 180 multo melius inventum eſt quod iſta pagina deſcribitur". Voir la Pièce VI à la p. 562 qui suit.

[2]) Voir la note 2 de la p. 537.

[3]) Voir la Fig. 8 de la p. 43 du T. XVII ou la Fig. 17 de la p. 71 du présent Tome.

[4]) Tandis que l'horloge construite vers 1685 (Pièce IV) était pourvue d'une fusée.

[5]) La démonstration dont il est question plus haut (note 2) s'applique évidemment aussi au cas du chapelet.

Balancier de 2 pieds, ſera un cercle avec une croix dedans [Fig. 43], afin de ne pouvoir plier aucunement.

Le cercle ſera *en boudin* [en marge: anneau quarrè pourra ſuffire] pour avoir moins de ſurface qui frotte contre l'air.

Le chapelet ſera de plomb attachè a un ruban etroit et fort ſouple. Des [Fig. 44.] morceaux quarrez [Fig. 44]. peut eſtre une chaine ordinaire pourra ſuffire, car les chainons ne plient que en bas ſans ſoufrir de preſſion.

Le cercle doit eſtre equilibrè exactement, en ſorte qu'il garde toute poſition qu'on luy donne. 2 petits poids coulans ſur les branches [Fig. 43] pour ajuſter cet equilibre. puis deux autres [Fig. 43] qui doivent touſjours eſtre egalement diſtans du centre, et ſerviront pour ajuſter a la viteſſe requiſe des heures.

Eſtant bien equilibrè, les 2 bouts du chapelet ſe mettront en meſme hauteur.

On remontera l'horloge avec une clef avec un pignon qui prenne dans les dents de la poulie, afin que cela aille à l'aiſe [1]).

La corde du grand poids fera un tour ſur la poulie, afin de tirer plus facilement et ſans grandes pointes de fer à la circonference [2])

On peut comparer le mouvement du pendule avec celuy de la nouvelle balance et faire une balance a ſecondes lors qu'on a un tel pendule.

Il faut veoir lors que le pendule [Fig. 45] eſt au bout de ſa vibration en C, quelle partie eſt là ſon poids du poids entier; menant la tangente CG a la Cycloide, et la perpendiculaire à l'axe CD. Car ſi DG eſt $\frac{1}{4}$ de GC, le pendule en C peſera $\frac{1}{4}$ de ſon poids abſolu.

In cycloide deſcendenti corpori vires impellentes contingunt quæ ſint ut ſpatia curvæ percurrenda ad punctum infimum, ubi vis impellens deſinit [3]). Hinc in initio ſpatij dimidij, etiam vis impellens dimidia eſt. Demonſtravi verò à quocunque puncto cycloidis deſcenſus incipiat tempora æqualia impendi quibus ad imum punctum perveniatur [4]).

---

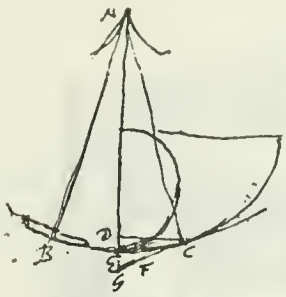
[1]) Comparez le No 7 de la p. 173 du T. XVII.

[2]) Voir sur les pointes de fer la p. 64 du T. XVII ou la Fig. 17 de la p. 71 du présent Tome.

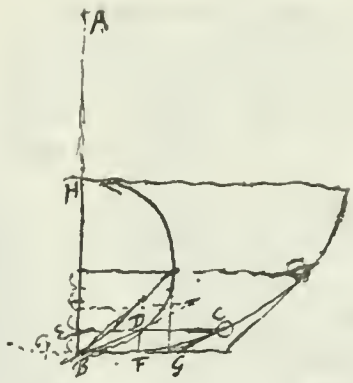
[3]) C'est ce que nous avons appelé, à la p. 483 qui précède, la trouvaille de Huygens.

[4]) Voir les p. 152—187 qui précèdent. Nous avons déjà remarqué que la démonstration de

[Fig. 45.]



[Fig. 46.]



In pendulo [5]) pondus pelli incipit verſus punctum imum, parte ſexta ſui, per ſpatium 6 pollicum, atque ita impendit $\frac{1}{2}$ ſecundi min. unde tota vibratio 1″.

duplum penduli BC [Fig. 46] BE BD —— BE

72 poll. —— 6 —— —— $6/\frac{1}{2}$ poll. 3 poll. —— $\frac{1}{2}$

6 —— 1 pondus abſolutum ad pondus in C.

In libra iſochrona pondus pelli incipit verſus punctum extremum, ubi vis impellens definit, parte ſui $\frac{1}{10}$, per ſpatium 9 pollicum. quæritur quantum tempus impendet. Dico $1\frac{1}{4}$ ſecundi. unde tota libratio $2\frac{1}{2}''$ [6]).

Singuli rhumbi [Fig. 47] 4 partibus conſtant, et filo perpendiculari, ne ultra certos limites aperiantur. Si libratur ex B in C, erit $\frac{1}{2}$ libratio ex B in D, per quam efferetur E quantum deprimitur F. Unde altitudo E ſupra F ∞ BC arcui.

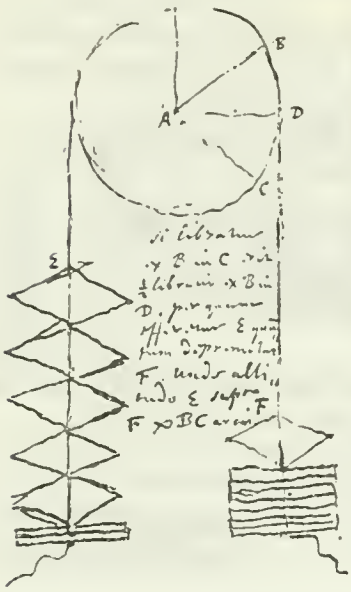
Palettes [Fig. 48] attachees ſur le tranchant de l'axe de la roüe de rencontre.

Huygens du tautochronisme de la cycloïde n'est nullement basée, comme celle de Newton, sur la proportionnalité de la force agissante à l'arc, dont il est question dans la note précédente; voir la p. 484.

[5]) La longueur du pendule à secondes est de 36 *pouces* ou 3 *pieds horaires* d'après la p. 96 qui précède. D'après la Fig. 46 $BD^2 = BE.BH$ ou 2 BA : arc BC = arc BC : BE, ce qui correspond à l'équation du texte.

[6]) D'après le sixième alinéa de la p. 553 il s'agit ici d'une période déterminée expérimentalement.

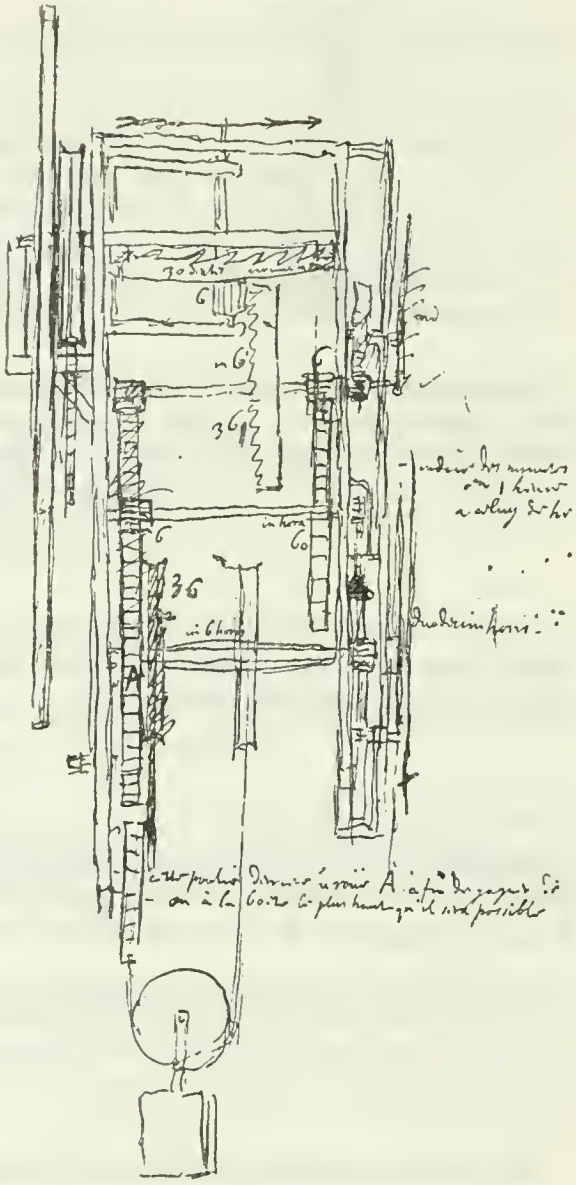
[Fig. 47.][1])



[Fig. 48.]

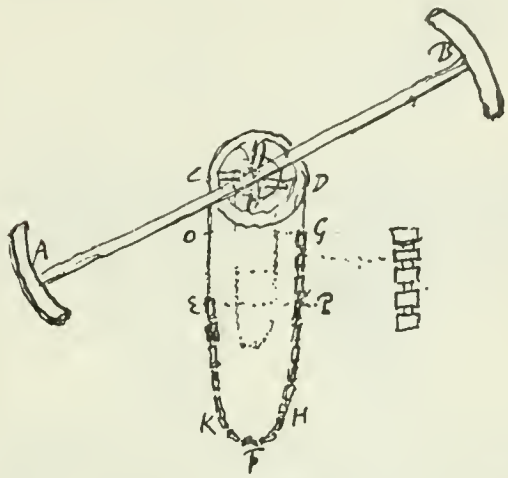
[Fig. 50.]

[Fig. 49.][2])



Un balancier ſimple a chaine fort grand ſans horloge, à part pour regler, et obſerver la difference en 24 heures. Ou bien un horologe d'une demie heure ou 2 minutes ſeulement, pour ce meſme effet et pour examiner par fois l'horloge [Fig. 49], ou pour ſervir pendant que l'autre eſt remis ou reparé.

[Fig. 51.] [Fig. 52.]



On y pourroit adjouter ou oſter du contrepoids pour faire que les balancements aijent touſjours la meſme largeur. Le balancier grand de 2 pieds, peſant et ſolide.

Sic ponendus culter [Fig. 50] axis ne variet ſimulque alæ affixæ. Poterit includi ne poſſit excuti.

Satis liber motus eſt hujus catenæ [Fig. 51] cum partium nullus eſt contactus.

Si dimidio minori diametro fiat rota CD [Fig. 51], debebunt catenæ rectangula ſingula quadruplum pendere priorum, nihil aucta eorum altitudine [Fig. 52]. Nam æquè lata libratio requiritur; erit autem pondus movens tantum dimidia longitudine ad GP [3]), et in libram AB agit duplo propius à centro.

AB baculus bipedalis. CD rota 6 poll. diametro. A et B ſingula libram unam pendebant. Catena pendebat libram cum 2 oncijs. conſtabat particulis plumbi 27 quarum ergo ſingula $\frac{2}{3}$ onciæ.

Experiebar comparando cum pendulo ſimplici. Librationum tempus erat $2\frac{1}{2}$ ſecundi minuti circiter. Dum penduli recurſus 4 fierent.

Exiguæ librationes paululo celeriores erant magnis. Una ex cauſis eſt aer qui plus retardat majores librationes quam minores. Altera ut puto, quod in majoribus librationibus, plures particulæ catenam componentes motum converſionis circa centrum accipiunt, dum ex H in K tranſeunt; et majorem ſimul converſionem faciunt. Catenæ autem vis quæ in hoc impenditur deperit prorſus [4]), cum tamen decedat ex vi qua libra AB à catena moveri debet, eoque librationes fiunt lentiores.

---

[1]) Autre construction de la chaînette. En marge: samen de ketting 1 pondt. 2 onc. en $\frac{1}{4}$, et autres indications de poids que nous ne reproduisons pas.

[2]) On lit dans la Fig. 49, outre les nombres des dents des roues: circuitus in min... in hora... in ſex horis... duodecim horis... indice des minutes tourne en 1 heure. eſt concentrique a celuy des heures... cette poulie derriere la roüe A, à fin de gagner de la hauteur au contrepoids ou à la boete le plus haut qu'il ſera poſſible.

[3]) Puisque la chaînette elle-même sera plus courte, comme la Fig. 51 l'indique.

[4]) Vu l'axiome qui suit, et que nous avons déjà imprimé à la p. 477 qui précède, il ne faut appa-

Experire catenam non continuam ex rhumbis ut fol. præcedenti designatur [Fig. 47], quæ huic incommodo non deberet esse obnoxia.

In corporum motibus quibuscunque, nihil virium perditur aut interit nisi effectu edito et exstante ad quem producendum tantundem virium requiritur quantum est id quod decessit. Vires voco potentiam extollendi ponderis. Ita dupla vis est quae idem pondus duplo altius extollere potest.

Priori inæqualitati remedium ita adhibendum, ut in locum libræ AB substituatur orbis ex tenui lamina ferrea æneave, cui in circumferentia annulus crassior à plumbo affigatur. Ita nusquam impingetur in aerem, nec is amplius motum remorabitur quam quatenus adhærescit orbi in sese conversо, quod perexiguum est. Neque hic locum habebit resistentia aeris in ratione duplicata celeritatum, quæ secundum Newtonum inæquales facit penduli Cycloidalis agitationes [1]).

Alterum incommodum tollendum, faciendo ut pondera tæniæ appendantur ea ratione, ut singula seorsim ex tæniolis suis suspensa sint, ut cernitur in M^2 [Fig. 53]. Sed singulæ partes ex binis globulis constent, stylo intermedio conjunctis; ne flexum naturalem catenæ corrumpant. ut cernitur in LMN [Fig. 54]. Pondera certis distantijs affigenda sunt, ita ut globuli sese tangere non possint, nec tamen nisi exiguo distent. Hoc modo nulla amplius fiet circa centrum conversio.

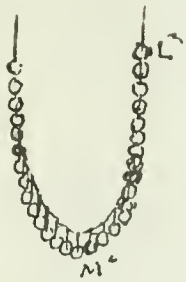
Sed dubitari potest an non exigua conversio et pauciorum particularum catenæ, eadem proportione retardet minores librationes qua major conversio et plurium particularum retardat librationes ampliores. Ergo primo remedium contra aeris occursum tentetur.

---

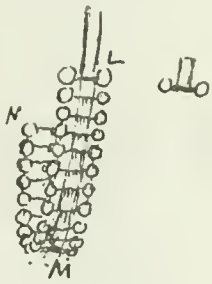
remment pas songer ici à une perte absolue de la force de la chaîne par suite des frottements, mais seulement à une perte totale de la force utile. C'est d'une perte de la force utile que parle la suite de la phrase, où le mot „tamen" est de trop à notre avis. Comparez (l. 4 de la p. 555) la phrase: „perit hæc motus particula, productà quadam catenæ quassatione" et la note 2 qui suit.

[1]) C'est dans les Prop. XXIX et XXX du T. II de ses „Philosophiæ naturalis Principia mathematica" de 1687, que Newton considère l'oscillation cycloïdale d'un point pesant dans le cas où la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

[Fig. 53.]



[Fig. 54.]



[Fig. 55.]

Poſt adhibitum utrumque remedium perditur tamen vis, qua pars catenæ GP, quaſi transfertur in OE. ſed hæc vis in minoribus majoribusque vibrationibus proportionaliter decedit viribus motricibus, eoque nullam inæqualitatem generat, ſed efficit tantum ut non tam facile quam alias continuetur motus libræ, quia perit hæc motus particula, productâ quadam catenæ quaſſatione. Fiunt etiam librationes paulo lentiores ob impenſam in hanc tranſlationem motus partem [2]).

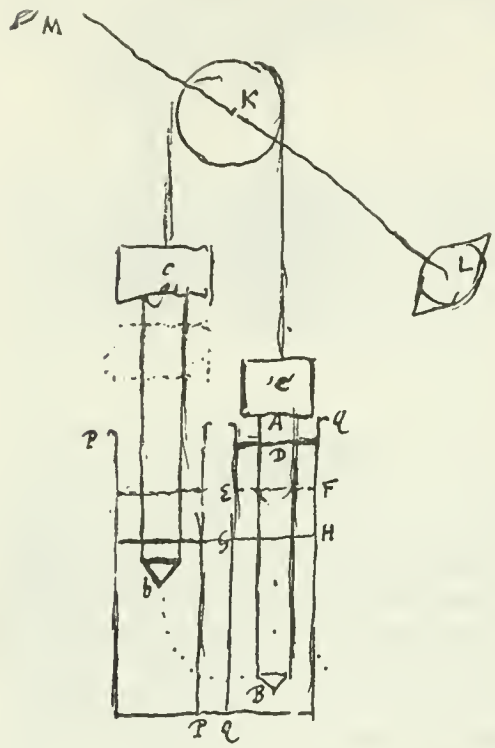
Hæc omnia catenæ incommoda vitabunrur ſi ſiat catena non continua, atque eâ formâ quæ hic in margine cernitur [Fig. 55]. quæ utrinque eidem plano incumbit et affigitur. Hæc non fluctuabit ex agitatione navis, et faciliorem motum faciet, minusque ceſſantem. Experire.

Quarrez d'egal poids et egales diſtances [Fig. 55], un quarrè de fer entredeux les ſera egales en les attachant. attachee en bas. Chaine de double quarrez tenants enſemble par un coſtè. percez quarrement, et avec deux rubans. ſerrez entre deux. Epingles à coſtè. Peu de diſtance entre ces chainons. Leur matiere d'eſtain aſſez mince. Cette chaine ne branſlera pas comme la continue.

---

[2]) Huygens ne dit pas ce que devient la „motus pars" perdue après que la „catenæ quaſſatio", qu'elle est censée produire, a pris fin; mais l'axiome général dit clairement qu'il doit y avoir, alors aussi, un „effectus editus et exſtans" équivalent.

[Fig. 56.]



Cylindracea vafa PP, QQ [Fig. 56] hydrargyrum continentia [1]).

Cylindri è metallo, AB, *ab* cum capitibus C, *c*. pendent ex tænia circa orbem K.

Cylindrus totus CAB gravior eft paulo quam cylindrus hydrargyro conftans quantum occupat pars DB. Ejusdemque ponderis eft cylindrus totus *cab*. Sint ferrei hydrargyro pleni.

Moveatur jam libra LM. Erunt recurfus ifochroni, eadem ratione atque in catena fuperiori, et in Cycloide.

Videndum an recta abfque inclinatione fint defcenfuri cylindri in hydrargyro, cum fint paulo leviori materia. fed hoc cavebitur fi fint hydrargyro pleni.

Poffunt toti cylindri latere intra tubos ferreos. nec ullum periculum erit ut effluat hydrargyrus.

Poffum aqua experimentum capere, et cylindris paulo quam aqua gravioribus. et vas unum fufficit, etfi bina in navi præftent, ob minorem liquidi motum. Videndum an æqualiora fiant librationum tempora, quam à catena. Item an diutius durent femel motæ.

Puto nimis multum de motu perdi ob impulfas liquoris partes ad fingulas vibrationes. Proponendum tamen et hoc.

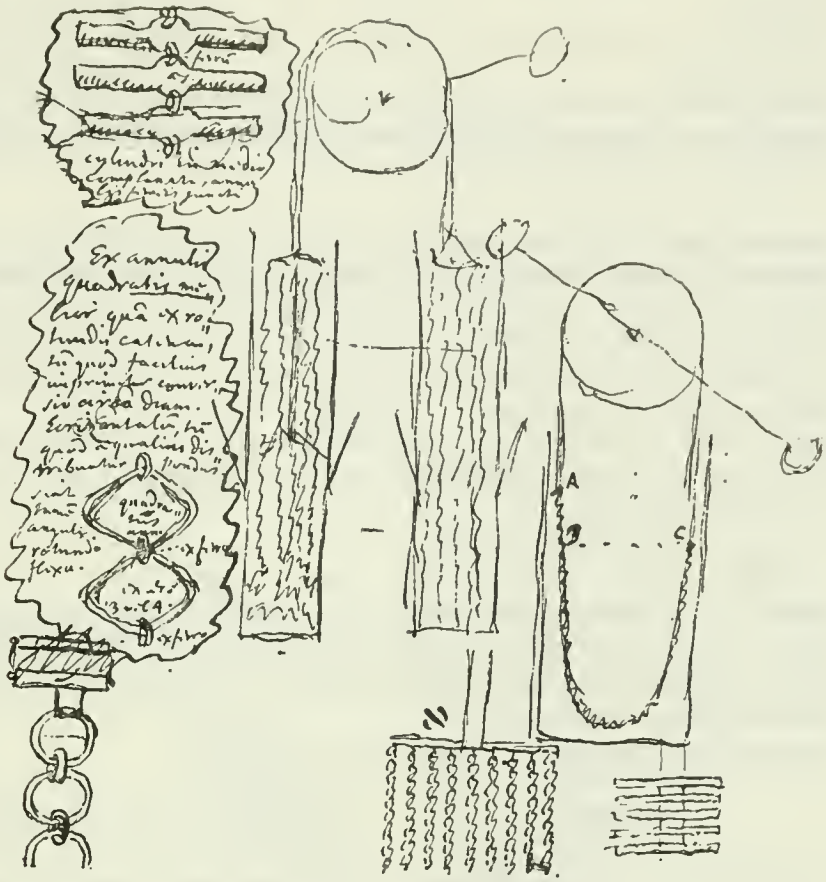
Forfan melius in vas unum utraque pondera mergentur ut eadem femper maneat fuperficiei liquidæ altitudo, et minus obftet motui hydrargyrus. Poffunt in vafe collocari plana quædam quibus agitatio hydrargyri impediatur manente continuitate.

Le 26 fevrier effaiè ainfi avec de l'eau mais le mouvement n'eftoit pas bien libre a caufe de la refiftence de l'eau quoyque les cylindres fuffent en bas en cone. Au 50me balancement le mouvement eftoit defia fi petit que le 150me avec la chaine de plomb appliquee au mefme balancier. Il y auroit la mefme refiftence avec le vif argent parce qu'il refifte a proportion de fa pefanteur.

---

[1]) Comparez la Pièce III qui précède (p. 536).

[Fig. 57.]



12 febr. 1693.

Catena exiguis annulis conſtans [Fig. 57] acervatim pluribus filis intra tubos binos ſubſidens ac motu reciproco, utrinque ex tæniola pendens quæ rotæ circundatur. Latebit catena intra tubos.

NB. Hoc in catenula ſimplici expertus, reperi non eſſe motum valde liberum, neſcio an fluctuatione catenæ, an quod annuli ſubſidentes imi, occurentes jacentibus, partem ponderis amittant priusquam jaceant. brevi ceſſabat.

P.S. Puto eſſe ob attritum continuum annulorum ab imo ſurgentium.

Poſtea eadem catenula continua expertus, motum egregiè liberum inveni, nec ullam catenæ fluctuationem poſtquam ſemel ea ceſſaſſet.

Siquid adhuc annulorum attritus mutuus nocet, poſſet minui NB. jungendo alter-

nis annulos æreos ferreosque. Poteſt catena latere. Imo ita includenda ne navis jactatione fluctuet.

Vel cylindrulos horizontales, è metallo, ad tæniam ſerici fili nectendo paribus intervallis exiguis.

Sed longum eſt hujusmodi catenam conficere. multoque facilius vitiatur.

Optimè plures catenulæ ex ſtylis binis horizontalibus ſuſpendentur. ut in ℵ [Fig. 57]. Si non fluctuat ſponte catena, nihil deperit ex motu.

Experiemur an præſtet ſerico filo an annulis ferreis jungere cylindros.

Fiunt annuli quadrati ut ne quid obſit ſi angulus qui a latere evadat ſuperior caſu aliquo.

Circa ferreum ſtylum quadratum, obtuſis tamen angulis, convolvatur filum æneum. inde accipiantur annuli quadrati ſed ferruminandi. Acuantur intus anguli quadratorum, ita vel ſine attritu catena flectitur.

Facilius annulo imprimitur motus circa diametrum, quam in ſeipſum. Ideo ponenda catena hæc ut diametri horizontales annulorum majorum ſint paralleli ad axem rotæ cui injecta eſt tænia.

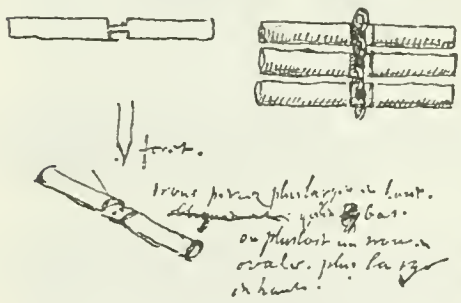
On lit dans la Fig. 57:

„ferrum. æs. cylindri in medio complanati, annulis ferreis juncti.

Ex annulis quadratis melior quam ex rotundis catena, tum quod facilius imprimitur converſio circa diametrum horizontalem, tum quod æqualius diſtribuatur pondus. ſint tamen anguli rotundo flexu.

quadratus annulus. ex ferro. ex ære 3 vel 4. ex ferro".

[Fig. 58.]



Hæc catena [Fig. 58] melior quam paginæ præcedentis [1]).

Cylindri ænei, in medio utrinque lima depreſſi ac complanati, annulis ferreis ellipticis conjuncti. Sic componatur catena, quæ cylindros exiguo intervallo diſtantes habeat. annuli elliptici ſiunt ne opus ſit ferruminatione.

Oportet filum ferreum convolvere circa ſtylum ellipticum, tum forfice abſcindere annulos æquales. Cylindrorum vero

[1]) C.à.d. meilleure que les chaînettes de la Fig. 57.

æneorum æquale erit pondus ſi æquali longitudine reſecentur ex filo craſſiori, cujus ubique eadem eſt craſſitudo.

On lit dans la Fig. 58:

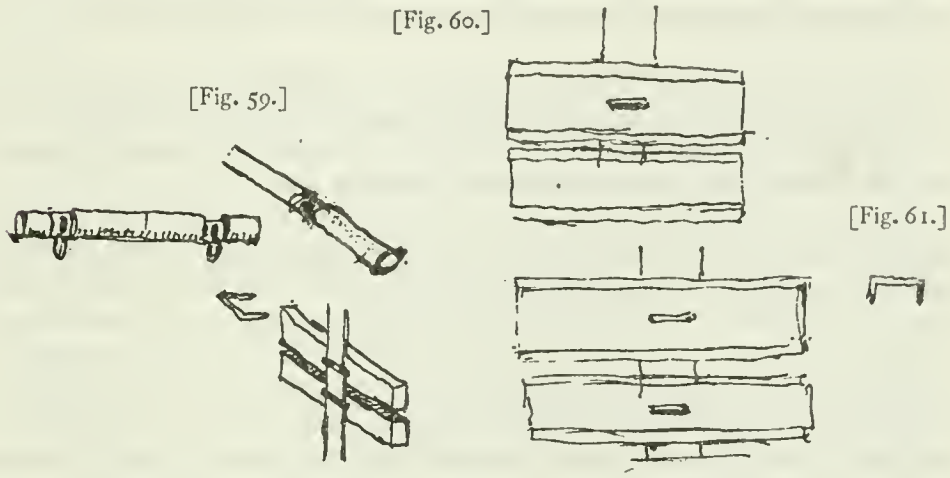
„foret.

trous percez plus larges en haut qu'en bas. ou pluſtoſt un trou en ovale, plus large en haut".

An plana manebit catena? requiritur ut maneat, præſertim in flexu imo. ſi non manet plana an duplex ordo annulorum ferreorum faciendus? ita affrictum partientur, eritque ac ſi duæ ſint catenæ ſubduplo pondere. recte igitur duplex ordo annulorum ponetur.

[Fig. 60.]

[Fig. 59.]



[Fig. 61.]

An cuspides per ligulam adigendæ? vix tam æqualibus interſtitijs nectentur [Fig. 59].

27 Fevrier. Cecy eſt la meilleure et la plus aiſee chaine [Fig. 60]. Ce ſont des morceaux de plomb plats, et longs de 3 pouces qu'on plie en deux, et on enferme le ruban, et puis avec le double crochet [Fig. 61] on l'y fait tenir ferme.

Prenez le crochet avec des pincettes d'horloger. Coupez ſes pointes de biais pour mieux faire entrer.

Uncus [Fig. 61] per plumbum et tæniam figendus.

Ruban de ſatin lavè pour en oſter la gomme. Cela fera ſans doute le mouvement plus libre que la chaine jointe par des anneaux, et il eſt plus aiſè de la faire, et court moins haſart de s'alonger.

Il faut limer ou rabotter les 2 bord[s]en dos d'asne pour pouvoir mettre les pièces plus pres.

An non jactatione navis, dum ab unda ſurſum ſertur, pars catenæ AB (in fig. in ima pag. præcedenti [Fig. 57]) gravior fit, eoque accelerat motum libræ? et contra cum deorſum [1])?

Reſp. tam lentum eſſe hunc navis magnæ aſcenſum ac deſcenſum, adeoque non ſubito incipientem, ut non poſſint quicquam nocere hi motus. qui non niſi quatenus paulatim accelerantur aut decreſcunt, momentum aliquod habent, nam ſi æquabili motu navis deſcenderet vel aſcenderet, idem eſſet, quantum ad catenam, ac ſi immota jaceret vel in flumine navigaretur [1]). Deinde quantam gravitatem catenæ parti AB adjiceret aſcenſus, tantundem rurſus deſcenſus adimeret, qui neceſſario aſcenſui æqualis eſt. atque ita tantundem faceret ad retardandam librationem quantum aſcenſus ad accelerandam. Vix cuiquam in mentem venturam puto hanc objectionem [2]).

C'eſt un avantage de noſtre balance equilibree qu'elle ira de meſme viteſſe quoyqu'un peu inclinee; c'eſt a dire quoy que l'axe ne ſoit pas exactement horizontal. car cela n'eſt point a la balance qui fait pendule et ſes vibrations par ſa propre peſanteur, car l'axe n'eſtant pas horizontal elle en ira plus lentement.

En chargeant le balancier de poids vers les bouts [Fig. 62] — on lit dans la figure: „reſſort . . . . reſſort", et au-deſſus d'elle la remarque, évidemment ajoutée plus tard: „cette figure pourroit plier" —, il ſoufrira moins de la reſiſtence de l'air a proportion que s'il eſtoit plus leger. car en mettant pluſieurs legers il faudroit a chacun les branches, qui frottent contre l'air par les coſtez.

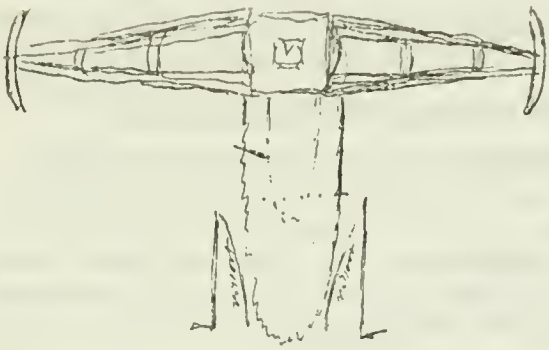
En doublant les poids aux bouts (ſuppoſant que les branches ne peſent point) les balancemens ne feront pas plus lents de la moitiè mais leur temps aux premiers comme $\sqrt{2}$ à 1. fort pres comme 10 a 7.

Il faut chercher ce qui fait le plus de juſteſſe, de faire le balancier fort peſant ou mediocrement. La roue de la chaine petite ou grande. Deux fois moins de diametre demande une chaine de chainons quadruples. mais elle ſera la moitiè plus courte.

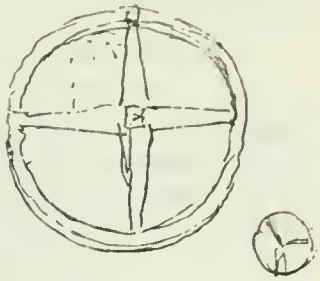
[1]) Comparez, sur cette augmentation ou diminution de la gravité de la partie de la chaînette qui produit l'oscillation, par suite de l'accélération du mouvement du navire vers le haut ou vers le bas, la p. 518 de l'Avertissement qui précède.

[2]) R. T. Gould „The marine Chronometer" p. 36, écrit, à propos de l'horloge de Sully [notre Fig. 39]: „There was a far greater [source of error] namely the influence of the ship's motion. Any movement of the machine in a vertical plane, whether caused by pitching or rolling, caused the weight to lag behind, owing to its inertia, and so altered the pull on the cord, and hence the force acting on the balance, and consequently the velocity of the latter".

[Fig. 62.]



[Fig. 63.]



La roue [Fig. 63] fera meilleure pour eſtre ferme et ſans danger de plier ou de s'alterer.

Elle ne doit avoir que 3 branches pour l'horologe [Fig. 63].

Mais il faut conſiderer le frottement a coſtè dans toute cette circonference contre l'air. les branches doivent eſtre tranchentes par les coſtez et un peu plus epaiſſes par l'arreſte du milieu. la roue peut eſtre un anneau cylindrique pour eſtre plus forte contre le plis par le coſtè. le mieux ſera de la faire quarrée par la circonference, cela frottera moins contre l'air.

En chargeant d'avantage le balancier, ſans changer rien a la chaine, c'eſt comme ſi on allongeait un pendule en augmentant en meſme temps ſon poids [3]). Peut eſtre la meſme force de l'horologe pourra l'entretenir, parce que la reſiſtence de l'air diminue en raiſon double de la lenteur [4]).

En diminuant le poids de la chaine, ſans changer rien au balancier, c'eſt comme ſi on allongeoit un pendule, ſans luy augmenter ſon poids [3]).

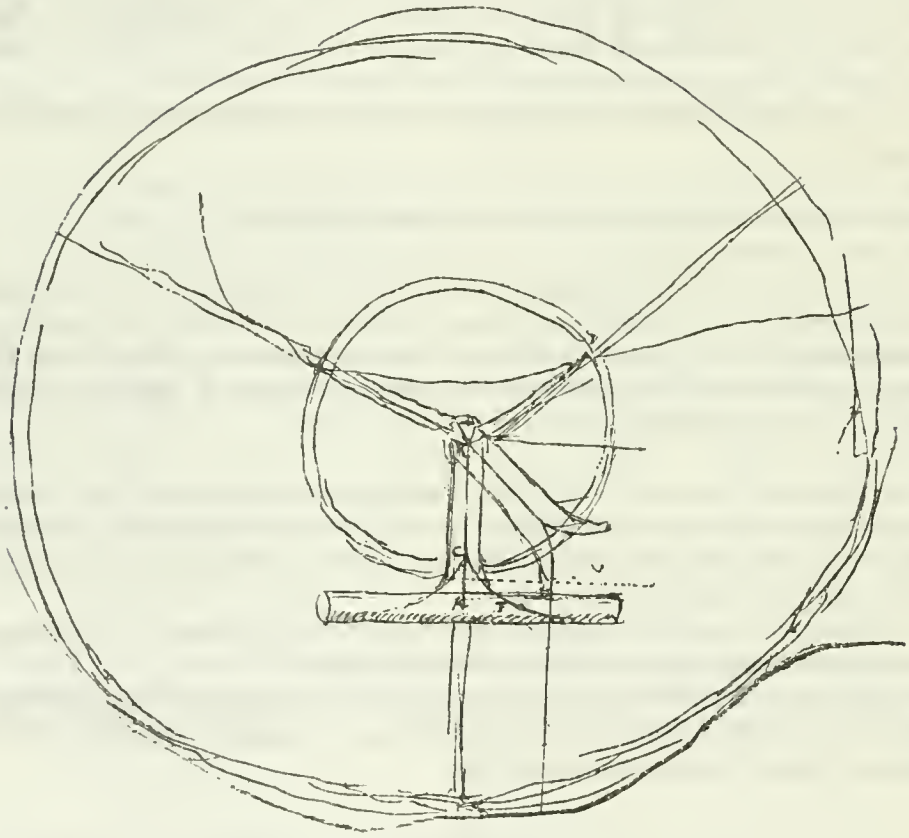
Il vaut donc mieux laiſſer la chaine comme elle eſt, et charger d'avantage le balancier. Car on aura ainſi l'effet d'un long pendule, (par exemple de 48 pieds) dans un vaiſſeau, avec des battemens de 4 ſecondes.

[3]) Comparez la note 5 de la p. 531 qui précède.
[4]) Comparez la note 1 de la p. 554 qui précède.

VI.

LA „LIBRATIO ISOCHRONA MELIOR PRÆCEDENTE" DE MARS 1693.

[Fig. 64.]



Libratio iſochrona melior præcedente [1]). Inventa 6 Mart. 1693.

[1]) Comparez la note 1 de la p. 549 qui précède. La Pièce VI est empruntée aux p. 180—182 et 185 du Manuscrit H. Voir aussi la lettre du 6 mars 1693 de Huygens aux Directeurs de la C^e. des Indes Orientales (T. X, p. 424) et celle du 24 mars à de Volder (T. X, p. 434).

Imaginez le fil QM — ou plutôt le fil DQM [Fig. 66]; c'eſt le fil CA de la Fig. 64 — infiniment long: la balance ira de meſme que quand il eſt court. Mais eſtant ainſi long, le mouvement lateral ne fait point d'autre effet que s'il deſcendoit dans la perpendiculaire CL. de ſorte qu'il faut ſeulement conſiderer s'il peſe touſjours egalement en deſcendant [2]).

Quatenus pondus A, pendens ex tæniola AC æqualiter ponderat, erit motus circuli DE [Fig. 67] iſochronus. Pendet tæniola inter particulas binas Curvæ quæ naſcitur ex Evolutione circonferentiæ CGH cujus radius CK [Fig. 66]. K centrum motus. caput tæniolæ A movetur in parabola cujus vertex L, axis LC, latus rectum ∞ tertiæ proportionali duarum CL, CR, quæ æqualis 2CK. Nam Mβ ∞ DQ, Aγ ∞ GP, quia ex evolutionis natura creſcunt DQ, GP ut quadrata CQ, CP.

Demonſtratio æqualium librationum hic et in appenſa Catena inde pendet quod ſi corpus impellatur vi tali in ſpatij decurrendi ſingulis punctis, quæ ſit ut partes ſpatij quæ reſtant peragendæ, fiet ut à quacunque ejus ſpatij puncto moveri incipiat, eodem tempore ad finem perveniat. Hoc in deſcenſu per Cycloidem ita ſe habere facile perſpicitur ubi tempora iſochrona eſſe per quosvis arcus oſtendimus. In vibrationibus laminæ flexilis idem principium experimentis reperitur, itemque tempora vibrationum æqualia [3]). Neutoni quoque extat demonſtratio ſed nequaquam evidens aut exacta [4]).

[Fig. 65.] Oportet facere tæniolam CA [Fig. 64] quam breviſſimam [5]). Quem in finem poſſet pro pondere A eſſe duplex orbis axe tenui conjunctus [Fig. 65], ut inter utrumque intercipiatur brachium KC. Ita longitudini CA decederet cylindri vel ſphæræ ponderantis ſemidiameter.

Dum curvæ CF [Fig. 64] figuram ratione ac conſtructione quadam mechanica requiro [6]), adverti eſſe eam quæ ex evolutione circuli circumferentiæ oritur [7]).

---

[2]) En d'autres termes: il faut que le poids constant agisse toujours suivant une verticale. Voir cependant le deuxième alinéa de la note 4 de la p. 567 qui suit.

[3]) Comparez la p. 502 qui précède.

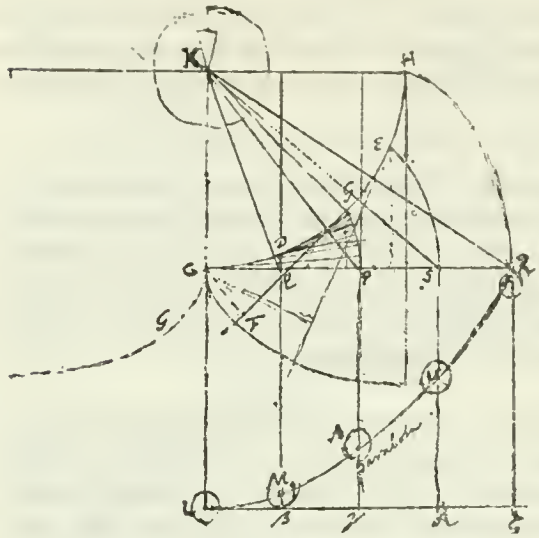
[4]) Voir la p. 484 qui précède.

[5]) A cause du ballottement du vaisseau.

[6]) Huygens cherchait une courbe CF telle que le moment tendant à ramener le balancier vers sa position d'équilibre fût proportionnel à l'écart angulaire. Puisque le balancier est équilibré exactement autour du centre K, ce moment est dû exclusivement au poids A suspendu au fil, toujours vertical par hypothèse, qui s'applique à la courbe en question. Comparez la note 16 de la p. 514 du T. X.

[7]) Comparez l'anagramme „Flexilis ambitum cum linea deſerit orbem" de la p. 515 du T. X.

[Fig. 66.]



Ut 2CK [Fig. 66] ad CR, (quæ ∞ CH) ita ſit CR ad CL. Dico CL eſſe ∞ HR. Deſcribatur enim parabola vertice L, diametro LC, quæ tranſeat per punctum R. Ejus parabolæ latus rectum erit ∞ 2CK. Ideoque circumferentia CH radio KC deſcripta, ſive huic æqualis [1]), eſt maxima quæ per verticem L intra parabolam cadat, ac proinde eſt hæc quæ curvitatem parabolæ in vertice referat [2]). Unde QD recta [3]) vel curva ex evolutione arcus CD deſcripta æqualis cenſetur Mβ. Sunt autem curvæ DQ, GP, ES, HR ſicut quadrata rectarum CQ, CP, CS, CR, ut ex evolutionis conſideratione facile intelligitur, quia particulæ ex. gr. curvæ GP deſcribuntur à filis æqualiter creſcentibus quæ deſerunt arcum CG. Hinc ergo ſingulæ DQ, GP, ES, HR æquales ſingulis Mβ, Aγ, Vδ, Rζ ſive CL [4]).

Spatium CHR erit ∞ LRζ. hoc eſt $\frac{1}{3}$ □ Cζ ſive $\frac{1}{3}$ □ ex HR in CR, vel HR in arcum CH.

Sed his quidem nihil opus ad demonſtrandum iſochronismum.

Demonſtratio motus æqualis. Si in arcu CH [Fig. 66] quælibet partes accipiantur, CD, DG, GE &c. et a punctis D, G, E evolvantur fila circumferentiæ applicata, ut deſcribantur ex evolutione lineæ DQ, GP, ES, uſque in horizontalem CR, apparet

[1]) C.à.d. une circonférence égale, mais plus basse.

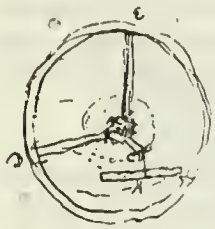
[2]) Le plus grand cercle qui touche la parabole intérieurement en son sommet L, n'est autre que le cercle de courbure. Comparez la note 2 de la p. 393 qui précède. Ce „cercle osculateur" de la parabole — comparez sur le mot „osculation" la note 5 de la p. 42 — est déjà indiqué par Huygens dans la Fig. 1 de la p. 302, datant de 1659, du T. XVI: voir la fin de la note 8 de la p. 41 qui précède.

[3]) CD étant un arc infiniment petit, on peut appeler QD une droite. Dans la suite l'arc CD est supposé de grandeur finie.

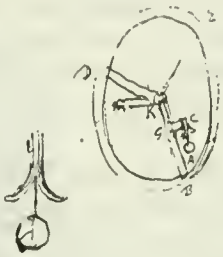
[4]) Si le fil a la longueur CL, il résulte des considérations mathématiques qui précèdent que le poids A, supposé punctiforme, se meut suivant la parabole LR de la Fig. 66.

cum C punctum pervenerit axis converſione in D, quia CR ad omnes deſcriptas curvas normalis eſt, tunc pondus appenſum [5]) tracturum per QM perpendicularem. cum vero C in G, trahet per PA. Sunt autem momenta trahentis ſicut diſtantiæ PC ad QC. atque ita quoque arcus peragendi in circulo libratorio, nempe GC, DC. Ergo ſemper momenta impulſus erunt ut ſpatia motu circulari peragenda uſque ad punctum C ubi impulſus ad nihilum perducitur. quare tempora quarumlibet librationum æqualia erunt [6]).

[Fig. 67.]



[Fig. 68.]



In hoc invento novo motus rotæ DE [Fig. 67] multo liberior eſt quam cum catena injicitur, ut in præcedentibus [7]), et æquatio perfectior ex appenſo inter cornua pondere A, quam illic ex momentis catenæ, quia interrupta ſerie particularum conſtat, nec pendet ad perpendiculum. Tum aucto pondere A poteſt celerior fieri rotæ agitatio, idque multo commodius quam augendo catenæ pondere. Præſtat autem rotam ſemel æquilibratam intactam relinquere.

Minus quoque incommodabit agitatio ſi qua eſt ponderis A ex motu navis, quam catenæ longioris fluctuatio [8]). Longe etiam facilius pondus A ſic aptabitur quam catena [Fig. 60] effingetur ex æquiponderantibus particulis tæniolæ affixis. Porro artificium longe majus ac ſubtilius appenſi ponderis A quam catenæ.

Ces Cornes C avec le poids A [Fig. 68], corrigent tellement l'inegalitè des balancemens de la roüe, que quoy qu'on adjoute du poids à ſa circonference, ſans rien changer au poids A, on les aura iſochrones. Et de meſme ſi on adjoute ou oſte du poids A, laiſſant la roüe comme elle eſt. Ce qui eſt bien remarquable, et bien commode.

Il faut ſeulement que les balancemens ſoient aſſez lents pour que le ruban CA, pende toujours perpendiculaire parce qu'autrement le poids A ne tireroit pas egalement. Il n'importe point que le ruban CA s'allonge.

---

5) Savoir le poids suspendu en C entre les „cornes de bouc" (voir la p. 160 du T. XVII) de la nouvelle forme, qu'on voit dans la Fig. 66.

6) D'après le théorème général: comparez la p. 531 qui précède (deuxième alinéa de la note 5). Ici il s'agit évidemment d'un moment autour d'un axe horizontal.

7) Pièce V.

8) Ceci semble bien probable, mais en parlant de l'„agitatio *ſi qua eſt*" Huygens fait preuve d'un optimisme quelque peu hasardé: comparez sur son optimisme les p. 163 et 198 du T. XVII.

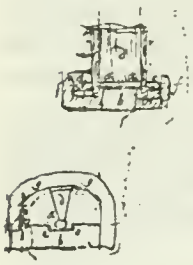
Si on ſuppoſe que la roue ſoit ſans poids, alors le poids A ſera comme un pendule ſimple de la longueur KG + CA [Fig. 68].

Poteſt diſtantia KG pro arbitrio ſumi, dummodo curvatura cornuum C ſit ex Evolutione circonferentiæ cujus ſemidiameter KG.

Inæqualitas non aliunde contingere poteſt quam ſi axis rotæ DE non maneat horizonti parallelus. tunc enim minùs gravitat pondus A.

Vel ſi atteratur ac diminuatur imum in axe rotæ. ſic enim evaderet centrum gravitatis annuli humilius puncto ſuſpenſionis. Sed hoc aliquot menſium ſpatio fieri non poteſt. Eoque minus quod non atteritur axis rotæ ſuper plana ſuperficiecula, ſed volvitur. at in horologio pondere agitato, quod amplius 35 annis uſum præbuit [1]), non potui animadvertere axem rotæ infimæ cui pondus movens incumbit, quicquam amiſiſſe, etſi hic axis continuè fricetur interiori ſuperficie foraminis.

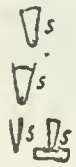
[Fig. 69.]



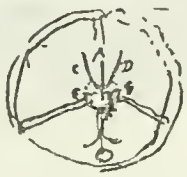
Imus axis rotæ *aa* [Fig. 69] qua parte inſidet ſubjectæ chalybi, debet exacte rotundus eſſe. accipiatur acus craſſa, vel filum e chalibe *cc*, vel axiculus torno formatus, quod applicetur cultro *d* per extantes cuneolos transmiſſum, ut acus horizontali poſitu incumbat chalibis planæ ſuperficieculæ *ee*, et in ea verſetur. Extremæ autem acus *ff* cuſpides intra repagula fere ſtringantur. Supernè imponatur fornix *gg*, ne exilire poſſit axis, ſed tantum ſub eo libere moveri.

An cuneoli in axe ſatis rotundi parte inferiori fieri poſſunt ut in S [Fig. 70]? opus enim tantummodo ut non planè acuti ſint. quia chalybs non facile deteritur, cum volvatur, non fricet ſubjectum planum quod itidem chalybeum. Sic enim minus quoque hinc inde excurret axis affixæque ipſi pinnulæ, ab rota ferrata [2]) impellendæ.

[Fig. 70.]



[Fig. 71.]



Rota ænea Voorburgo adferenda [3]).

Poteſt ſuſpendi circulus libramenti [Fig. 71] ex tæniola AB forcipe CD retenta, et axis centro affixa, qui ea parte ad ſemicylindrum

[1]) Il s'agit donc d'une horloge construite en 1657 ou dans un des premiers mois de 1658. Voir les p. 30—31 du T. XVII, ainsi que les notes 1 et 2 de la p. 27 du même Tome.

[2]) La roue de rencontre; comparez les notes 4 et 5 (et la Fig. 3 qui y est mentionnée) de la p. 14 du T. XVII.

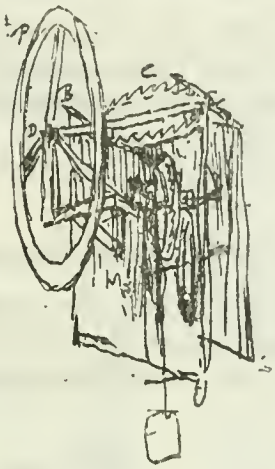
[3]) La roue devant être apportée de Voorburg, où se trouvait — et se trouve encore aujourd'hui

EFG redactus ſit. movebitur enim ſic circulus ſuper puncto illo quod axis centrum eſt, nec referet an teniola extendatur. Eritque motus liberrimus abſque frictione. nec ſacile tænia atteritur ut puto.

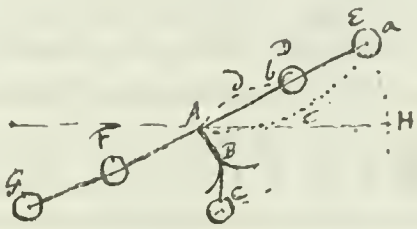
Pars AB ab hac lamina abeſſe poteſt, ubi tunc ſpatium relinquetur ad collocandum pondus A.

Poteſt rota ferrata C [Fig. 72] ſupernè incumbere axi DE, unde plus ſpatij efficitur in quo moveatur pondus A, adeo ut rota P tunc propius ad laminam accedere poſſit.

[Fig. 72.]



[Fig. 73.]



An non melius rota P in extremo axe ſuo hærebit, et extra laminas horologij paululum tantum exſtabit pondere A intra laminas ad eundem axem affixo, et antiſacomatis vice fungente. ita melius includi poterunt rotæ omnes interiores.

Oportet ſatis diſtent laminæ binæ, ut ſpatium non deſit ponderi A.

Conſtat quidem librationes ponderum G, E [Fig. 73], virgæ abſque gravitate affixorum, iſochronas fieri ob pondus C inter curvas ſuſpenſum. Sed an idem ſit additis alijs ponderibus F, D? Omnino[4]).

— la maison de campagne Hofwijck habitée en ce temps par Huygens, on peut en conclure qu'il travaillait à la réalisation pratique de la nouvelle horloge tant à Hofwijck qu'à la Haye. Attendu que l'horloger J. van Ceulen n'est plus mentionné par lui après 1685 (note 5 de la p. 509), Huygens travaillait apparemment en ce temps avec B. van der Cloesen (voir la note 4 de la p. 516).

[4]) Nous avons fait ressortir plus haut (voir la note 6 de la p. 565) que Huygens semblait admettre

Quæramus primum, datis ponderibus E, G ſingulis $\infty\, a$; ponderibus D, F, ſingulis $\infty\, b$; diſtantijs AE, AG $\infty\, c$, diſtantijs AD, AF $\infty\, d$, quanta deberent poni pondera in locum extremorum E, G, ut æque celeri motu impellatur libra ex binis iſtis compoſita atque altera ex quaternis E, G, D, F.

Ponatur pondus E impulſum per arcum EG acquiſiviſſe celeritatem qua aſcenderet ad altitudinem e. Ergo pondus D eam celeritatem habebit qua aſcendat ad $\frac{dde}{cc}$. Ergo $ae + \frac{ddeb}{cc} \infty\, ex$, poſito x pro pondere ponendo in locum E vel G. Debet enim potentia vel pondus C, certâ altitudine deſcendendo peractâ, eum motum imprimere partibus libræ qualitercunque compoſitæ, ut à libra ſolutæ (atqui etiam ipſum C) motumque ſurſum convertentes, tantundem gravitatis aſcendat quantum deſcendit depreſſo pondere C; Ex axiomate nostro pag. 175 in marg. vires corporum non interire niſi edito effectu &c.[1]). Atqui x quoque acquirit celeritatem qua aſcendat ad e altitudinem.

Ergo $a + \frac{ddb}{cc} \infty\, x$. Cum ergo tali pondere $x \infty\, a + \frac{ddb}{cc}$ poſito utrinque in extrema virga, fiat motus libræ impreſſus actione ponderis C, æque celer ac libræ ex ponderibus E, D, F, G compoſitæ, idque emenſo arcu quovis EH. ſequitur totas utriuſque libræ librationes ijsdem temporibus abſolvi. Sunt autem libræ ex ponderibus

---

généralement déjà en 1683 que le mouvement d'un système rigide autour d'un axe fixe ne dépend que de la grandeur du moment moteur d'une part et de celle du moment d'inertie du système d'autre part. Cependant, il s'agissait en 1683 d'une généralisation plus ou moins intuitive de ce qui avait été démontré dans le cas du pendule composé. Il n'est donc pas étonnant qu'ici — quoiqu'aux p. 562—566 il considère des balanciers de différentes formes — après avoir admis l'isochronisme des vibrations de la verge impondérable de la Fig. 73, portant les deux poids quelconques E et G égaux et équidistants de A, il éprouve le besoin de démontrer que l'isochronisme subsiste lorsque la balance (ou le balancier), toujours symétrique par hypothèse par rapport au point A, porte plusieurs poids et que la verge est pondérable, le moment moteur restant le même.

Il faut d'ailleurs remarquer que l'existence de l'isochronisme, même dans le cas simple du balancier impondérable portant les deux poids égaux, n'a pas été démontré par Huygens, comme il semble le croire en 1693. Cet isochronisme ne peut être qu'approximatif. En effet, le poids C n'exerce pas seulement un moment, mais fait partie, lui aussi, du système dont il règle le mouvement, de sorte que le moment d'inertie de ce système n'est pas constant. C'est de quoi Huygens ne tient pas compte: dans la Fig. 74 et surtout dans la Fig. 78 on voit qu'il prend le poids régulateur assez grand. En 1694 (voir les p. 582 et suiv.) Huygens tient compte du fait que le poids régulateur doit „motum tribuere ipſis et ſibi", c.à.d. doit donner du mouvement tant à lui-même qu'au balancier, d'où résulte „minimus quidam defectus" (p. 583 et 586).

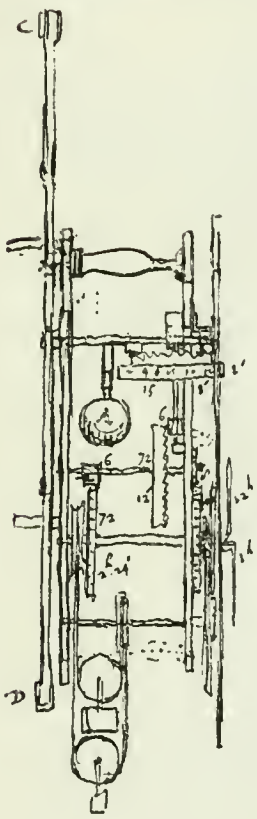
[1]) Voir la note 4 de la p. 553, ainsi que la p. 554, qui précèdent.

binis x compoſitæ librationes omnes iſochronæ. Ergo et libræ compoſitæ ex E, D, F, G. Ergo qualitercunque compoſita libra, dummodo æquilibrata, æqualia tempora oſcillationibus ſignabit operâ ponderis C.

Præſtat longè ut gravitas libræ tota, quantum poteſt, à centro removeatur. fit enim levior, manente oſcillationum tempore. Et centrum gravitatis ex libra et pondere C, tanquam in B poſiti, compoſitæ fit ampliori diſtantia ab A.

4 libræ in D idem tempus producunt quod 1 libra in E, diſtantia dupla.

[Fig. 74.]



On pourrait ſuſpendre l'axe du cercle balancier par deux rubans de ſatin de 3 ou 4 lignes de large, et rien que d'une $\frac{1}{2}$ ligne de long, les ferrant en haut dans des pieces attachees aux platines principales de l'horologe. Et tirant une fois bien fort, a fin qu'ils ne s'etendiſſent plus en ſuite. quoyque cette extenſion meſme ne nuiroit point ſi non en ce que l'axe ne reſteroit pas exactement horizontal, et qu'il approcheroit plus de la roue de rencontre.

On pourroit auſſi le ſuſpendre par un ruban de ſatin en ſorte que A et le balancier CD [Fig. 74] ſiſſent equilibre, en faiſant aller l'autre bout de l'axe dans une fente.

Il ne faut recourir a cette ſuſpenſion de rubans, que ſi on trouve que l'axe en pointe s'uſe, ce qui n'eſt pas apparent.

Un des grands defauts de l'horologe a pendule ſuſpendue dans le vaiſſeau eſtoit, que la force du pendule cauſoit un petit mouvement a toute l'horloge et cela plus ou moins ſelon la libertè des axes des chaſſis de fer. d'ou naiſſoit de l'inegalitè aux heures. Cela n'aura point lieu ici, quand meſme la boule A, qui eſt tranſportée d'un coſtè à l'autre produiroit quelque peu de mouvement à l'horloge. Car le balancier fait ſes tours egaux, quoyque ſon centre change de place. Outre cela on ne pouvoit ſe ſervir dans le vaiſſeau que d'un pendule court, de 10 pouces ou environ. Mais de cette nouvelle maniere on peut faire les balanciers de 2, 3 ou 4 pieds de diametre, et avec des balancements de 2, 3 ou 4 ſecondes. Et par conſequent faire ces horloges ſi juſtes qu'on veut, puiſque la juſteſſe depend de la grandeur et du poids des balanciers. Car par là la roüe de rencontre a moins de force à rendre les balancements inegaux, et la reſiſtence de l'air agit auſſi moins conſiderablement ſur un balancier peſant.

Il faut avoir ſoin que les axes des chaſſis BB pag. 172 [Fig. 41 de la p. 548] ſoient

bien libres à fin que l'axe du balancier demeure horizontal. Ils doivent eftre comme ceux des balances ordinaires, ainfi [Fig. 75] un peut [lifez: peu] en pointe en bas, et couchez dans des trous ronds.

Le bras d'ou pend la boule A, devant qu'on y attache cette boule, ou fans que fon poids agiffe, doit faire partie de l'Equilibre du balancier, de forte qu'il demeure en toute fituation lors qu'avec la main on foutient la boule.

[Fig. 75.]

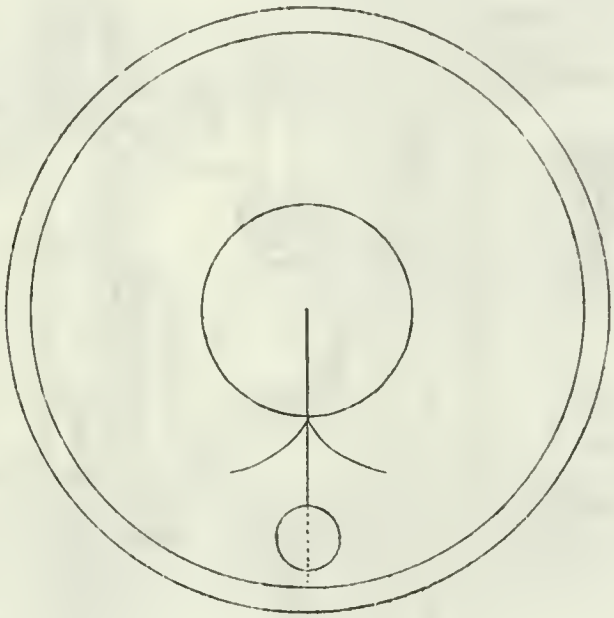
VII.

LA „LIBRA ISOCHRONIS RECURSIBUS" DE MARS 1694 [1]).

po. lin.

Optimum ad ſecunda ſcrupula. 36. $8\frac{1}{2}$ longitudo penduli ad ſecunda. mens. Paris. Longitudo Penduli 3 ped. 2. poll. $\frac{1}{3}$ lin. Rhenoland. [2]).

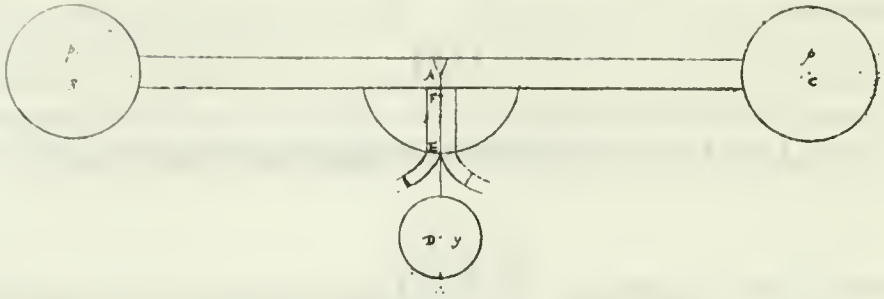
[Fig. 76.]



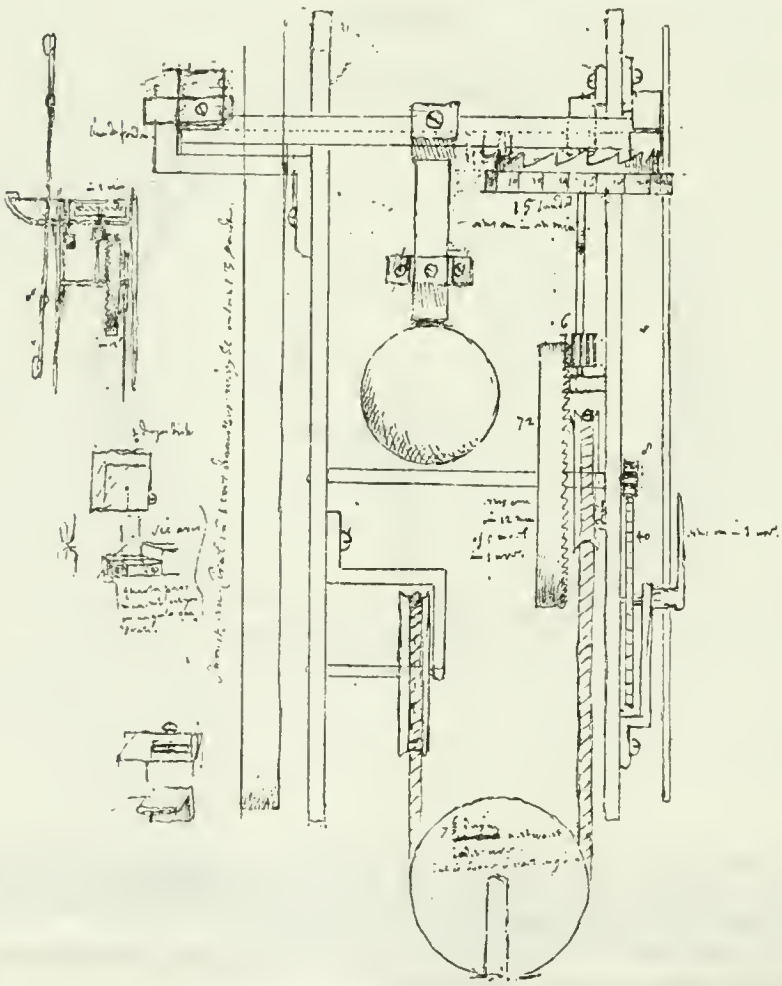
[1]) La Pièce VII est empruntée aux p. 91—99 et 101—107 du Manuscrit I. La p. 64 porte la date du 18 septembre 1693; c'est à la p. 99 que se trouvent la date du 15 mars 1694 et l'expression „libra iſochronis recurſibus"; voir la p. 578 qui suit.

[2]) Ces deux lignes (datant de 1693) sont empruntées aux p. 186—187 du Manuscrit H. Comparez le dernier alinéa de la p. 431 datant de 1670.

[Fig. 77.]



[Fig. 78.]



$12\frac{2}{5}$ ped. ∞ n longitudo penduli ſimplicis iſochroni compoſito.

AB, AC ∞ a [Fig. 77]. $\frac{xy}{2p+y} \infty$ AF [1]).

AE ∞ x

pondus D ∞ y

F centrum gravitatis B, C, D.

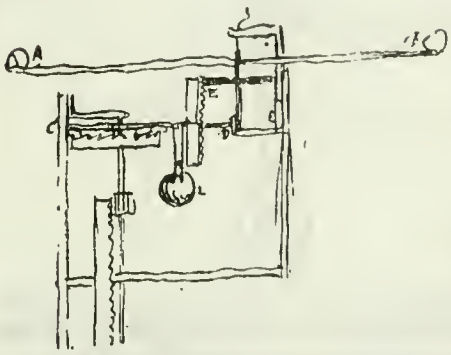
$\frac{2a^2p + x^2y}{xy} \infty n$ [2])

$2a^2p + x^2y \infty xyn$

$\frac{2a^2p}{nx - xx} \infty y$

Sit $x \infty \frac{3}{2}$ pollicis. $a \infty 6$ pol. $2p \infty 3$ pond.
152 poll. ∞ n. $\frac{432}{903}$ pond. ∞ y
fere $\frac{1}{2}$ pond.

[Fig. 79.]



Si on vouloit mettre le balancier horizontalement — [dans l'horloge de la Fig. 78 [3]) il eſt vertical] —, et le ſuſpendre [Fig. 79], il faudroit auſſi ſuſpendre l'axe CD avec des rubans. le balancier pourroit faire beaucoup de tours.

Il y auroit le frottement des dents en E. et un peu de libertè a ces dents, ce qui s'evite par l'autre maniere de balancier vertical. Il faudroit plus de poids en L a cauſe des tours plus grands qui ſont plus empeſchez par l'air.

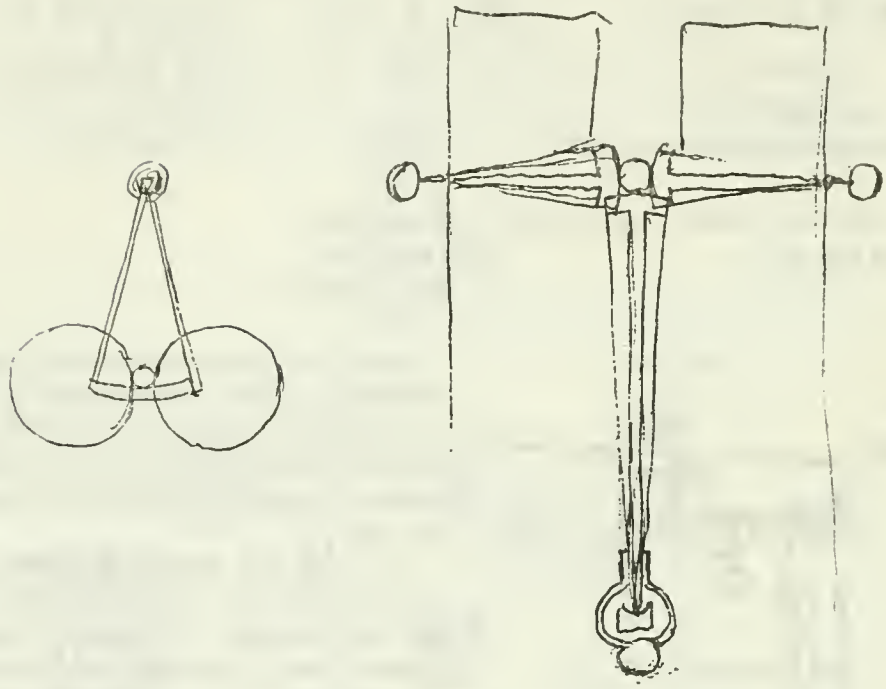
---

[1]) Ceci est la valeur de AF, lorsqu'on suppose le poids D ou y placé au point E. Il s'agit donc d'un calcul approximatif, comme Huygens le dit clairement dans l'alinéa de la p. 580 qui commence par les mots „Nota, EB est ..." Huygens se propose ici de calculer le poids D, les poids égaux B et C et leur distance à l'axe étant donnés ainsi que la longueur du pendule simple choisie de telle manière que le balancier exécute une oscillation simple en 2″ environ. Il se sert de pieds rhénans.

[2]) C'est la formule $l = \frac{I}{Mb}$ de la p. 47 où il est fait usage de la valeur trouvée pour AF ou b. La verge est considérée comme impondérable.

[3]) On lit dans la Fig. 78, outre les chiffres qui indiquent les nombres des dents: „bandt rondom [bande tout autour] ... in 1 min ... in 12′ ... $\frac{1}{2}$ duym dick ... sic axis ... quarta pars maneat integra in angulo quadrati .. Onrust, een Circel van 1 voet diameter: weeght ontrent 3 ponden" [balancier, circonférence de cercle d'un pied de diamètre; pèse environ 3 livres] ... 15 tanden, eens om in een min ... eens om in 12 min. of 5 mael in 1 ure ... 1 duym ... eens om in 1 ure ... $7\frac{6}{7}$ duym neerwaert ieder

[Fig. 80.]



Of van ſelfs recht blijft, het onderſte. men kan 't met een lintie helpen. of alle drie raecken. of de 2 van ter ſijden tegenwicht hebben. geen olie. perfect rond ſlijpen[Fig. 80].

Regula æquilibretur. tunc pondera apponantur extremis brachijs [Fig. 81], eousque demiſſa donec tempora 2 ſecundorum ſignent.

Erunt paulo ulterius demittenda quam ex calculo ſimplici; propter pondus brachiorum.

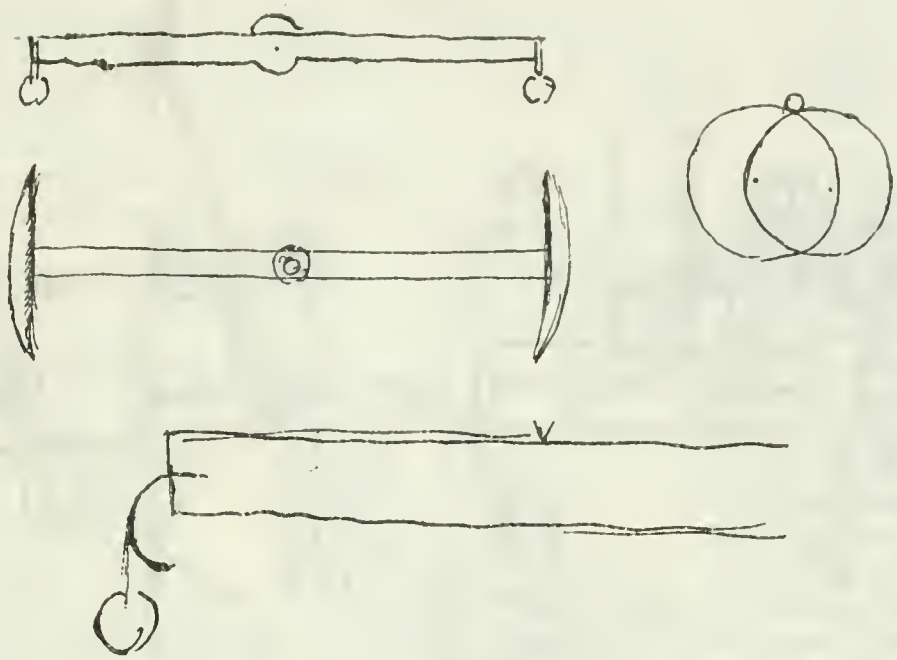
Sit regula $2\frac{1}{2}$ pedum. fieret proxime punctum ſuſpenſionis in brachijs $1\frac{1}{2}$ pollice

---

ure. dat is bijnae 6 voet in 9 uren" [le poids moteur descend à peu près de 6 pieds en 9 heures].

Il semble s'agir ici d'une horloge réellement construite en 1693—1694; en effet, il est question de la construction d'une horloge dans le passage de la p. 584 du T. X où Huygens parle, le 19 mars 1694, de la „nouvelle invention d'Horloge de Mer", dont il a „desia vu assez pour en avoir fort bonne opinion". Nous aurions évidemment pu placer cette figure tout aussi bien dans La Pièce VI, notre division des recherches de Huygens en différentes Pièces étant, comme on le conçoit, plus ou moins arbitraire.

[Fig. 81.][1])



infra centrum gravitatis brachiorum nudorum, ex quo libra ſuſpenditur, ex ſimplici calculo [2]). Jam propter pondus regulæ, fiet proxime 2 poll.

Poteſt ſi velimus reduci regula ad 2 pedes. Poſſunt et ſine curtatione, pondera ſuſpendi propiora centro libræ.

Sed melius ad extrema brachia appenduntur quod minus ibi ſentiunt vim horologij quo motus continuatur.

loot van 1 pondt . . . loot van 1 pondt . . . ſuſtinet 2 libr. [Fig. 82].

Si on pourroit ſuſpendre un fort grand balancier [Fig. 76] dans le vaiſſeau, avec ſon horologe, d'une roüe, attachée.

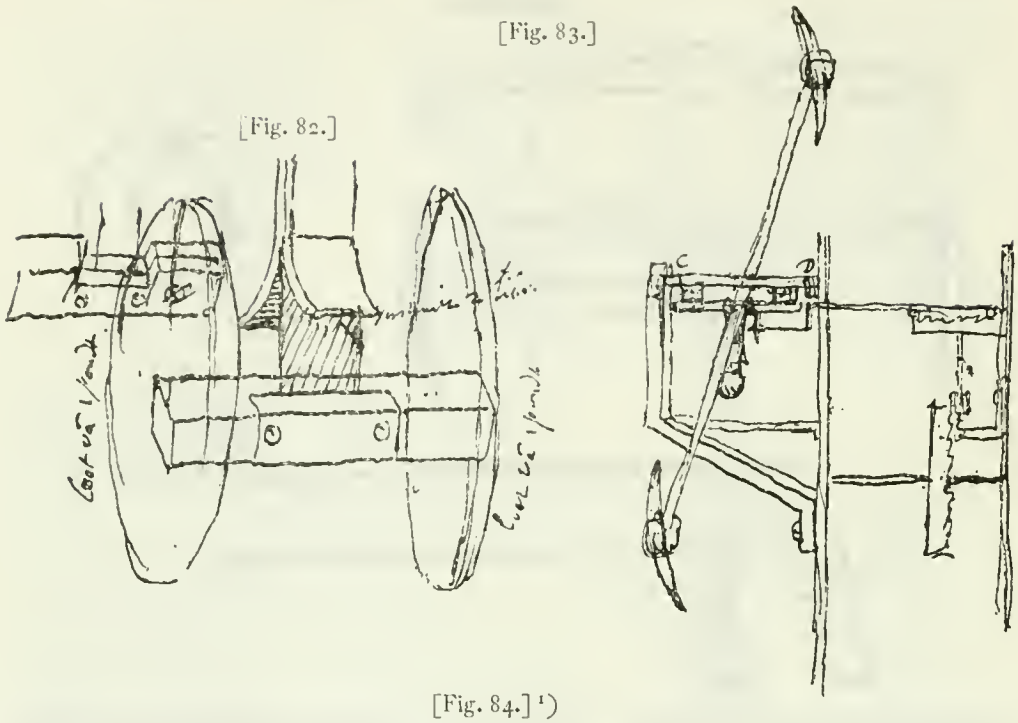
---

[1]) Comparez avec la troisième figure 81 la Fig. 38 de la p. 546 qui précède.

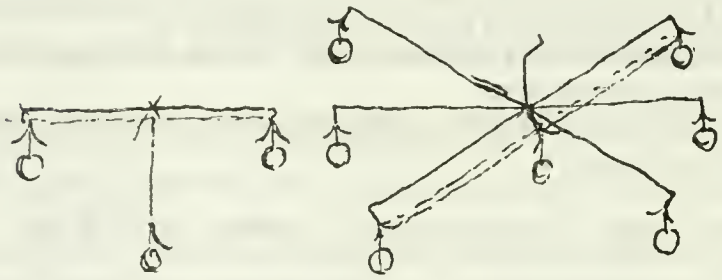
[2]) Pour que l'oscillation simple ait lieu en 2″, il faut que la longueur du pendule isochrone soit environ de $12\frac{2}{3}$ pieds rhénans. La formule $\frac{a^2}{b} = x$ de la p. 447 du T. XVI (c'est la formule $\frac{x^2 + y^2}{x} = a$ de la p. 319 du présent Tome) donne pour $a =$ environ $1\frac{1}{4}$ pied ou 15 pouces, et $x = 12\frac{2}{3}$ pieds $= 152$ pouces, $b =$ environ $1\frac{1}{2}$ pouce. La verge est supposée impondérable.

[Fig. 83.]

[Fig. 82.]



[Fig. 84.] [1])

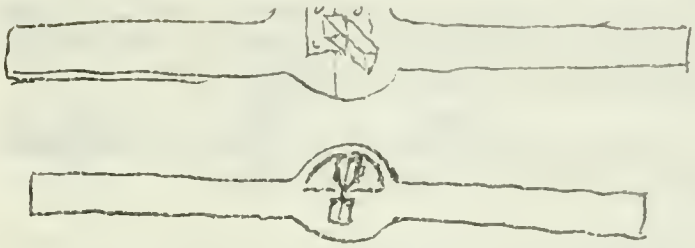


De balans [Fig. 83] met ſijn dwarſſe ſpil, en ſtaefje daerſe aenhanght, moet te ſamen van boven ingeleght werden in C, D. Aen de dwarſſe ſpil ſijn oock de boxhoorns vaſt met haer gewight. Elck van de 2 linten moet ontrent evenveel draegen. De boxhoorns konnen recht onder de balans komen, moeten gemackelijck aen de ſpil vaſt geſteken werden. Men ſal de ingeſneden gaeten moeten toe ſtoppen.

---

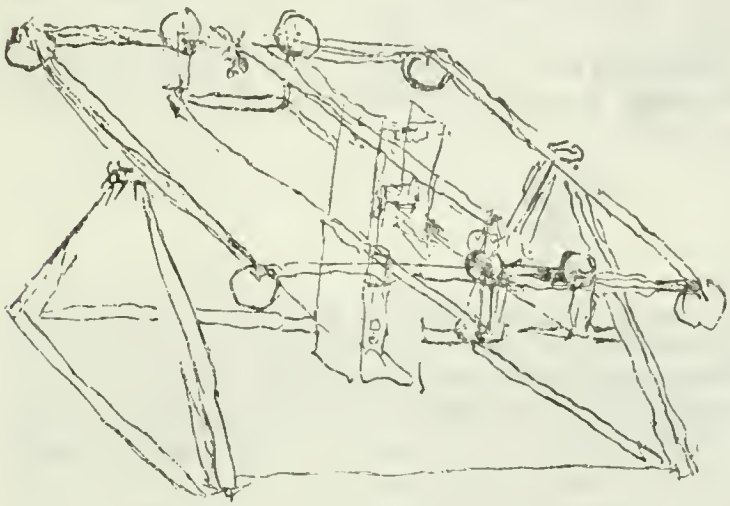
[1]) Jusqu'ici les balanciers employés ou proposés par Huygens en 1694 ne différaient pas beaucoup, semble-t-il, de ceux de 1693. Ici il commence à faire usage de plus d'une paire de „cornes de bouc", toujours taillées suivant des développantes de circonférences de cercle ou „hélicoïdes".

[Fig. 85.]



[Fig. 86.]

[Fig. 87.]



Op de kanten ſchuijns afgevijlt [Fig. 85]... $2\frac{1}{2}$ voet de heele lengde ... 3 d. Het rond van 3 duym in 't midden is om of men daer nae de balans aen 2 linten woude proberen te hangen op dat de ſtaef daer aen hanght binnen de balans kome.

Eerſt op een ſtomp mes, in een hol wiens radius $\frac{1}{4}$ duijm. gehardt. het magh nu wel rollende bewegen [Fig. 86]. De ſcherpte van 't mes moet reſpondeeren op 't middelpunt van de balans [Fig. 85]. of liever een weijnigh laegher komen om &c.... de nieuwe plaet [sur une feuille collée entre les p. 98 et 99 du Manuſcrit I il eſt queſton d'un „plaetje aen de hangende ſpil geſoudeert om de balans tegen te ſchroeven"] hoogh genoegh maecken om oock met de linten te proberen .... ſteuytingh voor 't ſwaeijen. lepels van d'onruſt ſpil polijſten. oock de rondſels ... Raemen van hout, om in 't ſchip te hangen [Fig. 87]. ſtaende op de vloer. hout op ſijn kant. gewichten aen de hoecken. Balans in reſerve die correct geſtelt is. de raemen vaſt ſetten als men die balans gebruijckt om te ſtellen. Hoe het werck te ſluijten, voor 't ſtof? alles met de balans in een geſloten kas. dewelcke boven uijt de raemen te laeten ſteecken. yſere aſſen en gaeten [Fig. 75], of beter gehard ſtael ... de gaten boven open laeten, dat is maer halve ronden. om de raemen te konnen uytlichten ... de koocker voor het gewicht en tegenwicht vaſt aen den binnenſten raem of planck hechten. dan ſal het gewight geen noodt hebben van ſlingeren alhoewel 2 voet langh. Het Horologie met ſijn kaſſe op de planck van den binnenſten raem vaſt ſetten ... modelletje maecken van Caertpapier of hout ... Onder in de planck daer

de kas van 't horlogie op ſal ſtaen een gat te maecken, en daer onder tegen aen de koker voor de gewighten. Onder in de grondt van deſe koker ſoo veel loodt te leggen dat het de kas van 't horlogie over endt houdt ſtaen. Selfs als het eerſt op gewonden is. Sullen dan geen looden aen de raemen noodigh ſijn [1]).

Inveni 15 Mart. 1694. Libram iſochronis recurſibus quod erat ſatis difficile, etiam poſt libram iſochronam de qua ab hinc anno in lib. H pag. 180 [2]).

Separatim conſideranda movens grave, et moles corporis moti, etiam cum utrumque in eodem reſidet [3]).

Pro gravitate deorſum trahente poteſt poni Elater ſine pondere [4]).

Moles mota [5]) conſideretur quaſi horizontaliter moveatur, cujus moles ut certum motum ac celeritatem accipiat, certa vi trahente [6]) opus eſt.

---

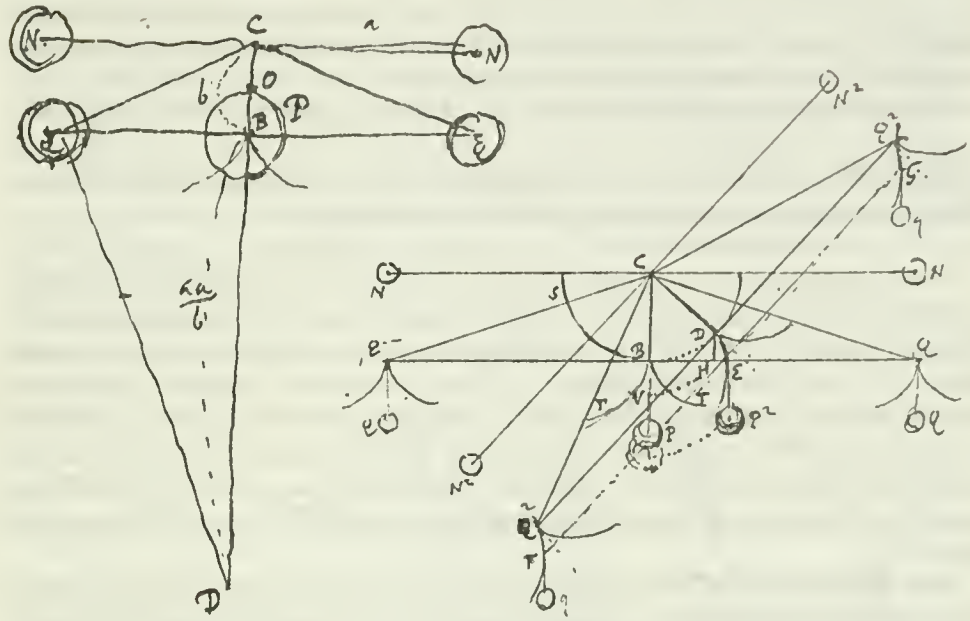
[1]) Traduction: „Limé en biseau... Longueur totale de $2\frac{1}{2}$ pieds [Fig. 85]. Trois pouces. La partie ronde de trois pouces au milieu sert à pouvoir suspendre par après, si l'on veut, le balancier à deux rubans: la barre à laquelle il est suspendu pourra ainsi passer par lui.

D'abord sur un couteau obtus, dans un creux à rayon d'un quart de pouce. Trempé. Il peut maintenant y avoir roulement [Fig. 86]. L'arête du couteau doit correspondre au centre du balancier [Fig. 85], ou plutôt être située un peu au-dessous de lui, pour que etc.... Faire la nouvelle plaque [voir le texte] assez haute pour faire aussi un essai avec les rubans. Empêcher par amortissement les oscillations trop larges. Polir les palettes du balancier. Les pignons de même ... Châssis de bois pour suspendre [l'horloge] dans le vaisseau. Placés sur le plancher [Fig. 87]. Le bois sur le côté. Des poids aux angles. Balancier correctement réglé en réserve. Fixer les châssis lorsqu'on se sert de ce balancier pour mettre les choses au point [?]. Comment protéger l'ouvrage contre la poussière? Le tout, y compris le balancier, dans une boîte fermée. Laisser celle-ci dépasser les châssis en hauteur. Les axes et les trous [Fig. 75] en fer, ou plûtot en acier trempé ... Laisser les trous ouverts par en haut, donc des demi-circonférences seulement, pour pouvoir enlever les châssis ... Attacher fermement le cylindre pour le poids et pour le contrepoids au châssis (ou planche) intérieur [daus une petite figure en marge on voit en effet une planche en guise de châssis intérieur; dans la Fig. 87 cette planche couperait l'horloge par le milieu; celle-ci doit donc être rehaussée pour pouvoir reposer sur la planche]. De cette façon le poids, quoique long de 2 pieds, ne risquera pas de ballotter. Fixer l'horloge avec sa boîte sur la planche du châssis intérieur ... Construire un petit modèle de carton ou de bois. Percer un trou dans la planche sur laquelle sera placée l'horloge; là dessous, contre [la planche], le cylindre pour les poids. Mettre tant de plomb au fond de ce cylindre que la boîte de l'horloge soit par là maintenue dans la position verticale. Même lorsqu'on vient de la remonter. Alors il ne faudra plus de plombs aux châssis."

[2]) Il s'agit de la „libratio isochrona" du 6 mars 1693: voir le début de la Pièce VI qui précède.

[3]) En séparant nettement la notion du poids d'un corps de celle de sa masse, Huygens se place

[Fig. 88.] [Fig. 89.]



Duc ſingula N, N, P [Fig. 88][7]) in quadrata diſtantiarum ab C: ſummam productorum divide per productum ex ſumma in N, N, P in CO diſtantiam centri gravitatis N, N, P. habebis CD longitudinem penduli iſochroni. Ex propoſitione 5 de Centro Oſcillationis[8]).

$$\frac{2aa + 2bb}{2b}$$

$$\frac{aa + bb}{b} \infty \text{ CD bon.}$$

Pendulum compoſitum ex ponderibus æqualibus N N, in recta per punctum ſuſpen-

---

au point de vue de Newton. Comparez notre remarque à la p. 45 qui précède (note 7).

4) Comparez les considérations de 1675 (p. 497) sur l'„incitatio".

5) Lisez plutôt „corpus motum".

6) La „vis trahens" est apparemment une quantité d'„énergie" (voir la note 6 de la p. 359 du T. XVI) déterminée. Comparez l'expression „vis motus" (même page).

7) Le poids P est supposé égal à la somme des poids égaux N, N.

8) P. 259 du présent Tome. Comparez le calcul de la p. 573 (note 2).

ſionis C, æqualiter diſtantibus, et ex pondere P, duobus ſimul N, N æquali, affixoque in virga perpendiculari CPD in B, Erit iſochronum pendulo compoſito ex ponderibus binis Q Q ipſis N N æqualibus, affixis in brachijs BQ horizontalibus quorum longitudo ipſis CN æqualis ſit, manente ſuſpenſione ex C [1]).

Pendulum ſimplex utrique iſochronum erit CD cujus pars BD tertia ſit proportionalis duabus CB, BQ.

Curvæ BT, inter quas P pondus ſuſpenditur, atque item pondera QQ, ſunt deſcriptæ ex evolutione circumferentiæ BS radium CB habentis.

Nota, EB eſt æqualis arcui DB [Fig. 89], Et percurritur a pondere P^2 (quatenus movetur horizontaliter) proportionaliter ut partes arcus DB. Ergo eadem vi, ſive deſcenſu ponderis P opus eſſet ad conciliandam eandem celeritatem pendulo compoſito ex N, N, et P in B affixo, atque ex N N, et P inter curvas ſuſpenſo; conſiderando tantum motum horizontalem ponderis P. Sed magis deſcendit pondus P poſteriore caſu quia curva DE longior rectâ DH. Itaque hinc fit ut paulo celeriorem motum accipiat pendulum, *ex* N N *et* P *pendente compoſitum*, quam *ex* N N *et* P *in* B *fixo*. quod ita eſſe conſtat, ob majores ſemper diſtantias rectæ EP^2 quam DH à perpendiculo CB.

Sicut pendulum ex N N et P appenſo inter curvas noſtras helicoides efficit pendulum iſochronis oſcillationibus, ſuſpenſum ex C. Ita quoque ex C eodem ſuſpenſum pendulum ex ſolis Q Q ponderibus, inter ſimiles curvas utrinque pendentibus, iſochronas oſcillationes habebit, et alterius illius penduli æquales. Hoc modo carere poſſumus gravitate ponderis P.

Demonſtratio æqualitatis penduli QCQ hinc petitur, conſiderando in utroque pendulo duos motus, quorum alter eſt ponderum Q Q et N N quatenus circulariter moventur. qui motus utrobique æquales ſunt. ut intelligitur motâ recta CB in CD, unde N N jam in N^2N^2, et Q Q in Q^2Q^2; ſed ipſa pondera Q Q jam quaſi eſſent in G et F punctis curvarum ſeu cornuum, quæ ſunt neceſſario in recta per E ducta et æquidiſtante Q^2Q^2. quæ FEG itaque et rectæ N^2N^2 parallela eſt.

Centrum gravitatis ponderum *q q* [Fig. 89] quod in P^2 et per EP^2 agere cenſendum, agit vi deſcenſus ſui ∞ BV, in rectam CD, ad transponendum GF in QQ, hoc eſt ad convertendum GF ponderibus *q q* oneratum ex ſitu GF in QQ et admovendum pondus P motu hoc quanta eſt diſtantia EB.

Similiter vero centrum gravitatis ponderis P^2 per eandem EP agit in rectam CD,

---

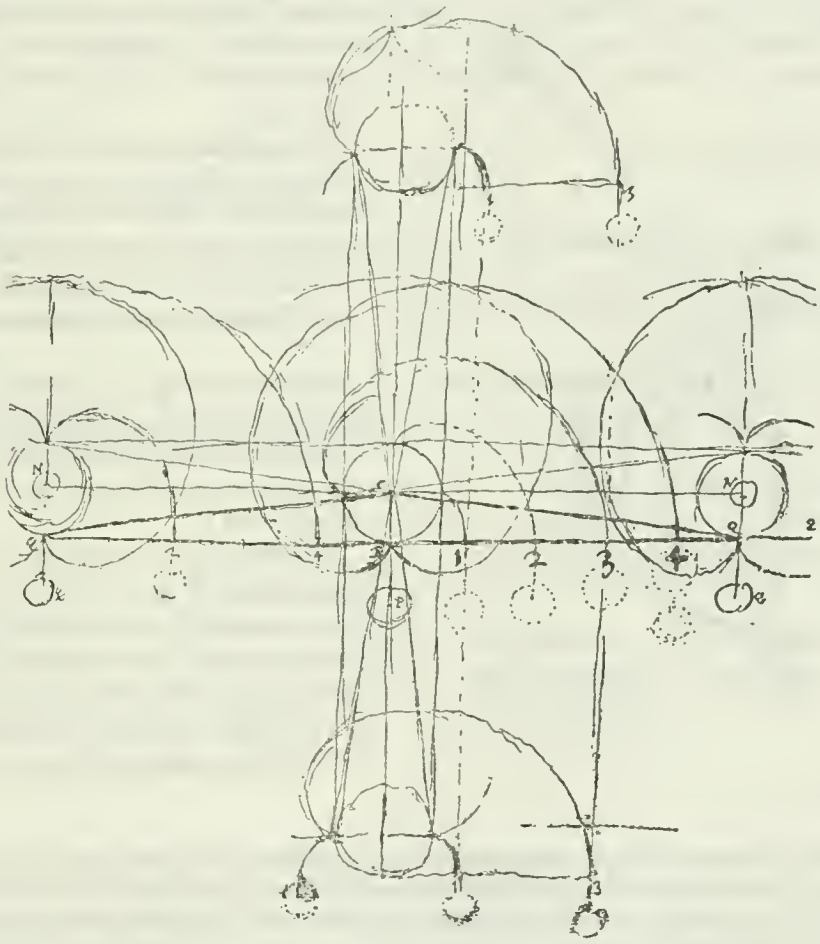
[1]) Puisque la formule $\frac{aa + bb}{b}$ = CD est identique à la formule $\frac{x^2 + y^2}{x} = a$ de la note 2 de la p. 575.

ad transponendum N^2N^2 in NN (nam ipſa pondera N^2N^2 hic nihil juvant), et ſeipſum ab E in B.

Agunt ergo in æqualia et eodem modo. Unde et eosdem motus producere debent. atqui pendulum NNP eſt iſochronum (demonſtratio lib. H pag. 180). Ergo et pendulum QQ. Deſcendit autem centrum gravitatis ponderis P^2 per parabolam EV, ut demonſtravi lib. H pag. 180 [Fig. 66 et note 4 de la p. 564].

Egregium hic quod pondus brachiorum ipſius libræ non impediunt [lisez: impedit] quin reciprocationes fiant iſochronæ [2]). faciunt enim lentiores tantum. atque ita quoque quodcunque corpus adjungetur, dummodo habeat centrum gravitatis in C puncto ſuſpenſionis libræ.

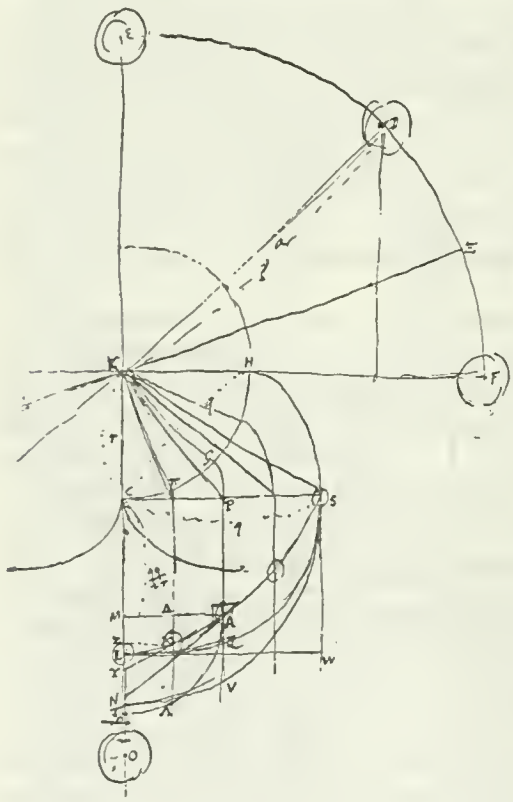
[Fig. 90.]



[2]) Voir à ce sujet la note 4 de la p. 567 qui précède.

La balance, ou pendule composé QCQ [Fig. 88, 89 et 90] suspendu en C, et les poids Q Q entre les helicoides, que je suppose icy [Fig. 90] continues, (si l'on veut a l'infini), et aussi les rubans qui soutienent les poids Q Q: ce pendule dis-je quand au lieu de balancemens, il feroit un ou plusieurs tours entiers sur le point C, il ira et viendra par des retours isochrones, et aussi vistes que s'il faisoit seulement de petits balancemens [1]). Et le centre de gravitè des poids Q Q sera tousjours le mesme que celuy du poids P suspendu entre de pareilles helicoïdes, qui commencent en B dans la droite QQ. Et les points de contact du ruban du poids P où il touche son helicoïde, coupera tousjours en deux egalement les points de contact des rubans Q Q avec leurs helicoïdes. Ainsi 1 est entre 1,1; 2 entre 2,2; 3 entre 3,3. &c. C'est ce que j'ay reconnu par cette figure [1]).

[Fig. 91.]



Ce pendule composè des poids Q Q est encore isochrone a celuy qui est composè des poids N N, au bout des bras CN, (qui sont en ligne droite) et du poids P double de chaque Q, comme il a estè dit p. 99 [p. 579—580].

Pondus S [Fig. 91] [2]) descendens per SL movet E per EF et simul O sursum per similem quadrantem, daturque proportio ponderum S ad E vel O, quæ *s* ad *e*.

Quæritur quam celeritatem acquirant pondera E et O, ubi ad lineam horizontalem FK pervenerint. Deinde quam acquirant cum utrinque per arcum DF ∞ $\frac{1}{2}$ EF moventur; Et quæ sit utrobique proportio celeritatum. GP est helicoides ex evolutione arcus

[1]) Comme la largeur de la page du manuscrit n'était pas suffisante, le chiffre 2 [Fig. 90] à droite est écrit un peu à gauche de l'endroit où il devrait se trouver, tandis que les chiffres 1 et 3 ne sont indiqués que dans les parties supérieure et inférieure de la figure, lesquelles correspondent aux parties droite et gauche.

[2]) Comparez la Fig. 91 avec la Fig. 66 de la p. 564. SL correspond à la parabole RL de la Fig. 66. S est le poids regulateur, EO le balancier.

GC, quam tangit perpendicularis PA. Celeritas P verſus C eſt eadem ac celeritas G verſus C. Ergo et celeritas ponderis A verſus M quatenus nempe eſt horizontalis, eadem quæ G verſus C [3]). ſed celeritas ponderis A verſus N erit ad celeritatem A verſus M, vel G verſus C, ut tangens AN ad AM vel PC vel GC.

Oportet pondera E et O, hoc eſt $2e$, celeritate acquiſita cum pervenere in rectam FK, ſurſum converſâ; itemque pondus S celeritate quam habebit in L ſurſum converſâ, ſi ducantur ſingulorum altitudines in ipſa pondera, fieri ſummam productorum æqualem ei quæ fit ex pondere S in altitudinem LC, quoniam ſolum pondus s, omnia movens, talem motum tribuere ipſis et ſibi debet quo æquale fiat momentum aſcenſus ponderum [4]) momento deſcendentis S ex altitudine CL.

Eſt autem celeritas quam habet E poſtquam deſcendit in F, et O poſtquam aſcendit ad eandem horizontalem FK, ad celeritatem ponderis S cum venit in L, ſicut FK ad KC, quia pondus E in arcu EF, et punctum H in arcu HC, et contactus fili et curvarum HS, GP ita ſimul feruntur, ut illa arcus ſuos, hoc rectam SC, eadem proportione fecent.

Sit igitur x celeritas ponderis E cum eſt in F. KC ∞ r. CH ∞ q. Et KF ſit ∞ a. Ergo celeritas ponderis S in L erit $\frac{rx}{a}$.

Filum enim unde pendet pondus S, dum inde deſcendit hoc per parabolam SAL, ſemper pendet perpendiculariter. Ideoque pondus S, cum eſt in L, æquè celeriter movetur ac punctum C radij KC.

Sit n celeritas quam haberet S [5]) cadens acceleratione naturali per CL. Eſt autem $\frac{qq}{2r}$ ∞ CL altitudo deſcenſus ponderis S.

$$nn \text{———} xx \text{———} \frac{qq}{2r} \Big/ \left.\begin{matrix}\frac{q^2xx}{2rnn} \\ 2e\end{matrix}\right\} \text{m.}$$

altitudo quo pervenire poterit pondus E vel O, cum ad horizontalem FK pervenerint.

$$\frac{2eq^2xx}{2rnn}$$

productum ex $2e$ in altitudines quo poſſunt aſcendere poſtquam venere in horizontalem FK.

---

[3]) Huygens admet ici, comme antérieurement, et comme il le rappelle un peu plus loin, que la partie libre du ruban auquel le poids A est suspendu, reste constamment vertical.

[4]) Le „momentum ascensus" est donc ici la quantité d'énergie potentielle, pour nous servir de cette expression moderne (comparez la note 5 de la p. 341 du T. XVI) qui correspond à l'ascension du poids considéré.

[5]) Ou un autre poids quelconque.

qu. celer.is
pond. S in L

$$mm \text{ ——— } \frac{rrxx}{aa} \text{ ——— } \frac{qq}{2r} \Big/ \frac{q^2rrxx}{2raam}$$ altitudo ad quam pervenire poterit pondus S in L delatum.

$$s \Big\} \text{ m.}$$

$$\frac{sq^2rrxx}{2raam}$$ productum ex s in altitudinem quo poterit ascendere postquam venit ab S in L.

Summa productorum $\frac{2eq^2xx}{2rmm} + \frac{sq^2rrxx}{2raam} \infty \frac{q^2s}{2r}$ productum ex s in altitudinem descensus sui CL, cum libere cadit.

$$2eaaxx + srrxx \infty saam$$

$$xx \infty \frac{saam}{2eaa + srr}$$

$$x \infty \sqrt{\frac{saam}{2eaa + srr}}.$$

Jam quæratur quam celeritatem habeat E cum pervenit in D, punctum medium quadrantis EF. ut videamus an hæc celeritas sit ad præcedentem x sicut PV applicata in quadrante CST ad radium CT vel CS. Sic enim esse debebat ut librationes fierent exactè isochronæ. Sunt enim celeritates acquisitæ in arcu EF sicut celeritates puncti contactus per lineam SC. Ideoque esse debent ut applicata PV ad CT, quod demonstratur ex motu in cycloide [1]).

Sit celeritas ponderis E in D ∞ y [Fig. 91].

$$a \text{ ——— } r \text{ ——— } y \Big/ \frac{ry}{a}$$ celeritas horizontalis ponderis S cum pervenit in A. quæ æqualis celeritati quam tunc habet punctum G.

Parabolæ LA latus rectum est ∞ 2KC sive $2r$. CS est ∞ CH sive q. Et CP ∞ $\frac{1}{2}q$.

---

[1]) Comparez la note 1 de la p. 501 qui précède. On voit ici que Huygens n'admet pas d'autre mouvement oscillatoire isochrone (c.a.d. à période indépendante de l'amplitude) que la vibration harmonique.

$$\begin{array}{lcl} & \text{AM} & \text{AM} \quad \text{ML} \\ \text{l.rect.} & & \\ 2r & \frac{1}{2}q & \frac{1}{2}q \Big/ \frac{\frac{1}{4}qq}{2r} \infty \frac{\frac{1}{8}\frac{qq}{r}\text{ML}}{\frac{1}{4}\frac{qq}{r}\text{MN}^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{4}qq & \text{qu. AM} \\ \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr} & \text{qu. MN} \\ \hline \frac{1}{4}qq + \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr} & \text{qu. AN} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{MA} & \text{AN} & \\ \frac{1}{2}q & \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr}} & \frac{ry}{a} \Big/ \frac{ry\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr}}}{\frac{1}{2}aq} \end{array}$$

celeritas absoluta ponderis S cum venit in A. nempe secundum tangentis directionem AN.

$$\begin{array}{lcl} nn & yy & \frac{qq}{2r} \Big/ \left.\begin{array}{r} \frac{q^2yy}{2rnn} \\ 2e \end{array}\right\} \text{m.} \\ \hline & & \frac{2eq^2yy}{2rnn} \text{ productum.} \end{array}$$

altitudo quo perveniret pondus E vel O post emensum arcum ED.

$$nn \quad \frac{\frac{1}{4}rryyqq + \frac{1}{16}\frac{rryyq^4}{rr}}{\frac{1}{4}aaqq} \quad \frac{q^2}{2r} \Big/ \frac{srryyqq + \frac{1}{4}syyq^4}{2rnnaa}$$ [2])

[2]) Hauteur à laquelle peut s'élever le poids S avec la „celeritas absoluta cum venit in A".

ſumma productorum

$$\frac{srryyqq + \frac{1}{4}syyq^4}{2rmmaa} + \frac{2eq^2yy}{2rmm} \infty \frac{3}{4}\frac{q^2s}{2r}$$ productum ex s in altitudinem deſcenſus ſui liberi ex CM [1]).

$$\frac{srryy + \frac{1}{4}syyq^2}{mmaa} + \frac{2eyy}{mm} \infty \frac{3}{4}s$$

$$srryy + \frac{1}{4}sq^2yy + 2aaeyy \infty \frac{3}{4}saamm$$

$$yy \infty \frac{\frac{3}{4}aamns}{rrs + \frac{1}{4}qqs + 2aae}$$

$$y \infty \sqrt{\frac{\frac{3}{4}aamns}{rrs + \frac{1}{4}qqs + 2aae}}$$

$$xx + yy = \frac{1}{2aae + srr} + \frac{\frac{3}{4}}{2aae + srr + \frac{1}{4}qqs}$$

$$= 2aae + srr + \frac{1}{4}qqs + \frac{3}{4}\,2aae + \frac{3}{4}srr$$

$$xx + yy = 8aae + 4srr + qqs + 6aae + 3srr$$

$$= 4 + 3 - \frac{3qqs}{8aae + 4srr + qqs}.$$

Facile apparet futurum exacte xx ad yy ut 4 ad 3, ſi tantum motum horizontalem ponderis in A conſideraſſem ac tunc idcirco librationes iſochronas collectum iri absque vel minimo diſcrimine [2]).

Sit $r \infty 7$, $q \infty 11$, $a \infty 52\frac{1}{2}$, $s \infty 4$ pond. $2e \infty 4$ pond. . . $1452\ 3qqs$, $784\ 4rrs$, $44100\ 8aae$

$$xx + yy = 4 + 3 - \tfrac{1}{31}$$

$$x + y = 2 + 1{,}723$$

debebat eſſe $x + y = 2 + 1{,}732$ hoc eſt ut $2 + \sqrt{3}$.

Eſt igitur minimus quidam defectus, ut nempe rectæ repræſentantes celeritates ponderis venientis ab E, in punctis D et F, non ſint exactè ut applicata PV ad CT, uti debebant eſſe, ſed ut linea deficiens circiter $\frac{9}{2000}$ ſive $\frac{1}{191}$ [3]) ſui parte à PV eſt ad CT. Quod cum ſit tam exiguum diſcrimen in tantis arcubus, ſatis apparet nullius momenti eſſe in hiſce librationibus [4]); ut magis ab aeris occurſu fortaſſe metuendum ſit.

[1]) $CM = CL - ML = \frac{q^2}{2r} - \frac{q^2}{8r} = \frac{3}{4}\frac{q^2}{2r}$.

[2]) Dans le cas d'une vibration harmonique le carré de la plus grande vitesse est en effet au carré de la vitesse du mobile au moment où l'écart a atteint la moitié de sa valeur maxima, comme 4 est à 3. Si Huygens n'avait considéré que le mouvement horizontal du poids S au point A, c.à.d. la vitesse $\frac{ry}{a}$, la hauteur à laquelle le poids S eût pu s'élever avec cette vitesse aurait été $\frac{rq^2y^2}{2a^2n^2}$, et l'équation contenant la „summa productorum" aurait été $\frac{srq^2y^2}{2a^2n^2} + \frac{eq^2y^2}{rn^2} = \frac{3sq^2}{8r}$, d'où $y^2 = \frac{3sa^2n^2}{4r^2 + 8ea^2} = \frac{3}{4}x^2$.

Quantillo autem hinc inæquales fiant nondum liquet, et difficile effet inquirere, nec operæ pretium.

Pag. præcedenti habebamus $xx - yy = 4 - 3 - \frac{3qqs}{8aae + 4rrs + qqs}$. Ergo, si velim s effe ∞ $2e$ [5]), ut fimul inquiram in libram QCQ pag. 99 [Fig. 88 de la p. 579],

$$xx + yy = 4 + 3 - \frac{3qq}{4aa + 4rr + qq}.$$

Si examinaffem an pondus E, ab D perveniens in F, in pendulo hoc compofito acquirat celeritatem quæ fit ad celeritatem quam habuit tranfiens in Ξ, (pofita KΞ media inter KD, KF) ficut in quadrante MAΩ habet [6]) MΩ ad applicatam ΔA, pauca tantum mutanda fuiffent. Pofitis enim x et y pro celeritatibus poft DF et ΞF. Erit celeritas ponderis S poft peractam AL ∞ $\frac{rx}{a}$. quia celeritates in arcu DF incedunt proportionaliter ut in arcu GC vel etiam in recta PC, in M vero fit eadem celeritas quæ in L. tantum pro q fcribendum $\frac{1}{2}q$, quia XZ ∞ $\frac{1}{2}$ AM.

Ita tandem fiet $xx + yy = 4 + 3 - \frac{\frac{3}{4}qq}{4aa + 4rr + \frac{1}{4}qq}$ hoc eft $x + y = 2 + \sqrt{3 - \frac{\frac{3}{4}qq}{4aa + 4rr + \frac{1}{4}q^2}}$.

Cum debuerit effe x ad y ut ΩM ad AΔ, hoc eft ut 2 ad $\sqrt{3}$.

Ita proxime quadruplo minor jam erit differentiola in defectu quadrati yy.

Hæ differentiolæ eo quoque minores erunt quanto brachia a longiora fient ceteris manentibus. Sunt autem tale quid errores qui hinc nafci poffunt, quale in pendulis, quod appenfum pondus non eft redactum ad punctum, ficut requireretur ut cycloides recurfus perfecte ifochronos efficiant [7]).

Quatenus pondus movens pendet ad perpendiculum, et premit æquali gravitate, eatenus librationes funt ifochronæ. Sed minimum quid deeft ne perfecte pendeat ad perpendiculum, neve eadem gravitate premat. quod tamen nullius momenti videtur; eoque minoris erit quo librationes lentiores faciemus, et minores. Si fuerint 2″ fecundorum, deflectet filum ponderis moventis à perpendiculo quantum faceret pendulum

[3]) C.à.d. $\frac{9}{1723}$.

[4]) L'amplitude des oscillations des grands balanciers verticaux, projetés ou construits, était faible.

[5]) Comme dans le calcul numérique qui précède.

[6]) Ou plutôt „se habet".

[7]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 518.

12 pedum [1]) cujus pondus imum eadem latitudine moveretur qua pondus movens. Eadem vero tempora ſignat libra cujus pondera moventia ſunt in extremis brachijs.

Quæritur quam celeritatem habeat pondus E [Fig. 91], cum ex D venit in F, ſimulque O tantundem per ſimilem arcum aſcendit.

Cum pondus E eſt in D, eſt pondus S in A, ita ut AP cadat in mediam CS. Sit AM perpendicularis in CL. Jam cum ſit poſita n celeritas quam habet pondus S cadens celeritate naturali per CL, erit $\frac{1}{2}n$ celeritas ponderis S, cadentis naturaliter per ML.

Eſt autem ML ∞ $\frac{1}{4}$ CL, hoc eſt $\frac{1}{8}\frac{qq}{r}$. Sit z celeritas ponderis E cum venit ex D in F.

$$\frac{1}{4}mn \text{ ——— } zz \text{ ——— } \frac{1}{8}\frac{qq}{r} \Big/ \frac{\frac{1}{2}zzqq}{rmn}$$ altitudo quo pervenire poterit pondus E vel O cum ad horizontalem FK pervenerint.

$$2e$$

$$\frac{ezzqq}{rmn}$$ productum ex $2e$ in iſtam altitudinem.

KF KC

$$a \text{ ——— } z \text{ ——— } z \Big/ \frac{rz}{a}$$ celeritas ponderis S cum erit delatum in L ex A [2]).

qu. celer. p. S in L

$$\frac{1}{4}mn \text{ ——— } \frac{rrzz}{aa} \text{ ——— } \frac{1}{8}\frac{qq}{r} \Big/ \frac{\frac{1}{2}rzzqq}{mnaa}$$ altitudo ad quam pervenire poterit pondus S in L delatum ex A.

$$s \Big\} \text{m.}$$

$$\frac{\frac{1}{2}srzzqq}{mnaa}$$ productum ejus altitudinis in pondus S.

summa productorum

$$\frac{ezzqq}{rmn} + \frac{\frac{1}{2}srzzqq}{mnaa} \infty \frac{1}{8}\frac{qqs}{r}$$ productum altitudinis ML quo aſcendere poterit pondus S in ipſum s.

$$\frac{ezz}{mn} + \frac{\frac{1}{2}srrzz}{mnaa} \infty \frac{1}{8}s$$

$$aaezz + \frac{1}{2}srrzz \infty \frac{1}{8}mnaas$$

$$zz \infty \frac{\frac{1}{8}mnaas}{aae + \frac{1}{2}srr} \text{ vel } \frac{saamn}{8aae + 4srr}$$ [p. 584] itaque apparet eſſe $zz \infty \frac{1}{4}xx$ invento pag. 103 et $z \infty \frac{1}{2}x$.

---

[1]) Comparez la note 5 de la p. 509 qui précède.

[2]) Le fil étant toujours supposé vertical (note 6 de la p. 563).

Sit porro celeritas ponderis E cum ex D venit in Ξ, medium arcus DF, atque item ponderis O per ſimilem arcum elati. Sit inquam iſta celeritas ∞ u.

a — r — u / $\frac{ru}{a}$ celeritas horizontalis ponderis S cum pervenit in X ex A, quæ æqualis nempe celeritati puncti H verſus C.

XZ XY

$\frac{1}{4}q - \frac{1}{4}\sqrt{qq + \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr}}$ $\frac{ru}{a}$ / $\frac{ru}{aq}\sqrt{qq + \frac{1}{16}\frac{q^4}{rr}}$ celeritas abſoluta ponderis S cum venit in X, nempe in directione tangentis XY.

$\frac{1}{16}\frac{qq}{r}$ ∞ ZY, nam MN erat ∞ $\frac{1}{4}\frac{qq}{r}$ pag. 102 [p. 585].

$\frac{1}{16}qq$ qu. XZ

$\frac{1}{256}\frac{q^4}{rr}$ qu. ZY

$\frac{1}{16}qq + \frac{1}{256}\frac{q^4}{rr}$ qu. XY [3]).

quad.[a] celeritatum

nn — $\frac{rru + \frac{1}{16}uuqq}{aa}$ — $\frac{qq}{rr}$ / $\frac{qqrruu + \frac{1}{16}uuq^4}{2raann}$ altitudo ad quam aſcendere poterit pondus S celeritate acquiſita in X.

s

$\frac{sqqrruu + \frac{1}{16}suuq^4}{2raann}$

nn — uu — $\frac{qq}{rr}$ / $\frac{uuqq}{2rnn}$ altitudo quo poteſt aſcendere pondus E cum venit in Ξ.

productum ex s in altitudinem aſcenſus liberi ponderis S ex caſu libero per MZ. $\frac{\frac{3}{16}qqs}{2r}$ ∞ $\frac{euuqq}{rnn} + \frac{sqqrruu + \frac{1}{16}suuq^4}{2raann}$ ſumma productorum

$\frac{3}{16}saann$ ∞ $2euuaa + srruu + \frac{1}{16}suuqq$

$\frac{\frac{3}{16}saann}{2eaa + srr + \frac{1}{16}sqq}$ ∞ uu quod igitur tantillo majus quam $\frac{1}{4}yy$ pag. 103 [p. 586]. propter $\frac{1}{16}sqq$, quod debuerat eſſe $\frac{1}{4}sqq$. hinc diverſitas eſt ex eo quod et motum ponderis S deorſum conſidero [4]).

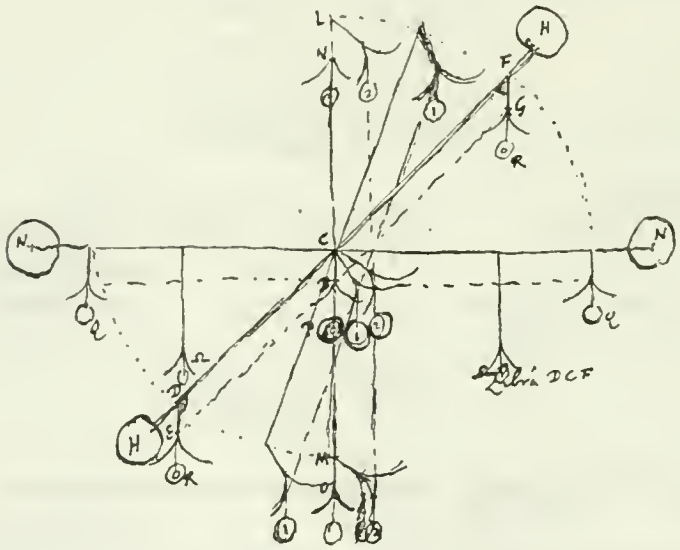
---

[3]) Huygens écrit par erreur: AY.

[4]) Comparez la note 2 de la p. 586.

Quod si esset sicut $zz \infty \frac{1}{4}xx$ ita $uu \infty \frac{1}{4}yy$; adeoque ut $z \infty \frac{1}{2}x$ ita $u \infty \frac{1}{2}y$: appareret esse ponderis E ad F euntis celeritatem in medio D, ad celeritatem ejusdem in F, sicut celeritas ipsius in medio Ξ, cum venit ex D, ad celeritatem quam tunc habebit in F. Et tunc essent in totis arcubus EF, DF, seorsim peractis, celeritates ubique ut ipsa spatia percurrenda, nempe in ratione dupla, eoque librationum tempora fierent æqualia. at nunc propter celeritatem u tantillo majorem quam oportebat, fient tempora minorum librationum tantillo breviora. Vel majorum librationum tempora tantillo longiora, sed illud insensibile erit puto: alias pauxillo majori circulo describendæ helicoides æquantes quam sit distantia ipsarum originis a diametro libræ horizontali.

[Fig. 92.]



Librâ DCF [Fig. 92] ponderibus H H oneratâ et undique equi[li]brium servante, si porro pondera æqualia R R ei appendantur inter helicoides nostras affixa, quarum radij genitores FG, DE ad horizontem perpendiculares sint, et brachijs CF CD æqualibus firmiter affixi atque angulis immutabilibus. Erit libræ quies hoc situ DF. Et ab hoc utrinque excurret reciprocationibus isochronis: quæque eorundem erunt temporum ac libræ NCN, ponderibus Q Q appensis inter helicoides prioribus pares quarum radij genitores perpendiculares brachijs, atque æque a centro C remotis. Vel etiam æqualium temporum ac libræ NCN cum appenso solo pondere P duobus Q æquivalente.

Ratio patet ex eo quod quavis æquali inclinatione harum trium librarum, centrum gravitatis ponderum binorum R R vel Q Q vel solius P, idem invenitur necessario, ut facile perspicitur; unde etiam eadem vi agit ad movenda pondera H H, vel N N.

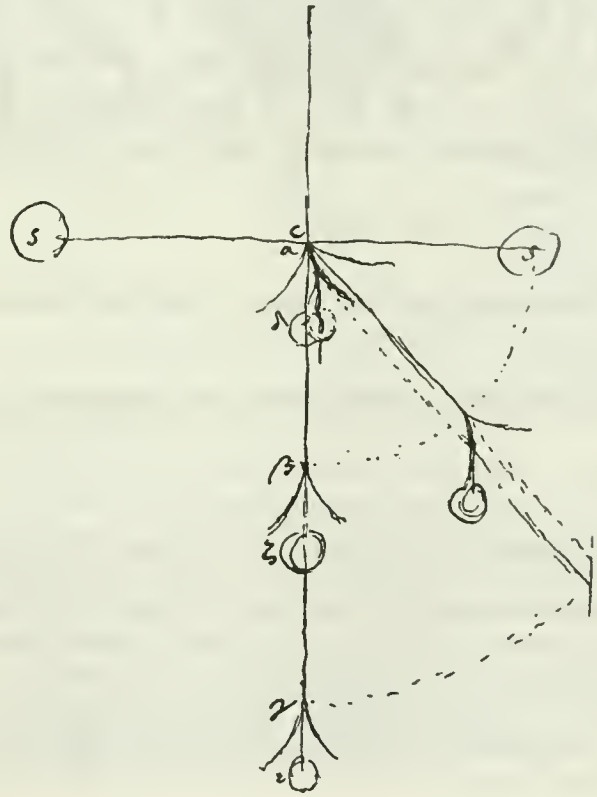
Quod ſi igitur ſumantur in perpendiculari LCO, CL, CM æquales CF, CD, et radij genitores helicoidum ponantur LV, MO, et ab originibus V, O, ipſæ helicoides lamellæ deſcendant interque eas pondera appendantur æqualia R, R, vel Q Q, his agitabitur quoque æqualiter libra gravata ponderibus N N.

Sed optime adhibentur pondera ſuſpenſa ut in Q Q vel Ω Ω, quia minus periculum eſt ne titubent motu laterali.

Solum vero pondus duplum P minus etiam obnoxium erit motui laterali. Sed in libra pag. 99 [Fig. 88 de la p. 579] ſola pondera Q Q adhibui, rejectis N N et P; quod libra ſic minus gravetur; minusque facile ad latiores vel anguſtiores reciprocationes redigatur, ex inæquali preſſu horologij. Nihil enim gravitatis aſcendit cum latius moventur pondera N N.

Ex ijs quæ hic oſtenſa ſunt apparet etiam pondera δ, ε [Fig. 93], ſuſpenſa inter helicoides in α, γ, quarum radij genitores æquales $\frac{1}{2}$ Cγ, eodem modo agitatura libram SCS ponderibus SS gravatam, ac ſolum pondus ζ, binis δ, ε æquale et inter ſimiles helicoides ex β ſuſpenſum, quarum radius genitor $\alpha\beta \infty \frac{1}{2} \alpha\beta$ [liſez : $\alpha\gamma$ ou Cγ]. Puncta α et C conveniunt. Sed hoc inutile ob nimiam agitationem ponderis ε.

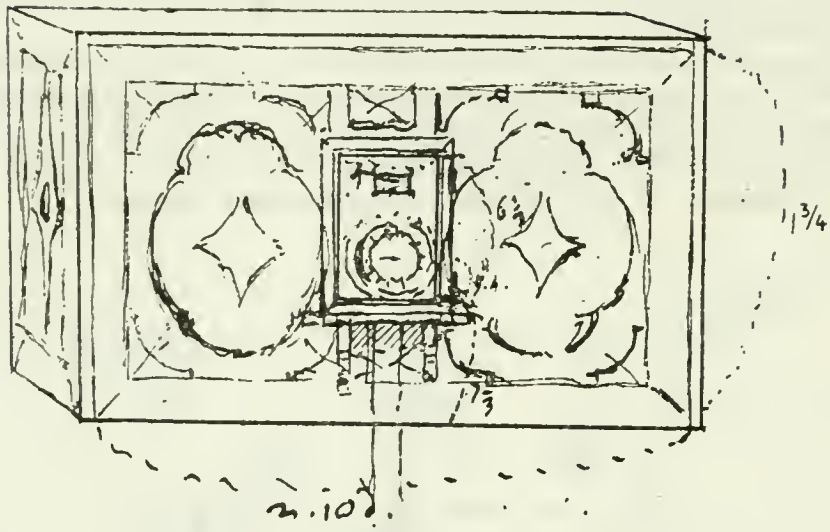
[Fig. 93.]



VIII.

LA DERNIÈRE HORLOGE MARINE DE 1694 [1]).

[Fig. 94.]



De kas [Fig. 94] hoogh $1\frac{3}{4}$ voet, breedt 2 voet 10 duijm, diep 6 duijm (van binnen).

Elcke bol $22\frac{1}{2}$ onc. Het conusje [?] 15 onc. Het langwerp. [?] 1 pond $\frac{19}{32}$ onc.

---

[1]) La Pièce est empruntée aux p. 108—111 et 124 du Manuscrit I. L'horloge était apparemment pourvue d'un balancier tel que celui décrit dans la Pièce VII, comme l'indiquent aussi les Fig. 95—98 qui suivent. Voir la fin de la note 3 de la p. 573 qui précède. Le 29 mai 1694 (T. X, p. 609) Huygens écrit à Leibniz qu'il a fait „executer et mettre en perfection" sa nouvelle invention, et le 16 juin suivant à de l'Hospital (T. X, p. 626) qu'il a „fait construire l'horloge, qui succede tres bien" et qu'il prétend „pouvoir porter sur mer". Le 1 octobre 1694 il n'avait pas encore proposé „ce nouveau moien de trouver les Longitudes a M^rs les Directeurs de la Compagnie des Indes" et il ne l'a certainement pas fait dans les quelques mois qui lui restaient encore à vivre.

$22\frac{1}{2}$ Met 71 onc. het tegenwight afgetrocken, ginck wat raffer als 't pendulum.
$22\frac{1}{2}$ Vrijdag 16 April 's avondts ten $8^{u}.35'.0''$ gelijck gefet.

15	17	—	's morgens ten	8.45.0	balans 18″	voor 18
$16\frac{1}{2}$	eod.	—	's av.	8.42.0	— 33″	voor 15
$76\frac{1}{2}$ s	18	—	m.	8.30.0	— 52	— 19
$5\frac{1}{2}$	eod.	—	a.	8.30.0	— 71	— 21
71	19	—	m.	8.44.0	— 90	— 19

$16\frac{1}{2}$ Met $54\frac{1}{2}$ onc. ging wat langfaemer als het pendulum. Ergo is de correctie
$54\frac{1}{2}$ door de boxhoorns in de balans wat te groot, doch volgens de demonftratie foo moeft die eerder noch te kleijn vallen. Soo is dit de refiftentie van de lucht, of eenighe fout in de balans, te imputeeren. of de boxhoorns onrechte figuer.

[Fig. 95.]

De boxhoorns hebbe bevonden niet wel geboghen te fijn door den Horlogiemaecker, van der Cloefen. Heb die netter geftelt nae een plaetje van defe figuer [Fig. 95], daer ick de helix felver op getrocken had, en afgevijlt. Sedert heeft de Balans, en het Pendulum van 3 voet feer gelijck gegaen. Soo dat van den 19^{e} April s'avonts ten 8 uren tot den 20^{en} s'achtermiddaghs te 2 uren, de flagen van beyde altijdt gelyck bleven. Ten 2 ur. 15′, was het pendulum ontrent $\frac{1}{4}$ van een feconde gevordert federt s'avonts te voren. Gingh met 72 onc. dat is $4\frac{1}{2}$ pond. en $5\frac{1}{2}$ onc. tegenwight.

Maendag 19 April 's avonds ten $6^{ur}.0'0''$ gelijck gefet.

20	—	's morg.	9. 0.0	balans 2″ voor. of niets want op 2″ feconden kan men op de wijfer van 't pendulum niet vaft gaen.
eod.	—	a.	9.20.0	balans 1″ voor.
21	—	m.	$10^{ur}.18'$.	balans 0″ voor. dat is beyde weer gelyk.

Een pond gewicht bij gedaen. De Balans wierd een weijnigh langfaemer.

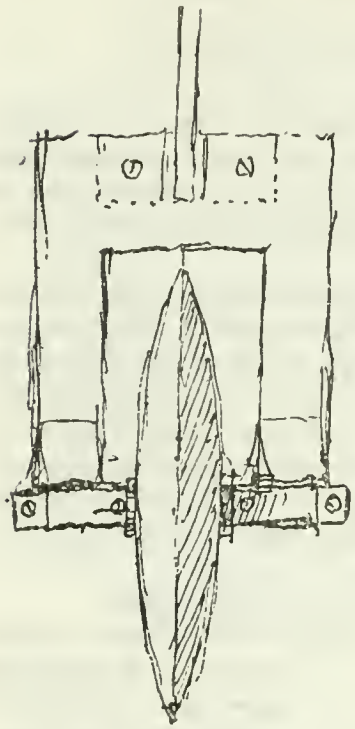
Boxhoorns overfien &c.

Den 21. a. 5.48′. nae dat de boxhoorns overfien en de bollen weer aengehangen had, vond dat de Balans ietwes langfaemer gingh als te voren. Dit komt daer van fonder twijffel, dat de fteelen van de boxhoorns ietwes verbogen fijn door het verbuijgen vande boxhoorns.

21	a.	5.48′	gelijck gefet, na dat de fchuyflooden verfet had.
April 22	m.	10.26′	Balans 9″ voor. of 8″.
—	a.	5.48′	Balans 12 voor in 24 uren. De Balans gingh van felfs wat ruijmer. het weder wat warmer.
April 22	a.	7. 0′	gelijck gefet en 1 pondt gewight bijgedaen.
23	m.	9. 0	Balans 6″ voor.

— a. 7. 0 Balans 7″ voor. moſt 12″ geweeſt ſijn. Ergo niet genoegh gecorrigeert door de boxhoorns.

[Fig. 96.]



Men ſoude aen ieder arm maer een loodt kunnen hangen, als hier nevens [Fig. 96], maer ſoude miſſchien al ſoo veel lucht vatten, als met de 2 looden aen ieder arm. en ſouden vier boxhoorns te maecken ſijn in plaets van 2.

maer ſoude minder ſlingeren konnen.

Soude minder waggelen, maer dit is niet te vreſen.

Sat. 24 Apr. 2ur.10′. gelyck geſet. 't horologie beter vaſt geſet. de boxhoorns verboghen.

25 — 2. 0 Balans $2\frac{1}{2}$″ achter. Een pond gewight bij gedaen. Bevond dat de Balans 1″ in een uur won. Ergo al te veel gecorrigeert door de boxhoorns. Deſelve weer nae een nieuwe helix verboghen.

25 6.10 gelijck geſet. met ordinaris gewicht.

56 11.30 Balans 10″ achter in 17ure. 20′. Een pond gewight bij gedaen. ten 11 ur. 40′. Vond dat de Balans in een uur meer als 2″ verloor. daer te vooren geen 1″ verloor. Ergo te weijnigh gecorrigeert door de boxhoorns. Ick hadde wat toe gegeven in 't open ſetten der ſelve.

Geloof dat wel ſoude ſijn in dien men ſe de rechte figuer vande helix conde geven. Doch het is niet licht die juijſt te treffen. Men ſoude met een ſchroefje de ſelve genoegſaem op haer rechte wijdte konnen brengen aldus

27 m. 10. 4 Balans 64″ achter. dat is bijna $2\frac{1}{2}$″ in een ure.

27 m. 10.34 gelijck geſet. een pond gewight bij 't Pendulum gedaen om te ſien of het die proef kan uytſtaen.

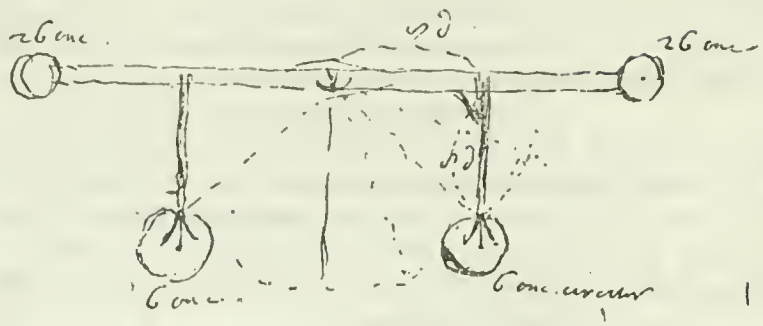
28 m. 9. 0 Balans 68″ achter in 22u.26′. dat is ſeer nae $2\frac{1}{2}$″ in een ure. Soo dat het Pendulum die proef wel uytſtaet.

28 m. 11.14′ Gelijck geſet, nae dat de boxhoorns op 't netſte verboghen hadde, ſoo ieder apart als te ſaemen met het modelletie.

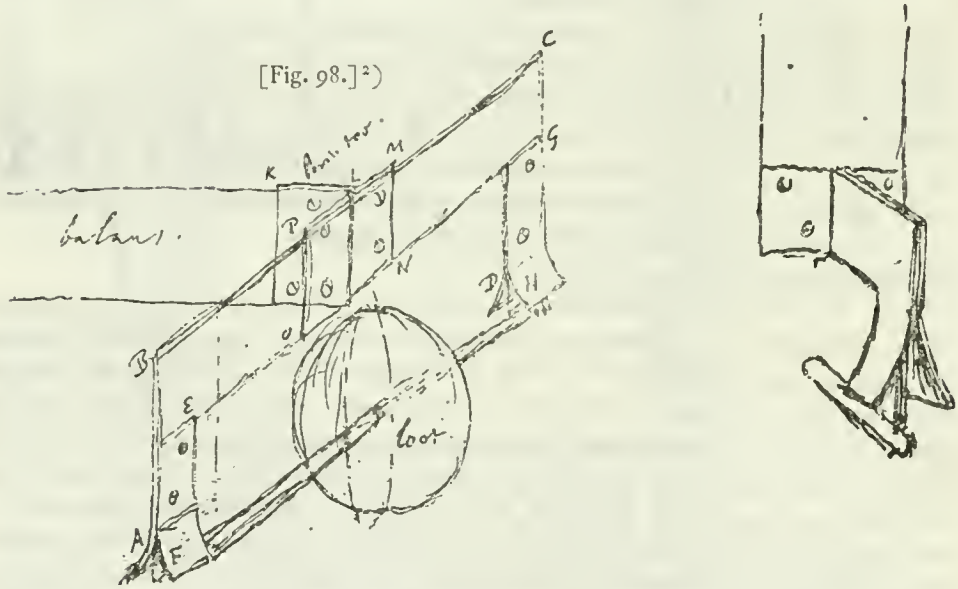
29 m.	11.20′	Balans 13″ achter in 24 uren. Bijgedaen 1 pond gewight. won 1″ in een uer. Ergo te veel gecorrigeert.
30 April	9.37′	gelijck gefet, nae dat de boxhoorns iet wes geopent had, nae de paffer en 't modelletie. en met het pond gewight bij gedaen, en fonder 't felve feer nae gelijcke gangh bevonden hebbende door de flaghen.
1 Maj.	10.15′	Balans 13″ voor. (onder aen de minutwijfer van 't pend.). Een pond gewight bij gedaen bij dat van de Balans.
2 —	10.45	Balans 31 voor. Moft 26″ wefen. Ergo noch te veel gecorrigeert.
4 —	m. 12. 0	gelijck gefet. nae 't verbuygen van de helices.
5 —	m. 9.45	Balans 7″ achter. een pond gewight daer bij gedaen.
7 —	a. 9.30	Balans 8″ achter. corrigeert noch wat te veel.
8 —	m. 11.24′	Gelijck gefet, nae dat de boxhoorns wat met de vijl geholpen had fonder verbuijgen.
9 —	m. 11. 4	Balans 17″ voor. daer een pond bij gehangen.
10 —	m. 12.24	Balans 37″ voor. foude noch iets te veel corrigeren.
10 —	m. 12.34	Gelijck gefet; nae dat het wiggelen aen het rechter loodt verbeterthad.
11 —	m. 9. 5	Balans 9″ voor. het pondt gewight af gehangen. Het wiggelen doet raffer gaen. daerom enckele draeden beter als de lintjes. en men moet van eerften aen het wiggelen beletten. 't welck door 't trecken aen de lintjes kan gefchieden.
12 —	m. 9. 5	Balans 21″ voor.
Maj. 12 —	a. 9u.15′	29½″ balans voor. 3″ te veel. komt miffchien de fout vant' Pendulum.
13	m. 10. 0	40″ balans voor. moft wefen ontrent 35″. ergo 5″ te veel. de balans afgelicht, en gefien dat eenigh blinckende ftof van de fcherpe as daerfe op draeght afgeveeght wier. het had nu 2 daghen vochtigh weer geweeft met regen. den as moet min fcherp gemaeckt werden en niet gepolijft noch oock de circel hollen, op dat rolle en niet en fchure. de hollen vlacker. Met het microfcopium gefien dat de 2 blinckende plaetsjes in de hollen daer de meffen van den as op ruften eenighfins rosachtich van couleur waeren, 't welck teycken is van roeft. Daerom de hollen met een weijnigh olie geftreecken.
14	m. 1u.8′	0″ gelijck gefet.
15	m. 1.30	8″ Balans achter, een weynigh min. 1 pond bij gedaen.
16	m. 1.18	16″ Balans achter. is wel. meer olie aen de as van de balans gedaen.
17	m. 1. 8	25″ Balans achter.
18	m. 2. 5	32″ Balans achter.
19	m. 12. 0	40″ Balans achter. Met vander Cloefen de ftaele hollen in de mesfen vanden as door 't microfcopium befien. vondt alleen 2 blinckende plaetfies in de hollen, maer geen flijtingh of fwarte vuijlichheydt. De meffen en was geen verandering aen te fien.

19	m.	12.17	0″ gelijck gefet.
20	m.	12.10	7″ Balans achter.
21	m.	12. 0	12″ Balans achter.

[Fig. 97.]



[Fig. 98.][2])



Dubbele draet [Fig. 97][1]). Haeckje aen den as van 't loodt. 't Waer beter dat beijde de boxhoorns aen malkander waeren.

ABCD [Fig. 98] een ſtuck. EF, GH aengeſchroefde ſtucken. BC is veel te langh. KLMNOP een ſtuck boven toe in KL, en aen de balans geſchroeft.

Het ſtuckje boven op 't midden van de balans moet blijven, om dat het het centrum gravitatis van de balans, behalven de bollen, effen brenght op 't ſcherp vande meſſen der as.

[1]) On lit dans la Fig. 97: „26 onc. 8 d. 26 onc. 6 onc. 8 d. 6 onc. circiter".

[2]) On lit dans la Fig. 98: „balans. boven soo. loot".

HUYGENS, ROEMER ET LEIBNIZ HORLOGERS.

I. L'ÉCHAPPEMENT À ANCRE.

II. LA FORME DES DENTS DES ROUES: *A*. FORME ÉPICYCLOÏDALE DES DENTS POUR LES ROUES PLANES, D'APRÈS ROEMER. *B*. FORME ÉPICYCLOÏDALE DES DENTS D'UN PIGNON QUI ENGRÈNE DANS UNE ROUE DE CHAMP À DENTS PLATES, ET FORME DES DENTS D'UNE ROUE DE CHAMP QUI ENGRÈNE DANS UN PIGNON À DENTS PLATES, D'APRÈS HUYGENS.

III. MANIÈRE DE FAIRE QU'EN MONTANT L'HORLOGE À RESSORTS ELLE NE DISCONTINUE PAS SON MOUVEMENT.

IV. FORME DE LA VIS ET DE L'ÉCROU SERVANT À MONTER OU BAISSER LE PLOMB DU PENDULE.

Avertiſſement.

Le titre ſous lequel nous raſſemblons les quelques Pièces éparſes ſur l'horlogerie qui ſuivent ſert à indiquer que cet art ne peut être nettement ſéparé ni de l'aſtronomie pratique ni de la géométrie ou de la mécanique théorique. On aurait certainement tort de le juger indigne d'un philoſophe: comparez à ce ſujet les p. 32—33, ainſi que le cinquième alinéa de la p. 482.

Les noms de Roemer et de Leibniz ſe trouvent dans la Fig. 101 de la Pièce I: voir la note 1 de la p. 605.

Nous avons dit un mot ſur Roemer horloger dans la note ſur I. Thuret de la p. 505. Il eſt vrai qu'en cet endroit il ne s'agiſſait pas d'horloges; il y était queſtion de planétaires mus à la main. Mais les planétaires ſont plus anciens que les horloges à roues dentées: le fameux planétaire géocentrique d'Archimède a ſans doute exiſté et l'horloge à roues dentées provient peut-être du planétaire (voir cependant la note 3 de la p. 37 du T. XVII); en effet, toute horloge n'eſt-elle pas, vu la périodicité de ſon mouvement, une image de l'univers? ne peut-on pas dire que l'aiguille des heures et celle des minutes, telles que nous les voyons dans l'horloge de Coſter (T. XVII, p. 14, Fig. 1) et dans celles qui nous ſont familières, repréſentent le ſoleil et la lune parcourant les douze ſignes du zodiaque?

Aucune comparaiſon n'eſt plus familière aux philoſophes du dix-huitième ſiècle que celle, bien groſſière évidemment, du monde avec une horloge. Dans les Remarques ſur l'ouvrage de Sully de 1717, citées dans la note 2 de la p. 502 qui précède, Leib-

niz appelle le poids ou le reſſort moteur de l'horloge ſon „premier Mobile" [1]): c'eſt le πρῶτον κινοῦν, plutôt que le πρῶτον κινούμενον, d'Ariſtote [2]).

Comme Huygens, Roemer (1655—1710) s'intéreſſait ſurtout aux horloges en ſa qualité d'aſtronome. Il fit uſage toute ſa vie des horloges à pendule de Huygens. Nous reproduiſons ici [Fig. 99 et 100] une partie des Tables I et II de 1704 [3]) de la „Baſis Aſtronomiæ" de 1735 de P. Horrebow, diſciple de Roemer [4]). Dans ſon Ch. III („De horologiis obſervatoriis") Horrebow écrit (p. 24), après avoir cité Tycho Brahé ſur la néceſſité d'obſervations fort exactes: „Indicat his verbis Brahæus, ſeſe non unum in finem adeo prolixe de hoc negotio agere; ego vero verba ipſius eum tantum in finem profero, ut gaudeant hujus ætatis homines, dudum iſtas difficultates per Chriſtianum Hugenium, qui ad horologia perpendiculum feliciter applicuit, ſublatas eſſe, qui proinde horologia ad eam, quam aſſequi ſuo tempore non potuit Tycho, motûs æquabilitatem perduxit: ut vere dici queat, Divino huic horologiorum Hugenianorum invento, cœleſtium motuum æmulo, omnem Roemerianoram [5]) rectaſcenſionum fidem & certitudinem inniti. Proindeque nobis ſemper Author erat, ſuasorque, ut omni ope iſta horologia, tanquam potiſſimam obſervatorii partem, menſurarumque animam, conſervaremus, & caute tractaremus" . . . „forte non opus eſt monere, non alia in obſervatorium Aſtronomicum admittenda eſſe horologia, quam Hugeniana, quorum perpendiculum tripedale ſingulis oſcillationibus minuta ſecunda temporis indicet, atque ultra perpendiculum horizontis ſex, ſeptem vel octo pollices excurrat" [6]).

---

[1]) „Les longues Pendules à Secondes font des vibrations assez egales, par la raison, qu'un petit arc de Cercle d'un si grand Rayon ne sçauroit guères être distingué sensiblement d'un Arc de Cycloïde. Cependant il faut avouer, que le premier Mobile et le Rouage ont encore quelque influence sur les Tems de la Pendule... la Pendule est un peu avancée par une grande augmentation de la force du premier Mobile".

Voir aussi sur Leibniz horloger le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 522 qui précède.

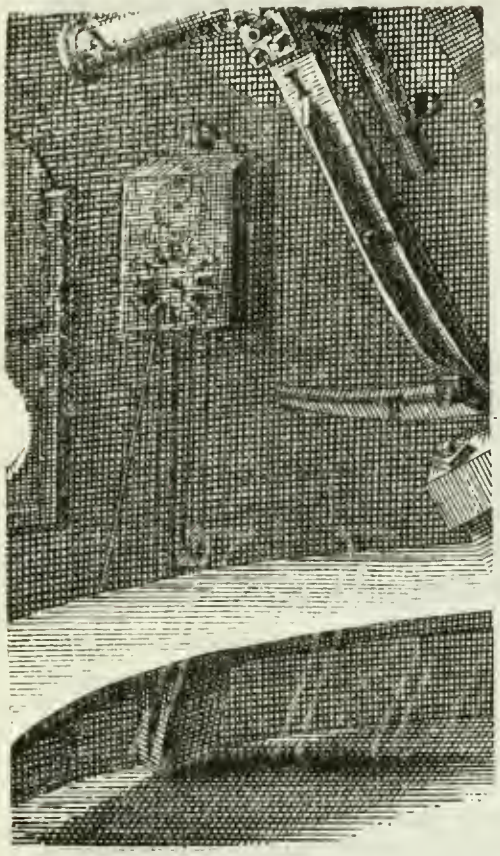
[2]) Physica (Περὶ φυσικῆς ἀκροάσεως), Lib. VII.

[3]) „L. Th. Skive delineavit. J. Friedlein sculpsit Haffniæ 1704".

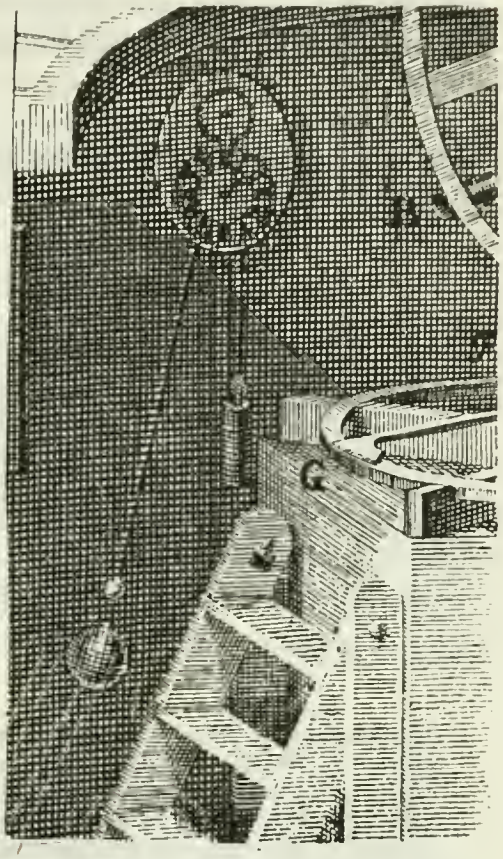
[4]) „Basis Astronomiæ, sive Astronomiæ Pars Mechanica, in qua Describuntur Observatoria, atque Instrumenta Astronomica Roemeriana Danica; simulque eorum usus, sive Methodi Observandi Roemerianæ. In usum publicum, & præsertim in gratiam unà prodeuntis valde insignis atque usûs amplissimi, nunquam non posteris memorandi Tridui Observationum Tusculanarum Roemeri, ex fundamentis exponuntur a Petro Horrebowio, Philos. & Med. Doctore, in Univ. Hauniensi Astron. Prof. ac Soc. Artium Paris. membro. Hauniæ, apud viduam beati H. Chr. Paullí, Anno MDCCXXXV.

[5]) Lisez: „Roemerianarum".

[Fig. 99.]



[Fig. 100.]



Ce paſſage fait voir clairement qu'à Copenhague on était bien convaincu que les horloges à pendule ſont de Huygens; comparez la note 9 de la p. 11 du T. XVII, et les p. 59—66 et 88—91 du préſent Tome[7]).

---

[6]) L'auteur ajoute: „Rotæ hujusmodi horologiorum sint orichalcicæ, tympana chalybea: sic enim minuitur attritus. Fabrica sit simplicissima, etc."
Dans l'horloge de Thuret de l'Observatoire de Leiden (voir la p. 19 qui précède) les pignons sont en acier et les roues en cuivre jaune. Il en est d'ailleurs de même dans l'horloge de S. Coster de 1657 (T. XVII, p. 14—16). Huygens ne dit pas de quel métal les pignons et les roues sont fabriqués, ni dans l'„Horologium", ni dans l'„Horologium oscillatorium".
Nous ignorons si les horloges de Roemer avaient été construites par Thuret.

[7]) Nous nous permettons de publier ici un renseignement sur les horloges publiques en Néerlande

Dans les Fig. 99 et 100 on voit le poids curſeur (p. 32, 338—347 et 429—432 qui précèdent). La verge du pendule eſt apparemment cylindrique: nous avons déjà dit à la p. 19 que la verge plate de l'horloge de Leiden (Fig. 12) nous ſemble dater de plus tard.

Obſervons en paſſant que Horrebow repréſente dans ſon ouvrage la „Turris Aſtronomica Hauniensis" de 1642 dont nous avons parlé à la p. 18 qui précède.

Roemer, pendant ſon ſéjour à Paris, ſe poſa la queſtion de ſavoir quelle doit être la forme des dents pour que deux roues ſituées dans un même plan s'engrènent le mieux poſſible, c.à.d. ſans ſauts ni accotements. Le diſcours qu'il fit en 1675 à l'Académie ſur ce ſujet [1]) n'a pas été conſervé. Selon lui, les dents doivent avoir une forme épicycloïdale, comme Ph. de la Hire le dit auſſi dans ſon „Traité des épicycloïdes & de leurs uſages dans les Mécaniques" de 1695 [2]). En effet, Leibniz écrit en janvier 1698 à Jean Bernoulli [3]): „Dominus la Hirius ipſe, quod non ſatis mirari poſſum,

---

(nous avons parlé d'elles à la p. 66 qui précède) que nous ne possédions pas encore en rédigeant le T. XVII (p. 33—34, 79 et 545—546). Dans son ouvrage „De St. Stephenskerk te Nijmegen" (Nijmegen, H. ten Hoet, 1900) l'archiviste de cette ville H. D. J. van Schevichaven a déjà publié avant nous l'attache de la province de Gueldre du 19 octobre 1658. L'auteur y dit aussi (p. 207—208) que bientôt après plusieurs horloges de Nymègue furent transformées par Jan van Call en horloges à pendule (Jan Becker van Call, appelé aussi Jan van Batenburch, célèbre horloger d'origine allemande, devint citoyen de Nymègue en 1647; on peut encore consulter sur lui le T. I des „Penſchetſen van Nijmegen's verleden', par v. Schevichaven, Nijmegen, ten Hoet, 1898). Les résolutions du Conseil Communal du 1 décembre 1658, du 20 juillet et du 27 juillet 1659 se rapportent à ce sujet. La dernière p.e. parle de quatre horloges publiques transformées par Johan van Cal „omme die alle *cum pendulo* te doen gæn". Deux quittances du 28 juillet 1659 signées „Jan van Call" (archives communales de Nymègue) parlent en effet de „mæcken op de Wiemelpooert de Conſt des pendelums, met de reparatie desselfs ouden uurwercks, etc.". On voit qu'il est extrêmement improbable que l'horloge de la St. Eusebiuskerk d'Arnhem ait été une horloge à pendule déjà en 1652, tandis qu'il est fort possible que van Call ait transformé aussi cette horloge-là.

[1]) J. B. du Hamel „Regiæ Scient. Acad. Hiſtoria" 1701, écrit (Lib. II, Cap. III, p. 154, Ann. 1675): „D. Roëmer Tractatum à se elucubratum de Mechanicis, præſertim de rotis dentatis legit."

[2]) Voir sur ce Traité les p. 711 et 715 de notre T. X.

[3]) „Virorum celeberr. G. G. Leibnitii et Johan. Bernoullii Commercium philos. et math." I (1694—1699), Lausannæ & Genevæ, M. M. Bousquet. 1745, p. 347.

Epicycloidum usum ad figuras dentium sibi tribuere videtur in peculiari de iis dissertatione, cum tamen certum sit inventum esse Roemeri Dani; nam eram Parisiis eo tempore quo is invenit, remque non tantum ab ipso Roemero, sed & Hugenio intellexi".

La Partie *A* de la Pièce II qui suit confirme l'affirmation de Leibniz en ce qui concerne Roemer. Il n'en résulte pas que de la Hire ne puisse avoir eu, également vers 1675, la même pensée indépendamment de lui [4]). Leibniz ajoute: „Roemerum qui in Dania agit Regi æstimatus, miror sibi sua non vindicare". Toutefois les figures de Huygens ne démontrent pas que parmi les constructions proposées par Roemer il y en avait d'identiques à celles de de la Hire. Roemer s'est apparemment servi tant de l'épicycloïde ordinaire (*A*. § 2) que de l'épicycloïde raccourcie (*A*. § 1), tandis que de la Hire ne se sert que de l'épicycloïde ordinaire. L'application faite dans la Fig. 107 de l'épicycloïde ordinaire ne ressemble à aucune figure de de la Hire. Voir cependant aux p. 609—610 les trois derniers alinéas de la note 2 de la p. 607 qui suit.

Nous avons déjà dit (note 2 de la p. 400) que Huygens ne s'est occupé des épicycloïdes qu'après Roemer, qui paraît donc avoir attiré son attention sur ces lignes. Il est vrai que les ἐπίκυκλοι des astronomes grecs étaient connus à tout-le-monde (comparez la fin de la note 4). Notons que Huygens n'a cherché — ou du moins n'a accompli —, comme de la Hire, que la rectification et la quadrature de l'épicycloïde ordinaire.

---

[4]) De la Hire écrit dans la Préface de son ouvrage de 1695: „Il y a environ vingt ans que j'avois commencé à travailler à cet Ouvrage, & j'avois déterminé d'une maniere très-simple, que les dents des roues devoient avoir la figure d'une Cycloïde qui a pour base un cercle, ce que l'on appelle Epicycloïde. J'en conférai pour lors avec MM. Auzout, Picard et Mariotte: mais quelque tems après, ayant été admis dans l'Académie [ce qui eut lieu en 1678], je trouvai les quadratures des Epicycloïdes, tant de l'espace que de la ligne, à la maniere des Anciens, comme je les donne dans cet Ouvrage & je les communiquai à l'Académie. Mr. Huygens fit voir aussi celles qu'il avoit trouvées par une maniere fort différente de la mienne [fort différente en effet; voir sur le calcul de Huygens les p. 402—405 qui précèdent]; & dans le même tems Mr. l'Abbé de Vaumesle qui demeuroit en Normandie, m'envoya le résultat de ce qu'il avoit fait sur le même sujet, en me marquant que c'avoit été par la méthode de Mr. Descartes qui suppose des Poligones au-lieu de cercles [comparez les Fig. 141 de la p. 402 et 141 bis de la p. 403 qui précèdent]".

De la Hire parle aussi des „épicycloïdes intérieures" (hypocycloïdes), qu'il a donc peut-être considérées dès 1675; comparez sur les hypocycloïdes les l. 4—6 de la p. 41 qui précède, et le dernier alinéa de la note 2 de la p. 399. D'après Gino Loria „Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte" (nous citons la traduction allemande de F. Schütte, Leipzig, Teubner, 1902, § 208 à la p. 497) nous pourrions faire mention d'autres auteurs plus anciens.

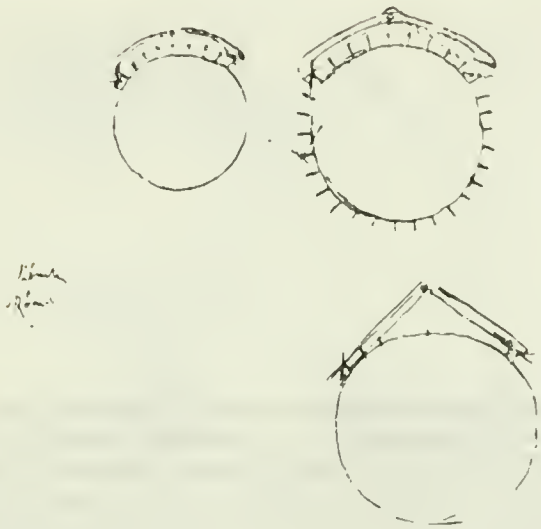
La Pièce III — nous ne difons rien de la Pièce IV qui ne donne qu'un détail de conftruction — eft une explication par Huygens du „maintaining power" dans les horloges à reffort. La grande majorité des horloges n'étaient pas encore munies de ce difpofitif (dû à un conftructeur inconnu; comparez la dernière ligne de la p. 5 et les premières lignes de la p. 6 du T. XVII), comme le font voir les paroles fuivantes de Leibniz dans les Remarques de ± 1715, citées auffi dans la note 1 de la p. 600: „Entre les Caufes, qui changent la juftiffe de l'Horloge et de la Montre vulgaire, eft auffi le Tems, qui fe perd en les remontant, lorfqu'elles font arrêtées pendant ce temps là, comme il arrive ordinairement; car le tems de la remonte n'eft pas toujours le même: Mais des bonnes Pendules, et d'excellentes Montres ont ou peuvent avoir une conftruction, fuivant laquelle elles continuent d'aller, pendant qu'on les remonte". Comparez le deuxième alinéa de la p. 514 qui précède, ainfi que la note 1 de la p. 64 du T. XVII.

I.

L'ECHAPPEMENT À ANCRE [1]).

1675.

[Fig. 101.]



[1]) La Pièce I, qui ne consiste que dans la Fig. 101, a été empruntée à la p. 35 du Manuscrit E, portant la date du 20 janvier 1675. C'est la page où il est question pour la première fois du „balancier de montre reglé par un ressort [spiral]" tel que le représentent les figures reproduites à la p. 408 du T. VII (comparez le début de la Pièce I à la p. 522 qui précède). On lit dans la Fig. 101: „Libnitz, Römer", ce qui semble indiquer que ces deux savants ont fait connaître à Huygens l'existence de l'échappement à ancre, qui était alors fort probablement une nouveauté. Il est dommage que Huygens n'ajoute aucune remarque à sa figure. À la p. 39 (note 3) du T. XVII nous avons dit que l'échappement de Galilée peut être considéré comme le précurseur de l'échappement à ancre. Nous voulions dire que l'échappement de Galilée est

un échappement libre, comme l'échappement à ancre; catégorie à laquelle appartient d'ailleurs aussi celui à détente des chronomètres. On n'a cependant aucune preuve d'une dépendance à cet égard des horlogers anglais, ou autres, de constructeurs italiens, de sorte qu'on doit dire, nous semble-t-il, avec J. Drummond Robertson („The Evolution of Clockwork", Ch. VIII „The Anchor Escapement", p. 131): „The pin-wheel escapement of Galileo was not divulged to the world, and the new invention proceeded upon wholly different lines".

Observons que Huygens et les horlogers qu'il connaissait ne se sont jamais servis ds cet échappement, dont l'usage ne s'est répandu qu'au dix-huitième siècle. Roemer et Horrebow ne s'en servaient pas: voir ce que nous disons dans l'Avertissement (p. 600) à propos des Fig. 99 et 100.

La première horloge connue possédant un échappement à ancre est, paraît-il, l'horloge d'église qui se trouve actuellement dans le Science Museum à Londres et porte l'inscription „Guglielmus Clement Londini fecit 1671". On attribue souvent cette invention à R. Hooke. En 1696 W. Derham écrit à la p. 96 de son livre „The Artificial Clockmaker" — citée dans le Ch. VIII de „The Evolution of Clockwork" —: „Dr. Hook denies Mr. Clement to have invented this; and says that it is his invention, and that he caused a piece of this nature to be made, which he showed before the Royal Society, soon after the Fire of London [1666]".

En 1675 Römer et Leibniz étaient tous les deux à Paris, le premier depuis 1671, le second depuis 1672. En 1673 Leibniz s'était rendu à Londres. Il paraît probable que c'est là qu'il avait fait connaissance avec l'échappement à ancre. La Fig. 101 a été publiée pour la première fois dans notre article „Christiaan Huygens en het ankerechappement" (Revue „Hemel en Dampkring", Wolters, Groningen, Mars 1934).

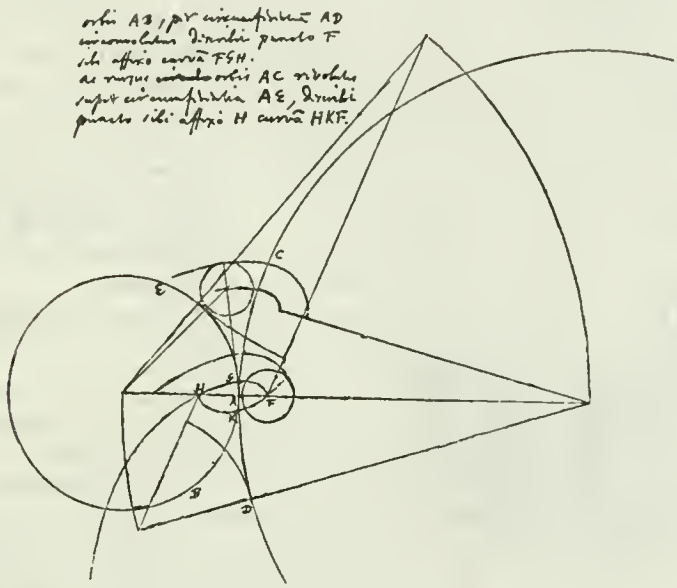
II.

LA FORME DES DENTS DES ROUES.

[1674]

A. Forme épicycloïdale des dents pour les roues planes, d'après Römer [1]).

[Fig. 102.]



§ 1. Rotæ Romeri, æquali vi continue in ſe mutuo agentes [Fig. 103].

Orbis AB [Fig. 102], par circumferentiam AD circonvolutus deſcribit puncto F ſibi affixo curvam FGH. Ac rurſus orbis AC revolutus ſuper circumferentia AE, deſcribit puncto ſibi affixo H curvam HKF [2]).

---

[1]) Les Fig. 102—106 et le texte correspondant aux trois premières ont été empruntées aux p. 1—5 du Manuscrit E, datant sans doute de 1674, puisque le Manuscrit D ne contient encore que des dates de 1673, et que la p. 26 du Manuscrit E porte la date du 19 décembre 1674.

[2]) Le point F, attaché au petit cercle EAB roulant de haut en bas sur le grand cercle immobile, décrit une épicycloïde raccourcie — nous nous servons de ce terme souvent employé pour

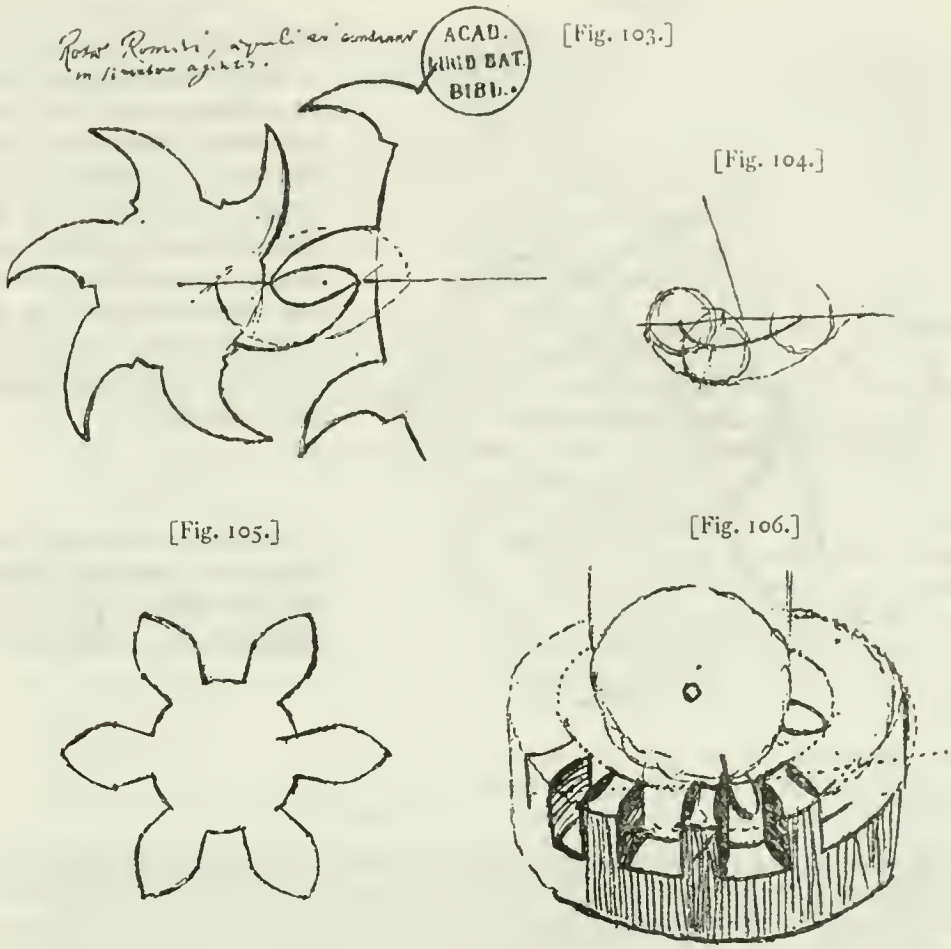
désigner l'épicycloïde à boucles, quoique certains autres auteurs parmi lesquels Gino Loria (ouvrage cité dans la note 4 de la p. 603) parlent au contraire dans ce cas d'une épicycloïde allongée —; FGH est le demi-contour de la boucle, dont l'autre demi-contour, symétrique avec le premier par rapport à la droite HF serait obtenu par le roulement du petit cercle de bas en haut. Huygens dit, sans doute d'après Roemer, que lorsque le grand cercle roule *de bas en haut* sur le petit cercle immobile et que le point H est attaché au grand cercle, celui-ci décrira une épicycloïde qui viendra couper la droite HF précisément au point F. Pour voir qu'il en est ainsi, il faut remarquer que le mouvement des deux cercles l'un par rapport à l'autre est absolument le même, que ce soit le petit ou bien le grand qui roule. On peut toujours rendre le cercle roulant immobile et mettre l'autre en mouvement, par rapport à une table p. e., en donnant à l'ensemble des deux cercles un mouvement tournant approprié par rapport à cette table. Supposons, pour fixer les idées, que, dans le premier mouvement considéré le point bleu B vienne s'appliquer sur le point vert D pendant que le point bleu F décrit la ligne bleue FGH et vient donc en fin de compte coïncider avec le point vert H attaché au grand cercle immobile: il est évident que la même coïncidence doit avoir lieu lorsque, le petit cercle bleu restant immobile et le grand cercle vert roulant sur lui également *de haut en bas*, le point vert D vient s'appliquer sur le point B et que le point H décrit au-dessus de la droite HF sa ligne verte. Or, si l'on considère au contraire, comme Huygens, un mouvement roulant *de bas en haut* du grand cercle sur le petit, il est évident que le point vert H décrira cette fois la ligne HKF symétrique par rapport à la droite HF avec la ligne verte HF supérieure.

La Fig. 102 fait fort bien voir que les lignes FGH et FKH ne sont pas symétriques par rapport à la droite FH: malgré la coïncidence des points extrêmes la ligne verte supérieure HF ne coïncide nullement avec la ligne bleue HGF, comme on pourrait le croire.

Il est évident que les mêmes coïncidences se produiront lorsque les cercles tournent chacun autour de son centre, toujours en roulant sans glisser l'un sur l'autre, puisqu'alors aussi on peut mettre l'un d'eux en repos par un mouvement rotatoire donné à l'ensemble.

Dans la Fig. 103 on reconnaît l'aire dyssymétrique HGFKH de la Fig. 102, ainsi que le point A où se touchent les deux circonférences désormais imaginaires. Supposons que la grande roue mène la petite. L'extrémité de la dent de la grande roue, correspondant au point vert H de la Fig. 102, s'appliquera constamment sur la „ligne HKF", qui constitue la partie supérieure du contour d'une des dents de la petite roue, lorsque les deux circonférences imaginaires roulent l'une sur l'autre. En d'autres termes, lorsque les dents ont la forme indiquée dans la Fig. 103, que la grande roue tourne d'un mouvement uniforme et que ses dents sont toujours en contact avec celles de la petite roue, celle-ci aussi tournera uniformément.

Quant à l'expression „*equali vi* continue in se mutuo agentes", il est évident que, s'il n'y a aucun frottement, et que les roues tournent uniformément, ce mouvement continuera indéfiniment, sans que les dents exercent l'une sur l'autre aucune pression. Dans la pratique, où il y a des frottements et où il s'agit aussi d'accomplir un certain travail, il faudra qu'un moment agisse sur la grande roue pour maintenir son mouvement uniforme de vitesse angulaire déterminée; la grande roue exercera à son tour un moment sur la petite roue, et il faudra que ce moment, pour vaincre le moment résistant supposé constant, ait lui aussi une grandeur constante. La grande roue en mouvement uniforme ne peut donc manquer, lorsque le mouvement de la petite roue est également uniforme, c.à.d. lorsque les dents sont constamment en contact, et que la petite roue accomplit constamment le même travail, d'exercer sur elle un moment constant.



[Fig. 103.]

[Fig. 104.]

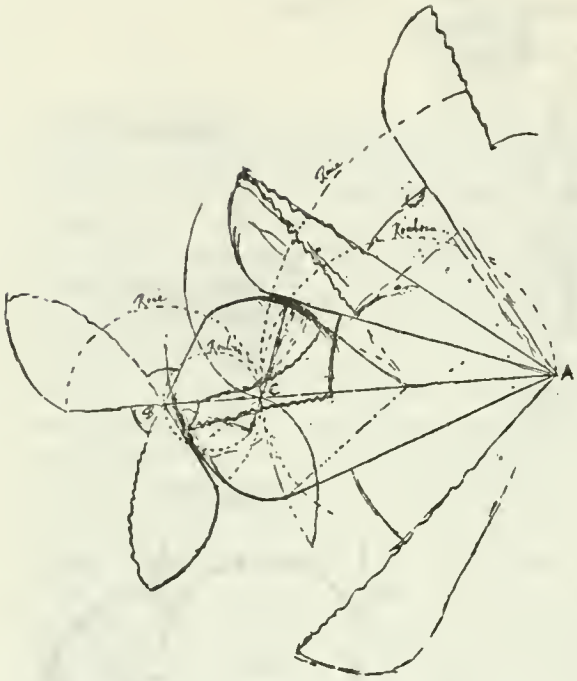
[Fig. 105.]

[Fig. 106.]

On voit que la forme des dents n'est pas entièrement déterminée: la dent de la grande roue, dans le cas considéré, n'agit que par son point extrême; quant à la dent sur laquelle elle agit, son contour supérieur seul doit avoir la forme indiquée dans la figure. Si l'on veut que la petite roue puisse aussi mener la grande, ce ne sera toujours que la partie inférieure du contour de la grande roue qui devra avoir la forme indiquée dans la figure.

Le problème peut d'ailleurs être considéré plus généralement. Pour qu'il y ait constamment contact, les mouvements des deux roues étant uniformes, les dents pourront aussi avoir d'autres formes que celles considérées jusqu'ici. Les dents d'une des roues, p. e. de la petite roue menant la grande, pourront même avoir toutes sortes de formes: il s'agit seulement de choisir convenablement les dents correspondantes de l'autre roue. Supposons p. e. que les dents de la petite roue soient de petits cercles attachés à elle, tels que le cercle à centre F de la Fig. 102

[Fig. 107.]



§ 2. Rotæ Romeri ex deſcriptione epicyclicarum [1]).

Dans les pignons au deſſus de 4 dents qui ſont mûs par une roüe, il faudroit oſter les courbures epicycloides des dents, et ne laiſſer que les lignes droites tirees du centre, afin qu'elles ne fuſſent preſſees que quand elles ſont dans la droite AB [Fig. 107]. Car ainſi le frottement le plus nuiſible ſeroit oſté [2]).

[Voir auſſi ſur ce ſujet une Pièce de N. Fatio de Duillier de 1686 que nous avons publiée aux p. 117-118 du T. IX].

(qui peut, ou qui peut ne pas toucher la circonférence BAE). Il faudra alors remplacer la ligne HGF par la ligne indiquée dans la Fig. 102 dont tous les points se trouvent écartés de ceux de la ligne HGF à une distance égale au rayon du petit cercle à centre F. C'est ce qu'indiquent aussi la Fig. 104 et les lignes pointillées de la Fig. 103. L'extrémité de l'ancienne dent de la petite roue de la Fig. 103, qui correspondait au point F de la Fig. 102, étant maintenant remplacée par un cercle, il faudra que le contour inférieur de la dent menée de la grande roue (contour correspondant à la ligne HGF de la Fig. 102) soit remplacé par la ligne pointillée supérieure de la Fig. 103.

De la Hire dans son travail cité à la p. 602 fait une remarque du même genre: il parle de la transformation d'une cheville punctiforme d'une des roues en un cercle et de l'adaptation de la forme des dents de l'autre roue à ce changement. Il dit en général (Prop. VI du Chapitre „De l'Usage des Epicycloïdes dans les Mecaniques") que l'on peut donner aux dents d'une des roues „quelle figure on voudra: mais alors les dents de l'autre roue dont la figure était en Epicycloïde, doivent avoir une forme composée de celle de l'Epicycloïde et de celle de la dent proposée". Il est évident que cette composition est bien plus difficile dans tous les cas où la dent proposée n'a pas précisément la forme d'un cercle (ou partie de cercle).

Huygens n'indique pas comment ont été obtenues les Fig. 105 et 106. Cette dernière fait voir que probablement Roemer s'est aussi occupé du cas où l'une des roues est intérieure à l'autre. Comparez le dernier alinéa de la note 4 de la p. 603 qui précède.

[1]) La Fig. 107 et le texte qui l'accompagne sont empruntés à la p. 167 du Manuscrit E, datant probablement de la fin de 1678, puisque la p. 165 porte la date du 3 décembre 1678 et que la p. 175 est datée 1679 (comparez la première ligne et la fin de la note 1 de la p. 400 qui précède).

La Fig. 107 représente apparemment un pignon de trois dents (ou ailes) mené par une roue, les contours de toutes les dents étant formés par des lignes droites, des lignes épicycloïdales et des lignes quelconques. Ces dernières sont les lignes sinueuses de la figure. Quant aux épicycloïdes, contrairement au cas considéré dans le § 1, il doit s'agir ici d'épicycloïdes *ordinaires*. Les lignes courbes des ailes du pignon formant avec les rayons auxquels elles se rattachent des angles de 180°, sont des fragments de l'épicycloïde ordinaire décrite par un point quelconque du „Rouleau" droit de diamètre CA (moitié du diamètre de la „Roüe" droite) lorsque ce „Rouleau" roule, de haut en bas, sur la „Roüe" gauche immobile; tandis que les lignes courbes des dents de la roue, faisant également des angles de 180° avec les rayons auxquels elles se rattachent, sont des fragments de l'épicycloïde ordinaire décrite par un point quelconque du „Rouleau" gauche de diamètre BC (moitié du diamètre de la „Roüe" gauche) roulant de bas en haut sur la „Roüe" droite immobile. Huygens a tracé les deux épicycloïdes nommées décrites par le point C considéré comme faisant partie de l'un ou de l'autre „Rouleau". En effet, si les courbe sont ces formes-là, et qu'un rayon déterminé partant du centre A touche, en son point situé sur le „Rouleau" droit, une des ailes du pignon, comme la figure l'indique (quoique l'on n'y distingue pas nettement la place précise du point de contact), cette même droite restera en contact — le point de contact se trouvant toujours sur le „Rouleau" droit — avec la courbe de l'aile du pignon, jusqu'au moment où le rayon qui limite l'aile considérée aura pris, en se mouvant dans le sens des aiguilles d'une montre, la positiou BC. En ce moment la courbe qui fait partie du contour de la dent de la roue commencera à presser le rayon nommé en son extrémité; elle continuera à le presser en un point situé sur le „Rouleau" gauche tant qu'il y aura contact de la dent avec l'aile du pignon.

Pour le faire voir, il suffit de démontrer que le lieu des points de contact des tangentes tirées du point A aux épicycloïdes semblables plantées, non seulement en trois points mais partout, sur la „Roüe" gauche, est le „Rouleau" droit. Il en résultera évidemment aussi que le lieu des points de contact des tangentes partant du point B aux épicycloïdes plantées sur la „Roüe" droite est le „Rouleau" gauche. Or, la proposition énoncée résulte immédiatement du fait que le point C est le centre instantané de rotation — lorsque le „Rouleau" droit roule sur la „Roüe" gauche — correspondant à tous les points où les épicycloïdes plantées sur la „Roüe" gauche coupent le „Rouleau" droit: les normales aux épicycloïdes en ces points-là passent donc par le point C. Comparez la note 4 de la 401 qui précède. Et l'on voit qu'une rotation uniforme de la roue correspond à une rotation uniforme du pignon.

Les considérations de Roemer sur la Fig. 107 différaient sans doute des nôtres: voir la note 5 de la p. 613 qui suit. Il est évident que si l'on réussit à donner aux dents une forme telle, que le rapport des moments que les deux roues exercent l'une sur l'autre est constant, il s'ensuivra qu'à une rotation uniforme d'une des deux roues correspond une rotation uniforme de l'autre roue.

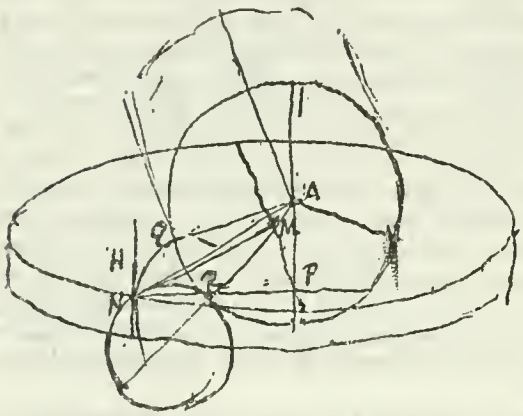
[2]) De la Hire („De l'usage des épicycloïdes etc.". Prop. VI et VIII) fait une remarque analogue: „On doit toujours éviter dans les dents des roues de faire qu'elles travaillent au-dessus de la ligne AC [horizontale] qui joint leurs centres, à cause que le frottement y est fort grand, & qu'au contraire il n'est pas presque considérable au-dessous . . . parce que les roues ayant leur mouvement du dessus au dessous de cette ligne les faces des dents qui se rencontrent en s'écartant l'une de l'autre ne se frottent qu'en échappant . . . au lieu que, lorsque le frottement se fait par la rencontre des parties que rentrent l'une sur l'autre, l'empêchement au mouvement est fort considérable".

B. Formam dentium invenire in rotis Coronarijs [Fig. 108] quam in rotis planis invenit Romerus [1]).

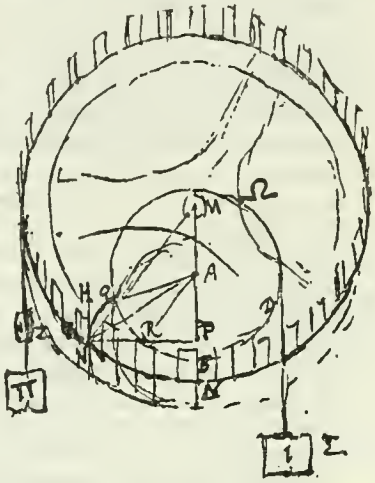
§ 1. Forme épicycloïdale des dents d'un pignon qui engrène dans une roue de champ à dents plates, d'après Huygens.

[Fig. 108.]

[Fig. 109.]



[Fig. 110.]



16 Nov. 1680. Parifijs. Circulus QBD [Fig. 110] intelligendus effe fectio fuperficiei cylindricæ [Fig. 108 et 109] terminantis dentes rotæ verticalis quoufque plani funt. Item circulus ΔN intelligendus effe parallelus et æqualis circulo rotæ horizontalis cujus dentes perpendiculares et rectilinei [2]).

---

[1]) La partie *B* de la Pièce II (que nous divisons, comme la partie *A*, en deux §§) est empruntée aux p. 39—43 du Manuscrit F.

[2]) Le cercle vertical QBD est donc une section du cylindre tournant. Ce n'est pas la section droite extrême; le point B (voir le quatrième alinéa du texte) est situé plus bas que le point Δ, ce que la Fig. 110 ne fait pas bien voir. Le cylindre à section circulaire (comparez la Fig. 108) est d'ailleurs imaginaire, tout comme les „roües" circulaires des Fig. 103 et 107. Le rayon AB du cylindre est par hypothese — quatrième alinéa du texte — la distance à l'axe du pignon du point de contact des dents, lorsque le contact a lieu en B dans le plan vertical passant par MΔ. Le cercle horizontal NΔ à centre M est une section de la roue de champ Ω passant par le point de contact N situé sur la dent HN. Les dents de la roue de champ sont apparemment supposées sans épaisseur.

La surface cylindrique „terminat dentes . . . quousque plani sunt". Apparemment les dents

Ponatur rotæ BD verticalis [Fig. 110] dens QN [Fig. 109 et 110] impulisse rotam horizontalem a Δ ad N, sitque rotæ BD dens QN impellens dentem NH rotæ ΔN [3]). Oportet jam ductâ NP a puncto contactus N ad radium rotæ AB, qui ad centrum terræ tendit, ut ipsa faciat intervallum AP à centro rotæ minoris, subduplum intervalli MP [4]) quod intelligo esse sinum complementi arcus ΔN in rota majori dupla. Nam suspenso pondere Π quod trahat circonferentiam rotæ majoris ducto fune super trochlea Z, et ponderi æquali Σ, quod trahat circonferentiam rotæ minoris, ostendetur eas manere in equilibrio.

Quia enim linea dentis NH premit secundum sibi perpendicularem lineam NP quæ et in radium horizontalem MΔ perpendicularis est, perinde est ac si brachium MP premeretur perpendiculariter a baculo NP, ei vero resistit brachium AP perpendiculare ad horizontem, et sunt vires ponderis Π rotam AN circumagentis duplæ virium ponderis Σ rotam BQ circumagentis ut ipsa brachia rotis affixa MP ad AP. Ergo pondera rotas in se mutuo agentes in æquilibrio tenebunt [5]).

Cum contactus dentium est in plano verticali per MΔ erit intervallum inter tactum et centrum rotæ horizontalis æquale radio MΔ, inter tactum vero et centrum rotæ

---

du pignon, lorsqu'on les parcourt en s'éloignant du centre A, sont d'abord planes, comme celles de la Fig. 107; elles possèdent deux surfaces planes passant par l'axe du pignon. C'est à partir de la génératrice du cylindre passant par le point B, donc au-dessous d'elle, que la dent du pignon dont la surface plane située à gauche se termine là, acquiert une certaine courbure qu'il s'agit de déterminer.

Nous avons parlé du point de contact B: en général il n'y a qu'un seul point de contact entre une dent du pignon et une dent de la roue de champ (supposée sans épaisseur). Toutefois dans le cas où la dent de la roue de champ se trouve précisément à l'endroit ici considéré, il est évident que la surface plane poussante de la dent du pignon la touche suivant une *droite*; nous voulions dire que B est le point le plus bas de cette droite de contact.

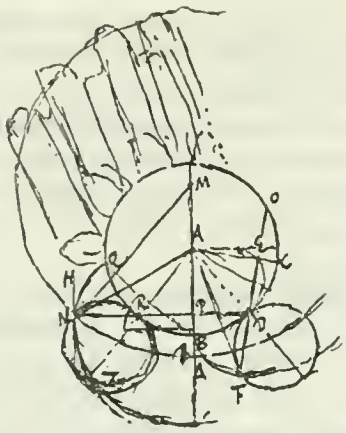
3) Par hypothèse (fin de la phrase suivante) le rayon MΔ du cercle horizontal est le double du rayon du cylindre circulaire imaginaire.

4) MP, partie du rayon MΔ, est une droite horizontale, comme la Fig. 109 le fait bien voir.

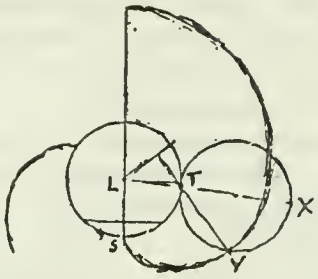
5) Soit F la force exercée dans le sens PN par une dent du pignon sur la dent HN, et dans le sens NP par la dent HN sur la dent du pignon; et supposons qu'il ne faille tenir compte que du contact de ce couple de dents seulement. Pour que la roue de champ soit en équilibre, il faut que les moments F.MP et Π.MΔ soient égaux. De même l'équilibre du pignon exige qu'on ait F.AP $= \Sigma.AB$. On obtient par division $\frac{AP}{MP} = \frac{\Sigma}{\Pi} \cdot \frac{AB}{M\Delta}$.

Par hypothèse $\frac{AB}{MD} = \frac{1}{2}$ (note 3). Puisque les poids Σ et Π sont égaux par hypothèse, il en résulte que l'on doit avoir, pour toute position de la dent HN, $AP = \frac{1}{2}$ MP. Il s'agit de donner à la dent du pignon, qui pousse la dent HN, une forme telle que cette éqnation soit vérifiée. Puisque les poids Π et Σ sont constants, c.à.d. puisque le moment extérieur agissant sur le pig-

[Fig. 111.]



[Fig. 113.]



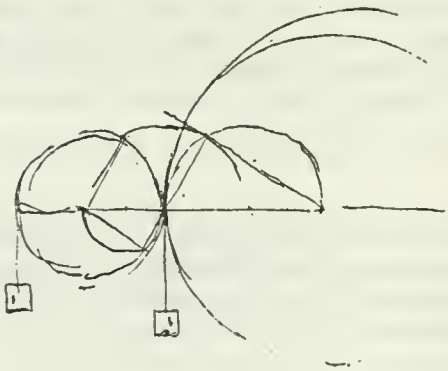
verticalis erit æquale radio AB. Cumque posito tactu in N, sit AP ∞ $\frac{1}{2}$ MP, patet punctum N esse altius puncto tactus dicto quod sit in plano verticali per MΔ [1]).

BC arcus quivis [Fig. 111] bifariam secetur in D, ducatur sinus DE cujus dupla sit EDF. Erit F unum è punctis curvæ quæ est Epicycloides. Nam facto circulo DF sub-

---

non est constant et qu'il en est de même du moment exercé par la roue de champ, les moments F.MP et F.AP resteront aussi constants durant le mouvement.

[Fig. 112.]



La Fig. 112 de la p. 38 du Manuscrit F semble indiquer que dans le cas des roues planes (partie *A* de la présente Pièce) Roemer s'était servi, comme Huygens le fait dans la Fig. 110, de la considération de poids suspendus aux contours des „roües". On voit aussi des poids suspendus de cette manière dans les figures de de la Hire. La Fig. 112 montre en outre les „rouleaux" de la Fig. 107.

Roemer avait sans doute donné de bonnes raisons pour se borner à la considération d'un seul couple de dents et à celle de poids II et 2 égaux. Voir à ce sujet les Prop. III et IV de l'article de de la Hire. Il est évident qu'il résulte de la constance du rapport des moments exercés par les deux roues l'une sur l'autre dans le cas de l'engrenage d'un seul couple de dents convenablement taillées, que la rotation uniforme d'une des roues correspond à une rotation uniforme de l'autre: cette uniformité subsiste lorsque plusieurs couples de dents s'engrènent simultanément. Voir aussi le cinquième alinéa de la note 2 de la p. 607.

[1]) Voir ce que nous avons remarqué dans la note 2 de la p. 612 au sujet de la Fig. 110.

duplo ad BD ipſumque tangentem in D, ductaque ED ad circonferentiam in F, fit arcus DF ſimilis DO vel BC, ideoque arcus DF dimidio BC, hoc eſt ipſi DB æqualis. Unde F in epicycloide è circulo DF ſuper BD revoluto, cujus initium B.

∠ PAR ∞ ΔMN [Fig. 110 et 111] [2]). erit arcus RB ſimilis NΔ, qui ipſius eſt duplus. Et quia AP ∞ $\frac{1}{2}$ MP, erit RP perpend. AP et NRP linea recta. et NR ∞ RP. Et QR arcus ∞ RB. Super R puncto ſit deſcriptus circulus RNZ [Fig. 111], tangens BQ in R et diametrum ſubduplam habens circuli BQ. productâ DR erit arcus RN ſimilis RBD, ideoque æqualis RB ſeu RQ. Unde punctum N in Epicycloide QN.

Rota BD habens dentes formatos ſecundum BF [Fig. 111], ſed horizontaliter longos dum ipſa verticali poſitu convertitur impellitque dentes rotæ duplo majoris Ω [Fig. 110] horizontali ſitu poſitæ ac proinde dentibus perpendiculariter erectis ac rectilineis, ſemper æquabili vi rotam hanc circumagit.

Et quod mirum, hæc ipſa rota BD conveniret rotæ ſibi æquali, quæ in eodem cum ipſa plano eſſet poſita [3]).

Si rota ST [Fig. 113] ſubtriplam diametrum habeat rotæ coronariæ quam circumducere debet, erit forma dentium ex epicycloide SV cujus circulus genitor TV æqualis ipſi ST. Nempe radius rotæ LT cum diametro TX æquantur radio rotæ Ω. idque ita ſemper ſe habet, in quavis proportione rotæ ST ad Ω [4]).

Unde ſi ST ipſi Ω æqualis fuerit, epicyclois ad punctum reducta erit. unde nulli dentes curvi, ſed ipſæ extremitates radiorum ut LS in dentes rotæ Ω agere debebunt.

---

[2]) Le point R est d'après la construction indiquée le point d'intersection du rayon AR et de la circonférence de cercle QBD. Huygens démontre que ce point se trouve sur la droite NP et en occupe le centre.

Il en conclut ensuite que le point de contact N se trouve sur l'épicycloïde QN (faisant en Q un angle de 180° avec AQ) décrite par un point d'une circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ AB roulant sur la circonférence de diamètre AB. C'est l'épicycloïde considérée aussi à la p. 399 qui précède. La Fig. 111 fait voir que l'horizontale RN est normale à l'épicycloïde. La forme de la partie courbée de la dent du pignon qu'il s'agissait de déterminer (fin du deuxième alinéa de la note 2 de la p. 612) a donc été trouvée: la surface considérée est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à celles du pignon et dont l'épicycloïde est la section droite.

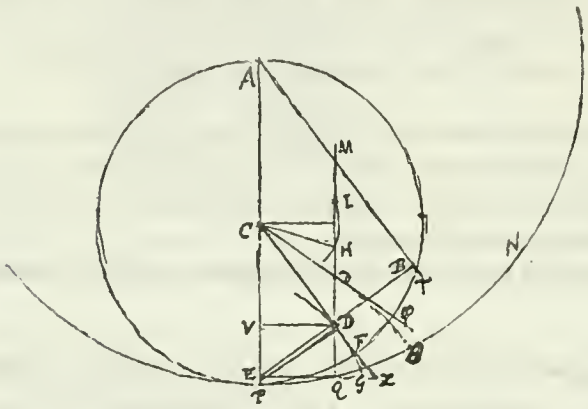
[3]) En effet, dans le cas de la Fig. 107 (et dans celui de la Fig. 112), le „rouleau", qui produit l'épicycloïde par sa rotation sur une „roüe", a un rayon égal à la moitié de celui de cette „roüe" dans le cas où les deux „roües" ont même diamètre.

[4]) D'après l'équation de la note 5 (p. 613), on a (en prenant toujours Σ = Π), AP = $\frac{1}{8}$ MP, lorsque, ce que Huygens suppose ici [Fig. 111], AB = $\frac{1}{8}$ MΔ. Il en résulte que dans la Fig. 110 l'arc BR est désormais le tiers de l'arc QB. Il en est de même dans la Fig. 111 et il faut donc, pour que le point N, intersection de PR prolongée avec la circonférence RNZ, vienne s'appliquer au

Hæc ST conveniret rotæ duplæ planæ. Quod si ST rota ad quadruplam coronariam aptata esset, conveniret planæ sibi triplæ. Et sic deinceps [1]).

§ 2. Forme des dents d'une roue de champ qui engrène dans un pignon à dents plates, d'après Huygens.

[Fig. 114.]



19 Nov. 1680.

Je concois le grand cercle PGN [Fig. 114], qui est la roue de champ — GD dens [2]) — couché plat sur ce papier; et le cercle PTA, qui est celuy du pignon, c'est a dire qui en termine toutes les dents, qui sont plattes, je le conçois dressé perpendiculairement sur ce papier. Mais en sorte que la commune section des plans de ces 2 cercles est dans la ligne EQ [3]). Quand la dent platte du pignon est par CD, et la dent GD pressé, ou est pressée en D, la ligne de

point Q par le roulement de cette circonférence, que le rayon du cercle roulant RNZ soit égal à celui du cercle BRQ.

Lorsque $AB = \frac{1}{n} M\Delta$, donc aussi $AP = \frac{1}{n} MP$, on aura: arc $BR = \frac{1}{n}$ arc QB, ou bien: arc $QR = (n - 1)$ arc BR. Le rayon x du cercle roulant doit être tel d'après la Fig. 11 que arc QR : 2 arc $RB = x$: AB, rayon du cylindre. Il en résulte $x = \frac{1}{2}(n - 1)$ AB. Par conséquent, comme le dit Huygens, le rayon du cylindre augmenté du double du rayon x, est toujours égal au rayon $M\Delta$ de la roue de champ.

[1]) La roue „ST" à rayon AB (section plane du cylindre des Fig. 109 et 110, menant la roue de champ à rayon n.AB) a des dents dont la surface épicycloïdale est déterminée (note 4, p. 516) par le roulement du cercle à rayon $\frac{1}{2}(n - 1)$ AB sur le cercle à rayon AB. Or, d'après ce que nous avons dit dans la note 1 de la p. 611, la roue plane à rayon AB qui mène une autre roue plane de rayon $(n - 1)$ AB, possède également des dents dont la forme épicycloïdale est déterminée par le roulement du „rouleau" — Fig. 107 et Fig. 112 — à rayon $\frac{1}{2}(n - 1)$ AB sur le cercle à rayon AB.

[2]) Dans le § 2, contrairement à ce qui a été supposé dans le § 1, ce sont les dents de la roue de champ qui sont courbées de manière à être constamment en contact avec les dents plates du pignon, les mouvements de la roue et du pignon étant l'un et l'autre uniformes. Ainsi que Huygens le dit un peu plus loin, le rayon du cercle PTA est d'abord supposé (comme dans le § 1) égal à la moitié de celui du cercle PGN.

[3]) Il existe évidemment un *cylindre* qui „termine toutes les dents" du pignon. Le „cercle PTA,

preſſion eſt perpendiculaire à CD, ou parallele à EB. Et comme le point D eſt au deſſus de Q [4]), la ligne de preſſion eſt donc dans le plan perpendiculaire ſur QE. Que ſi la preſſion ſe faiſoit ſuivant la ligne QE ou une a luy parallele, la force [5]) s'en meſureroit par la diſtance entre E et A centre de la roue de champ. Mais ſe faiſant par une parallele à BE, elle eſt moindre que elle feroit ſelon la raiſon de AB à AE comme il ſe demonſtre dans les mechaniques. Il faut donc que AB, et non AE, ſoit double de CD [6]), qui meſure abſolument la preſſion de la dent CDF du pignon [7]). AB debet eſſe dupla CD.

C centre du cercle PTA. A centre du cercle PQN de double diametre. Le point Q donne QE perpend. ſur CP. QM parallele à CP. Il faut trouver dans QM le point D, par ou eſtant menè le rayon CDF, et EB perpend. à CD et rencontrant AT parallele a CD, la droite AB ſoit double de CD.

CV ∞ x. AE ∞ b. EQ ∞ c.

CD	CV	EA	AB
$\sqrt{xx+cc}$	x	b	$\frac{bx}{\sqrt{xx+cc}} \infty 2\sqrt{xx+cc}$
			$bx \infty 2xx + 2cc$
			$\frac{1}{2}bx - cc \infty xx$
			$\frac{1}{4}b \between$ [8]) $\sqrt{\frac{1}{16}bb - cc} \infty x$ [9]).

Conſtructio. Centro C, radio CH ∞ $\frac{1}{4}$AE ſcribatur circonferentia quæ fecet rectam

qui est celuy du pignon" est une section droite de ce cylindre, savoir le cercle qui donne avec celui de la roue de champ (d'où s'éleve la courbure des dents) l'intersection EQ.

4) Huygens dit donc que le point de contact de la dent considérée avec la surface plane d'une aile du pignon se projette toujours sur le contour du cercle de la roue de champ. En d'autres termes, la dent (supposée apparemment sans épaisseur) est par hypothèse une partie de la surface cylindrique élevée perpendiculairement sur la circonférence du cercle de la roue de champ.

5) „La force de la pression" est évidemment son moment par rapport à l'axe de rotation.

6) Comparez la note 5 de la p. 613.

7) C.à.d. qui est le bras de levier de la pression exercée par, ou sur, la dent du pignon.

8) Le signe $\between$ signifie $\pm$.

9) Soit AP, rayon du cercle de la roue de champ $= R$. La Fig. 114 fait voir $c^2 = R^2 - b^2$. On a donc $x = \frac{1}{4}b \pm \sqrt{\frac{17}{16}b^2 - R^2}$. Par conséquent b est comprise entre les limites $R\sqrt{\frac{16}{17}}$ et R. Pour $b = R\sqrt{\frac{16}{17}}$ on a $x = R\sqrt{\frac{1}{17}}$ et $c = R\sqrt{\frac{1}{17}}$. On peut trouver des limites analogues dans le cas du „pignon double de la roue de champ", etc.

QM, parall. AP, in H et I. ponaturque HD vel ID æqualis radio CH, erit D vel D punctum quæſitum [1]). CDF erit dens planus rotæ quam pignon vocant. Sumatur arcus PG æqualis arcui PF. Erit arcus GQ diſtantia perpendicularis QD ab initio curvæ GD, quæ formam dentis refert. Similiter poſito arcu Pθ ∞ Pφ erit θQ diſtantia perpendicularis QD ab initio curvæ, quod initium nunc eſt in θ.

Le pignon double de la roue de champ $\frac{bx}{\sqrt{xx+cc}} \infty \frac{1}{2}\sqrt{xx+cc}$ [2])

$$bx \infty \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}cc$$

$$2bx - cc \infty xx$$

$$b \mathrel{\&} \sqrt{bb - cc} \infty x.$$

Pignon quadruple de la roue de champ $\frac{bx}{\sqrt{xx+cc}} \infty \frac{1}{4}\sqrt{xx+cc}$ [2])

$$bx \infty \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}xx$$

$$4bx - cc \infty xx$$

$$2b \mathrel{\&} \sqrt{4bb - cc} \infty x.$$

Pignon et roue de champ ſuppoſez egaux [2]). La conſtruction univerſelle eſt dans

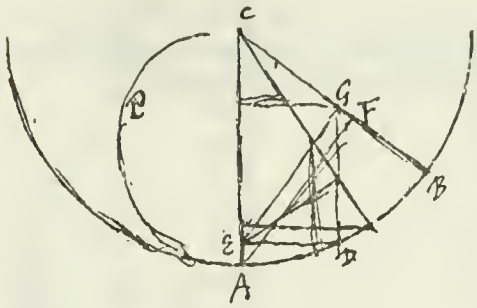
---

[1]) Suivant l'équation le point D le plus bas est obtenu en prenant CV = CH + $\frac{1}{2}$ HI; DD = HI donne ensuite le point supérieur D.

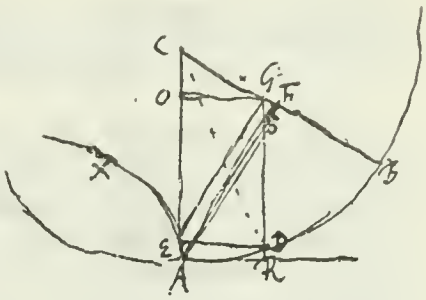
[2]) Dans le cas où le rayon du pignon est double (ou quadruple) de celui de la roue de champ — ou bien égal à ce dernier —, l'égalité des moments exige que l'on ait AB = $\frac{1}{2}$ CD (ou = $\frac{1}{4}$CD) — ou bien AB = CD.

la page precedente [3]) et pour ce cas des roues egales l'equation feroit $\frac{1}{2}b \mathcal{R} \sqrt{\frac{1}{4}bb - cc} \infty x$. Et jam hic A et C in unum punctum conveniunt.

[Fig. 115.]



[Fig. 116.]



CB aifle platte du pignon, qui eft venue de CA en CB [Fig. 115]. AX figure de la dent de la roue de champ. Le bout A de cette dent fera en B (a caufe de l'egalite des roues et de leur converfion egale), en concevant maintenant le cercle AB pour celuy de la roue de champ duquel s'eleve la courbure des dents.

Je veux fcavoir un des points de la courbe AX dont le bout eft venu en B, fcavoir le point ou cette dent courbe touche a la dent platte CB du pignon cylindrique. [Soit AF perpend. fur CB, et AR fur AC. Et cherchez avec une regle parallele à CA, ou il faut placer GR en forte que fa partie GS foit egale a DR] [4]). Alors la ligne DG eft celle qu'il faut elever perpendiculairement fur le plan de cette feuille, au deffus du point D, fcavoir fuivant la furface cylindrique fur la bafe AC [5]) de la roue de champ. Et le point G de cette ligne ainfi elevée fera un des points de la courbe de la dent qui commence en B [6]).

Cette courbe eft a peu pres comme une demie cycloide du cercle CPA [Fig. 116] enveloppee autour dudit cylindre mais elle eft plus platte entre l'extremite et le fommet qui convienent exactement [7]).

---

[3]) Début du § 2.

[4]) La phrase que nous avons placée entre crochets, a été biffée par Huygens. En effet, cette construction ne s'accorde pas avec l'équation trouvée qui donne CO ou x et par conséquent la place du point G [Fig. 115] lorsque b (CE) ou c (ED) est donnée.

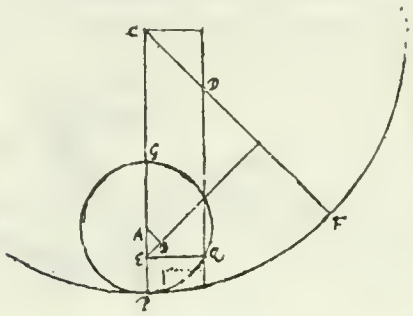
[5]) Il faut sans doute lire AB. Comparez la note 4 de la p. 617.

[6]) Pour trouver un point de la dent AX (la courbe AX se trouve en réalité sur la surface cylindrique dont il vient d'être question), il faut décrire sur cette surface vers le côté gauche à partir du point G — situé au-dessus du point D par rapport au plan du papier — uu arc horizontal égal à l'arc AB. On trouve tous les points AX en tenant compte de tous les points G correspondant à des angles ACB quelconques.

[7]) ?

Pignon quadruple de la roue de champ [Fig. 117 et 118].

[Fig. 117.]



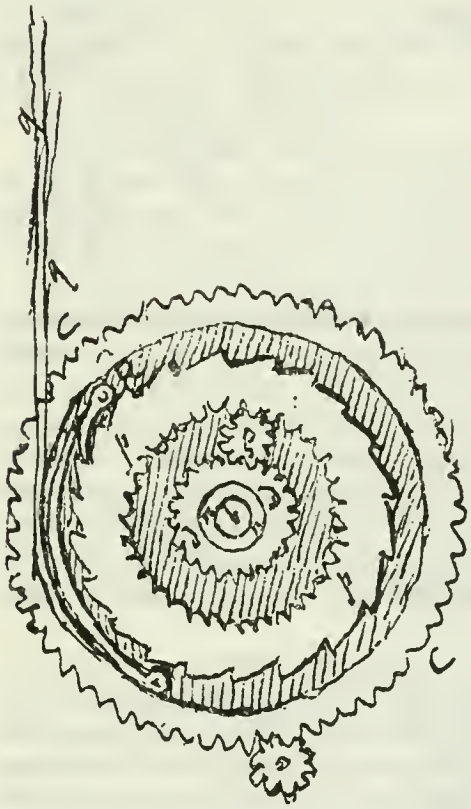
[Fig. 118.][1])

[1]) ?

III.[1])

MANIERE DE FAIRE QU'EN MONTANT L'HORLOGE ELLE NE DISCONTINUE POINT SON MOUVEMENT, DONT LES HORLOGERS SE SERVENT SANS EN SCAVOIR RENDRE RAISON.

[Fig. 119.]



CC [Fig. 119 et Fig. 120] eſt la roue dentee ſur la quelle eſt poſee la fuſee, qui s'y enſonce un peu. Le cercle *pp* eſt de fer, et rivè a la fuſée, ayant les dents d'areſt en dehors, que la piece Q empeſche de tourner a droite. Le meſme cercle *pp* a des dens en dedans qui engrainent dans le pignon *s*, attachè ſur la roue CC. La roue *dd*, qui eſt attachée a la virole *mn*, engraine auſſi dans le pignon *s*. Et l'axe court *aa* tient attachè a cette virole. Lors qu'on tourne cet axe à droite et avec luy la roüe *dd*; le pignon *s* tourne a gauche, et fait tourner de meſme le cercle dentè *pp*, avec la fuſée qui y eſt attachée. ce qui fait remonter la corde ſur la fuſée, le cercle CC demeurant en repos avec ſon axe *bb*.

La reſiſtence que trouvent les dents du pignon *s* à faire tourner à gauche la fuſée, qui attire le tambour par la corde *qq*; cette reſiſtence dis je fait que les dents oppoſees du meſme pignon *s* doivent ſouffrir une pareille preſſion par les dents de la roüe *dd*, qui tourne a droite. la quelle preſſion fait effort ſur la roüe CC (parce que le pignon *s* y eſt attachè) pour la faire tourner à droite. Et ainſi la Roüe C travaille pour faire aller l'horloge pendant que la fuſee remonte le reſſort, en tournant à gauche.

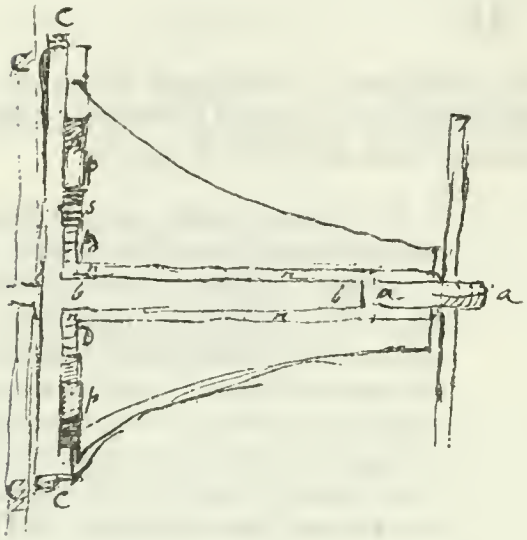
Si le cercle dentè interne de *pp* eſt double de la roue *dd*, l'horloge ſe remontera avec la moitiè de la force [2]) d'un remontoir ordinaire et en recompenſe le nombre des

---

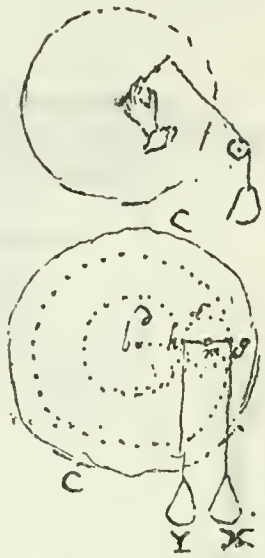
[1]) Manuscrit F, p. 175.

[2]) Ici il s'agit, peut-on dire, d'un moment. Il en est de même plus loin.

[Fig. 120.]



[Fig. 121.]



tours que fera la clef fera auſſi double de l'ordinaire. Il arrivera auſſi que les dens de la roüe CC agiront avec plus de force que lorſque l'horloge va, et cela dans la raiſon de 3 à 2. Car ſi la roüe CC fait effort, lors que l'horloge va, comme ſi elle eſtoit tiree au point *g* [Fig. 121] par le poids *X*, Et que *gh* ſoit une balance ayant les bras egaux *gm*, *mh*; il faudra un poids *Y* egal a *X* pour tenir la balance en equilibre. Le poids *X* eſt l'effort du grand reſſort qui tire la fuſee. *Y* la force qu'il faut aux dents de la roüe *dd* pour faire tourner le pignon *s* en ſorte qu'il faſſe tourner le cercle *pp*. Mais comme le poids *Y* n'agit qu'a la moitiè de la diſtance du centre *b* de ce que fait le poids *X*, il adjoute ſeulement une partie de force aux deux parties que [ca]uſe le poids *X* a l'action de la roue CC.

Ainſi cette force devient a celle du remontoir ordinaire comme 3 a 2, car en montant l'horloge a l'ordinaire il ne faut au point *g* que la force pour attirer le poids *X* [1]). Mais la difficultè qui procede de l'engrenage des dents fait qu'elle devient quelquefois double et plus. Il paroit au reſte par cette explication que tant que la roüe *dd* eſt plus petite a raiſon de la roue interne *pp*, la force de la roue CC en remontant ſurpaſſe moins ſa force en allant. Et que l'on remonte d'autant plus facilement mais avec plus de temps ou de tours.

[1]) On lit encore en marge: „La force pour remonter est a la force ordinaire comme *bh* a *bg*. la force des dents de la roüe CC en remontant est augmentée selon la raison de *bg* + *bh* à *bg*".

IV.[1]

FORME DE LA VIS ET DE L'ECROU SERVANT À MONTER OU BAISSER LE PLOMB DU PENDULE.

Om het loot van 't pendulum met een ſchroef daer onder te konnen opwaert en neerwaert ſchuijven.

GHCD [Fig. 122] is het loot vant pendulum ſteeckende op de ſpil die hier vierkant is, en van K tot L met een ſchroef.

CD is een kopere plaetje paſſende onder tegen het loot, en hebbende in midden een gat daer de ſpil door ſteeckt.

AB is een ringetie van koper, met een rondt gat in midden, 't welck wijder is nae boven als nae onder. Door dit ringetie, eer dat men 't op het plaetje CD met penneties vaſt maeckt, ſteeckt men het cylindertie EF, dat naer boven wat uijtgeſet is en van binnen met een moer, die omde ſchroef voorſ. paſt.

Als men dan dit cylindertie d'een of d'ander wegh om draeijt ſoo ſal noodſaeckelijk het loot GABH op of neerwaert gaen. Waerdoor de ſlinger licht op ſijn maet geſtelt ſal werden.

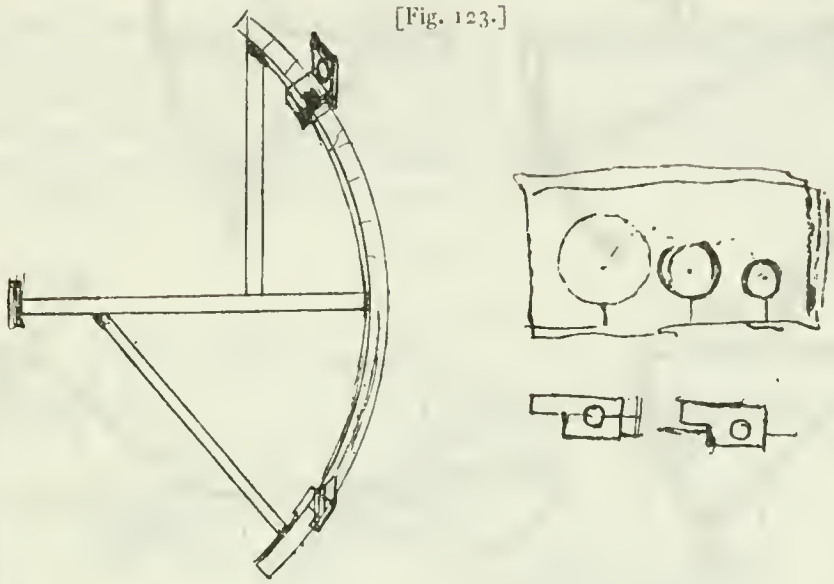
[Fig. 123.]

[1]) Manuſcrit F, p. 294, datant de 1687.

INSTRUMENTS NAUTIQUES.

INSTRUMENTS NAUTIQUES[1]).

[Fig. 123.]



Schuyfje van kopere plaet om het glas min en meer opening te laeten. Of drij verſcheyde ronde gaeten in een ſchuijf [Fig. 123].

Lignum [Fig. 124] oleo imbuatur ne ab aeris humiditate torqueatur.

In magnis ſolis altitudinibus[2]) pondus C [Fig. 125] affigendum quadranti quo commodius ſuſtineatur. Lens ſit æquabiliter craſſa circa margines.

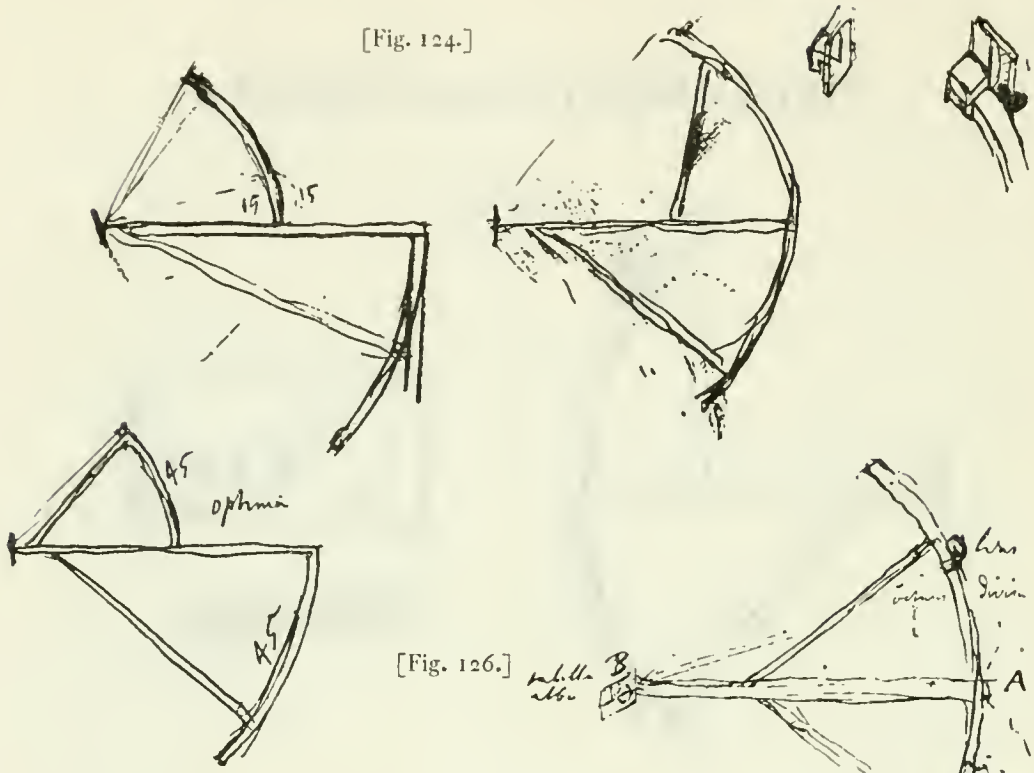
Lens vitrea in curſore ſeu pinnacidio mobili [Fig. 126]. Tabella alba. Octans diviſus in triadas graduum. AB perpendicularis in tabellam B. Oportet ut imago ſolis B bifariam dividatur a recta quæ mediam tabellam ſecat, utque eadem ab horizonte bifariam dividatur. Octans diviſus in gradus et decima graduum.

---

[1]) Manuscrit F, p. 221—225, datent de 1685 ou 1686.

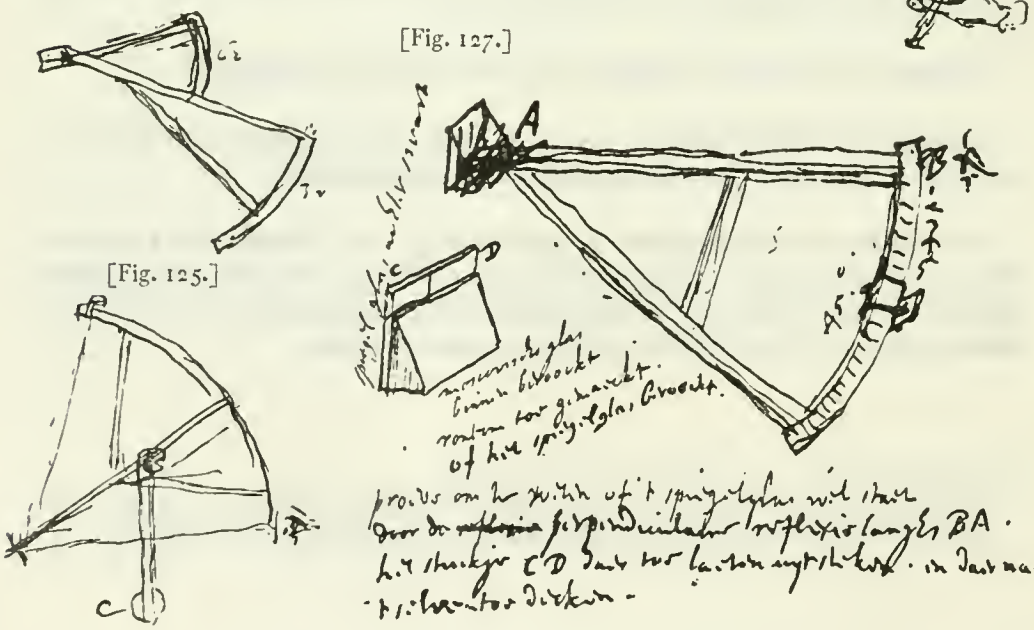
[2]) Parmi les figures de la Fig. 124 on en voit une où les deux angles au sommet sont respectivement de 60° et de 30°: c'est le „quartier anglais" dont il est question à la p. 371 qui précède.

[Fig. 124.]



[Fig. 126.]

[Fig. 127.]



[Fig. 125.]

Cochlea ad movendum pinnacidium D utiliter adhiberetur qualis in inſtrumentis Hevelianis [1]).

Solis imago diſtincta apparebit et ſemper oculo rotunda. Dummodo lens et oculus æqualiter diſtent. hanc imaginem horizon biſariam dividat.

Den boogh alleen in graden verdeelt [Fig. 127], en aen de loper van 't viſier een koperplaetjen, begrijpende een graed, gedeelt in 12 deelen ieder doende 5 minuten. [On lit dans la figure:] ſpiegelglas achter ſwart. moſcoviſch glas binnen beroockt rontom toe gemaeckt. of het ſpiegelglas beroockt. proeve om te weten of 't ſpiegelglas wel ſtaet. door de perpendiculaire reflexie langhs BA. het ſtuckje CD daer toe laeten uytſteken. en daernae 't ſelve toe decken.

[Fig. 128.]

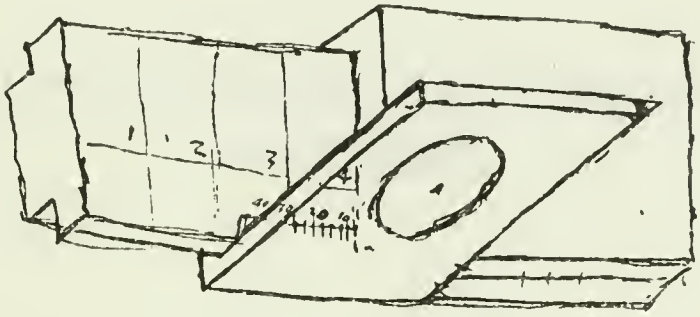


Figure sans texte.

[1]) La Pars Prior de 1673 de la „Machina Cœlestis" de J. Hevelius — à la p. 6 du T. XVII nous avons dit simplement: „Machina Cœlestis" de 1673; mais la Pars Posterior est de 1679 — traite des „Instrumenta astronomica omnia, quibus auctor hactenus sidera rimatus ac dimensus est, etc.". Les „cochleæ" y sont souvent mentionnées et représentées dans les figures; voir à ce sujet l'„Index Rerum" de la Pars Prior. Le Caput XIV traite „de instrumentorum pinnacidiis, sive dioptris"; l'auteur y explique à la p. 287 „pinnacidiis quâ ratione cochlea sit adhibita".

RÉSULTATS DE QUELQUES EXPÉDITIONS MARITIMES.

RÉSULTATS DE QUELQUES EXPÉDITIONS MARITIMES.

A. L'EXPEDITION DE 1669 DE TOULON À CANDIE ET RETOUR DU DUC DE BEAUFORT ET DE DE LA VOYE [1]).

La Voye [2]) met le retardement journalier d'une minute ſeulement, mais ſon erreur de calcul de 10″ fait voir que ce retardement eſt environ de 1.2″. comme il eſt auſſi par ce calcul depuis le 18 Juin juſqu'au 19 Jul.

Il y a quelque difficultè en ce que la Longitude de Toulon a l'iſle de Maretimo en allant luy ſemble avoir eſte de 23′.40″ (c'eſt a dire en corrigeant ſon abus de 23″, et en diminuant la longitude de 7″ par jour). Et qu'en retournant de Candie la Longitude entre ce lieu et la meſme iſle de Maretimo ſemble n'avoir eſtè [que] de 53′2″. Partant toute la longitude entre Toulon et Candie ne ſeroit que de 1ʰ.16′.42″. La quelle pourtant il a trouvée en retournant, de 1ʰ.19′.13″, et en allant encore un peu plus grande, ſi l'on regarde ſon obſervation du 18 juin, auquel jour la longitude eſt 1.20.56, qui eſtant diminuée, comme il veut, a raiſon de 7″ par jour depuis le 30 maj. vient 1ʰ.18′. 43″ et adjoutant 1 min. vers l'Eſt, vient pour le lieu de mouillage et d'ou il compte la Longitude en retournant, 1.19.43.

30 Maj.	1ʰ.20′56″
18 Jun.	2.13
19	1.18.43
7″	1
133 | 2′13″	1.19.43.

---

[1]) De la Voye retourna seul en France; voir la p. 116 qui précède. Nous avons déjà dit (p. 373) que nous ne possédons plus son rapport. Nous aurions pu dire à la p. 10 que dans le voyage de Candie le poids servant à tenir l'horloge verticale était de plus de 300 livres (T. IX, p. 290).

[2]) La Pièce est empruntée aux p. 208 et 209 du Manuscrit F.

Suivant Lodewijk Huygens de la Voye avait fait d'abord, sans beaucoup de succès, un autre voyage pour éprouver les horloges (T. VII, p. 27). Les „Comptes des bâtiments du Roi" de J. Guiffrey font mention d'un voyage aux Indes: „3 décembre 1669, Sr de la Voye, mathematicien, envoyé aux Indes Orientales pour faire expérience de l'horloge à pendule pour les longitudes 900*fl*; sçavoir 600*fl* pour quatre mois de ses appointemens commenceans au 1er décembre et finissans au dernier mars 1670 et 300*fl* pour son voyage et port des pendules et instrumens mathématiques de Paris à la Rochelle". S'agit-il ici d'un voyage *antérieur* à celui de Candie? Cela paraît peu probable.

Mais il faut conſiderer que les lieux ou il obſervoit les Longitudes pres de Maretimo le 9 Juin et le 9 Sept. n'eſtoient pas a la meſme longitude de Maretimo, puiſque depuis l'heure de l'obſervation le navire faiſoit du chemin, en ſorte qu'on peut bien poſer que Maretimo eſtoit a l'Eſt de Toulon de 24'.40" et a l'Oueſt de Candie de 54'.2". Ce qui fait enſemble $1^h.18'.42''$.

Les réſultats de ce calcul diffèrent de ceux donnés dans l'„Horologium oſcillatorium" (p. 118 qui précède), comme l'indique le tableau ſuivant:

	Toulon-Maretimo	Maretimo-Candie	Toulon-Candie
Différence des longitudes			
ſuivant la Carte de Viſſcher	8°10'[2])		
ſuivant le Globe de Blaeu [1])			24°30'[2])
ſuivant „la Carte du veſtibule"			23°30'[2])
ſuivant la Carte de de Wit de 1672	6°40'[2])		22°30'[2])
ſuivant la Carte de Doncker	5°40'[2])		16°45'[2])
ſuivant l'„Hor. oſc." (p. 118)	6°20' = 25 min. 20"	14°10' = 56 min. 40"	20°30' = 1^h. 22 min.
ſuivant le préſent calcul	6°10' = 24 min. 40"	13°30½' = 54 min. 2"	19°40½' = 1^h. 18 min. 42"
ſuivant les cartes modernes	6° 9'[3]) = 24 min. 36"	13° 4'[3]) = 52 min. 16"	19°13' = 1^h. 16 min. 52"

En 1685 Huygens ne calcule pas, ſuivant les données du rapport, la différence des méridiennes de Toulon et de l'île Sapienza[4]). Elle eſt ſuivant l'„Hor. oſc." (p. 118) de 16°26', ſuivant les cartes modernes de 15°46'.

---

[1]) Il s'agit du célèbre cartographe d'Amsterdam Willem Jansz. Blaeu (1571—1638).

[2]) C'est à la p. 211 du Manuscrit F que Huygens donne les différences des longitudes entre les endroits nommés suivant les cartes de de Wit de 1672 („Caert van Europa"), de Doncker („Zee-atlas Doncker drukker in 1665"), de Visscher et „du vestibule [de la maison du Plein]" („Caerte van Europa int voorhuijs").

À propos de Doncker Huygens ajoute „ſoo ick ſijn Caerten wel verſtaen". En effet, H. Doncker — édition nommée — n'indique pas bien les degrés des longitudes de ses méridiennes. Nous trouvons les mêmes distances que Huygens en admettant, ce qui est douteux, que les degrés des parallèles ont chez Doncker tous la même longueur, savoir celle qu'il indique sur ses cartes par une ligne droite représentant un degré.

Quant à Visscher, Huygens a sans doute eu une autre carte que celle („Europa delineata et recens edita per Nicolaum Visscher") qui se trouve dans l'„Atlas contractus Orbis Terrarum præcipuas ac novissimas complectens tabulas, Amstelodami, ex officina Nicolai Visscher"; car suivant celle-ci nous ne trouvons pour Toulon-Maretimo que 6°20' (et pour Toulon-Maretimo 22°10').

La carte de l'Europe qui se trouve dans l'„Atlas" de Frederick de Wit (tot Amsterdam, in de Calverstraet bij den Dam inde Witte Paskaert) donne pour Toulon-Maretimo 8°50', pour Toulon-Candie pas moins de 25°45'. Ce n'est donc pas cette carte-là que Huygens a consultée. Voir encore sur les cartes mentionnées par Huygens les Additions et Corrections à la fin de ce Tome.

Notons qu'à la même p. 211 du Manuscrit F Huygens donne 6°35' et 19°45' pour

Ce tableau fait voir que Huygens a ſu tirer en 1685 des obſervations de de la Voye des nombres fort approchés des vraies valeurs[5]), meilleurs que ceux publiés dans l'„Horologium oſcillatorium". La différence des méridiennes de Toulon et de Maretimo (voir la note 3) est même parfaitement correcte.

Les 53 min. 2″ trouvées par de la Voye en retournant de Candie à Maretimo s'écartaient encore moins de la vraie valeur que le nombre donné par Huygens. Et en adoptant $1^h.16'42''$ pour la longitude entre Toulon et Candie on aurait été (plus ou moins par haſard) bien près de la vérité.

Dans ſon „Hiſtoire de l'aſtronomie moderne", T. II, 1821, p. 553 Delambre dit qu'on trouve „aujourd'hui" 19°22′34″ ou $1^h.17$ min. 30″ pour la différence des méridiennes de Toulon et de Candie.

B. L'EXPEDITION DE 1672—1673 DE J. RICHER À CAYENNE.

Seecker Fransman wiens relatie gedruckt is[6]), ſuſtineert geobſerveert te hebben in Cajana, gelegen aen de Cuſt van Weſtindien 4 graden 56 min. benoorden de Linie Equinoctiael de Lenghde van een ſimpel pendulum wiens ieder ſlagh een ſeconde doet, aldaer minder moet weſen een linie en een vierdepatt (ſijnde een linie $\frac{1}{12}$ part van een duijm), als die tot Parijs ofte oock alhier in Hollandt en Engelandt bevonden werdt, ſijnde op alle deſe plaetſen deſe lenghde de ſelfde, te weten van 3 voet 2 duym en $\frac{1}{3}$ van een duijm. Doch dewijl hij geen circumſtantien van ſijne obſervatien bij en braght ſoo heeft men ſijn ſeggen te beſwaerlycker konnen gelooven, de ſaecke nochtans ſeer aenmerckenswaerdigh ſijnde ten aenſien van onſe ſlingerwercken, dewelcke indien dit waer was . . .[7]).

Toulon-Maretimo et Toulon-Candie d'après les observations de de la Voye. Le calcul du texte donne, comme on voit, des valeurs plus approchées.

[3]) 6°9′ est la moyenne de 6°7′ et 6°11′, valeurs correspondant aux points extrêmes de Maretimo. De même 13°4′ est la moyenne de 13°1′ et de 13°6′.

[4]) On lit encore à la p. 209 du Manuscrit F à propos du même voyage: „En allant Maretimo. Alicate [Licata] en Sicile. 16 Jun. Sapienza inſula a l'oueſt de la Morée. Cap de Matapan de la Morée et a l'oueſt de l'iſle de Serigues [Cerigo]. l'Etandia inſ. [Standia]. — St. Tropés. iſle d'Ieres [îles de Hyères]. Iſle de S. Pierre [S. Pietro]. Golfe de Palme, en Sardaigne. Cap de Tolaſe [Teulada] en Sardaigne. Maretimo. Cap de Paſtaro [Passero] en Sicile. Sapience 4 Sept. L'iſle Serigotte [Cerigotto] en revenant.

[5]) Supposées invariables.

[6]) La Pièce est empruntée à la p. 225 du Manuscrit F, datant de 1685 ou 1686.

[7]) Traduction: „Un certain français dont la relation a été imprimée, soutient avoir observé qu'à Cayenne, située près de la côte de l'Inde Occidentale, à 4°36′ au nord de l'équateur, la

Richer avait publié ſa relation en 1679. On la trouve ſous le même titre („Obſervations aſtronomiques et phyſiques faites en l'iſle de Caienne"; par Monsieur Richer) dans le T. VII de 1729 des „Mémoires de L'Acad. Royale des Sciences, depuis 1666 juſqu'à 1699". L'article I du Chap. X qui traite „de la longueur du pendule à ſecondes de temps" eſt en effet fort bref. L'auteur ne publie aucun protocole, mais ſe contente de dire que „cette obſervation a eſté réiterée pendant dix mois entiers, où il ne s'eſt point paſſé de ſemaine qu'elle n'ait eſté faite pluſieurs fois avec beaucoup de ſoin".

Suivant la p. 275 du T. IX Richer avait été envoyé à Caïenne avec une inſtruction de Huygens.

On voit qu'en 1685 ou 1686 Huygens doutait toujours de la vérité de l'obſervation, quoiqu'il eût calculé déjà en 1666 (T. XVII, p. 285 et 286) la période des oſcillations en tenant compte de la force centrifuge réſultant, peut-être, de la rotation de la terre. Ce doute ſubſiſtait encore en mai 1687 (T. XVI, p. 377).

Vers la fin de 1687, après avoir écrit [1]: „Si terra eſſet ſphærica [2]), tum gravitas abſoluta ad vim centrifugam in E [point ſur l'équateur] ſicut 289 ad 1 [3])", Huygens exécute différents calculs ſur le raccourciſſement du pendule. Comme il a publié ſes réſultats quelques années plus tard dans le „Diſcours de la cauſe de la peſanteur", nous ne nous étendrons pas ici ſur cette matière.

Avant d'écrire les lignes citées, Huygens avait reçu le rapport de de Graaf, dont il eſt queſtion dans la Partie C qui ſuit, lequel mit fin à ſes doutes ſur la diminution de la peſanteur réſultant de la rotation de la terre [4]).

Remarquons encore à ce ſujet qu'en juillet 1687 Newton avait publié ſes „Philoſophiæ naturalis Principia mathematica", et que Huygens fit ſans doute immédiatement connaiſſance avec ce livre [5]).

C. L'EXPÉDITION DE 1686—1687 DE TEXEL AU CAP DE BONNE ESPERANCE ET RETOUR; RAPPORTS DE HELDER ET DE DE GRAAF.

Le Journal de Th. Helder [6]), ſe rapportant au voyage d'aller, a été conſervé. Nous poſſédons auſſi une copie, de la main de Huygens, du rapport de de Graaf du voyage de retour.

---

longueur d'un pendule simple à secondes est inférieure d'une ligne et d'un quart (la ligne étant $\frac{1}{12}$ du pouce) à celle qu'on trouve à Paris ou ici en Hollande ou en Angleterre, la longueur étant la même partout en ces lieux, savoir 3 pieds et $2\frac{1}{3}$ pouce [mesure de Rijnland; comparez la p. 571]. Comme d'autre part il ne publia pas de récit détaillé de ses observations, on n'a pas été convaincu par son affirmation. La chose serait certes fort importante et constituerait une propriété remarquable de nos pendules lesquelles, s'il en était ainsi . . .".

Cassini notamment n'était pas convaincu.

[1]) Manuscrit F, p. 300. Les p. 297 et 311 portent respectivement les dates du 6 novembre et du 3 décembre 1687.

[2]) Comparez le troisième alinéa de la note 7 de la p. 284 du T. XVII et les l. 5—2 d'en bas de la p. 31 qui précède: déjà à la p. 259 du Manuscrit F Huygens avait dit positivement: „formam ſphæricam tellus non habet".

[3]) Comparez la fin de la note 4 de la p. 326 du T. XVI.

[4]) Le 3 octobre 1687 Huygens écrit qu'il est en train d'examiner le Rapport de de Graaf (T. IX, p. 222). Le 1 septembre il ne l'avait pas encore reçu (T. IX, p. 208).

Le début du Journal de Helder, qui compte 25 pages, fait apparemment défaut, puisqu'il va du 24 mai au 26 septembre 1686, tandis que Huygens (T. IX, p. 287) cite e.a. ce que Helder avait rapporté le 20 mai. En outre Huygens dit en octobre 1687 (T. IX, p. 222) avoir reçu un livre de Helder contenant des calculs („boeck van sijne uitreekeningen") en original et en copie de la main de l'auteur, et un autre sur la concordance des horloges allant jusqu'au 2 octobre. Nous ignorons si à sa demande il reçut encore d'autres pièces provenant de Helder; il semble bien que non: consultez le troisième alinéa de la p. 289 du T. IX. Nous ne possédons ni le livre des calculs ni celui des concordances.

Le Rapport de de Graaf débute par un examen (4 pages) de la marche des horloges fait sur terre, du moins pour l'une d'elles, au Cap de Bonne Espérance. Au titre „T'onderfoecken de gangh van de Horologien A en B; of hoeveel dat deselve in een Etmael of 24 uren te ras of te langsaem loopen", Huygens ajoute la remarque suivante: „Om dese manier vande gangh der Horologien te onderfoecken, te verstaen, moet men nae sien de Instructie [T. IX, p. 55—76] bij mij aen de Graef en Th. Helder medegegeven. Dit onderfoeck is geschiet aen de Caep de B. Esper.ce het horologie B aen Landt zijnde".

Vingt-cinq observations de de Graaf se rapportent à B, deux seulement à A. Voici ces deux dernières:

				A	
Febr. 3. A	12.37.38		Dito 3.	12.37.38	
6. A	12.35.23		7.	12.34.47	
	23.57.45			23.57. 9	
	0.18			18	
	57.27			23.56.51	
	6			3	
	23.57.33	verachteringh dagh. 42″½[7])		23.56.54	veracht. dagx. 46½

Les calculs pour l'horloge B ont tous la même forme. Voir sur ces calculs, où entrent des nombres tirés de la table de l'équation du temps, la p. 60 du T. IX (ou la p. 208 du T. XVII).

L'horloge B avançait en janvier de près de 3′ par jour; de Graaf corrigea la marche en février et de nouveau en mars en déplaçant un peu le poids du pendule, de sorte que le retard journalier ne fut ensuite que d'une douzaine de secondes.

Le Rapport continue: „Den 20 April. Nadat wij sijn onder Seijl gegaen, soo isser in

---

[5]) Le 11 juillet il écrit à Fatio de Duillier: „Ayons le livre de Newton" (T. IX, p. 191).

[6]) Voir sur lui la note 3 de la p. 539 qui précède.

[7]) En marge: imo 49″; en effet le tiers de 147 est 49; c'est la seule correction apportée par Huygens aux vingt-sept calculs. Du 3 au 6 février l'horloge A retardait donc de 49″ par jour.

de vergadering befloten, dat men foude feijlen Noordt Weft ten Weften, tot op de Breedte van S. Helena. Maj. 9. Op de Breedte van S. Helena fijnde heeft men vorders de Coers Noordweft ten Noorden geftelt tot op de Breedte van Afcenfion. De Koers is geftelt van Afcenfion tot op de Breedte van 't Eylandt S. Iago [Sao Thiago, une des îles du Cap Vert] N. Weft [comparez l'avant-dernier alinéa de la p. 283 du T. IX]". Le 6 juin on réfolut de faire voile vers lè N. N. Oueft, etc.

Viennent enfuite une dizaine de pages fur „Het daghelyx verfchil der Horologien A en B" et les „Toevallen ontrent de Horologien". Depuis le 25 mai jufqu'au 15 août la dite différence B — A fut notée prefque tous les matins et tous les foirs; de 19'50" elle monta à 93'26". Le premier jour elle augmenta de 28", le dernier de 54½". Le 1 juin de Graaf dit avoir conftaté „dat met 't flingeren van 't fchip B ongelyck loopt". Le 10 juin il dit: „Bevonden A mede ongelyck te gaen. Wij hebben evenwel geoordeelt de Rekening op A voort te maecken, om dat de felve de flingher wel 't befte doorflingert. Defe ongelyckheijdt van gangh gefchiet door holle fee en befonder wanneer de dijningh van voren komt". Le 24 juin on conftata que le reffort du petit barillet de B était brifé: il fut remplacé par un autre [1]). Cette partie du Rapport fe termine par les mots: „Den 15 dito [c.à.d. le 15 août] op de middagh in Texel (godt lof) behouden met 't fchip 't wapen van Alemaer gearriveert A° 1687 [2])".

Dans les quinze derniéres pages „Aengaende de vindingh der Lengde" de Graaf calcule la longitude d'après l'Inftruction le 10 mai, le 27 mai, etc.; la colonne V de la table qui occupe les p. 279—282 du T. IX indique les jours et les réfultats du calcul. Voici p. e. le calcul du 10 mai:

May 10. Geobferveert de fon boven den horiz. 5.50, als 't horol. wees op 8.19'.45" uren 'favonds.

Compl. fons h.	84°10'		Uren door 't horol. B [comparez la p. 637].	
Compl. Zuyd. Br.	73.19	0.01868	8.19.45	
Compl. decl.	107.29	0.02055	5.	verachteringh in 20 daghen.
	264.58		8.24.45	
	132.29		16.34	
	59.10	9.93382	8. 8.11	
	25. 0	9.62594	19.22	
		2 19.59899	8.27.38	
		9.79949	6.47.28	
	komt fin.	39 .4	1.40. 5	verfchil in Lengde ten W.
		78 .8 2		

of 5.12.32 uren. dit van 12 uren komt 6.47.28.

[1]) Le ressort était en cuivre, comme nous l'avons déjà dit à la p. 514 (note 3).

[2]) Remarquons en passant que l'Alemaer faisait partie d'une flotte (premier alinéa de la p. 286 du T. IX).

Comparez ſur ce calcul, conforme à celui de Inſtruction, la p. 67 du T. IX. Si l'on appelle, comme dans la note 1 de la p. 226 du T. XVII, h la hauteur du ſoleil au-deſſus de l'horizon, d ſa déclinaiſon et α l'angle poſitif ou négatif qu'il a parcouru dans ſon orbite circulaire à partir du point culminant, on a $\sin h = \sin\beta \sin d + \cos\beta \cos d \cos\alpha$ pour un obſervateur placé à la latitude β. Cette formule peut s'écrire

$$\cos\alpha = \frac{\sin h - \sin\beta \sin d}{\cos\beta \cos d} \text{ ou } \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos(\beta - d) - \sin h}{2\cos\beta\cos d}} \text{ ou bien}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin[45^\circ - \tfrac{1}{2}(h + d - \beta)].\sin[45^\circ - \tfrac{1}{2}(h - d + \beta)]}{\cos\beta\cos d}}.$$ C'eſt là la formule employée par Huygens qui correspond aux calculs de de Graaf[3]).

Huygens diſcute les réſultats dans ſon Rapport du 24 avril 1688 (T. IX, p. 272—291). Il explique (p. 287—288) pourquoi les obſervations du voyage d'aller ſont ſans valeur: on n'avait pu déterminer avant le départ combien les horloges avançaient ou retardaient par jour; de plus les poids des pendules baiſſaient parfois quelque peu ſpontanément par ſuite du ballottement du vaiſſeau.

Huygens parle d'accidents de ce genre ſurvenus le 29 mai et le 3 août et notés par Helder tant dans ſon Journal que dans les „Toevallen ontrent de horologien". Dans le Journal nous ne trouvons rien à propos de l'accident du 29 mai. À la date du 24 mai, jour du départ, Helder parle du „lootsman die heel bekommert was dat het ſchip mocht kommen te ſtooten alſoo er maar een voet water meer was als het ſchip diep gingh"; il continue: „Bij de droogen komende gingh bij de horologien zitten en beſpuerden oock groote alteractien aen de horologien in 8 a 9 reyzen dat het ſchip grondt raakten maar byzonder de laatſte reys waardoor ze ook heel getroebuleert wierden en de penduleums deed beven zonder duer te ſlaan". Le 30 juillet l'horloge A s'arrêta parce qu'une des dents de la roue de rencontre s'était déformée. On répara l'horloge détraquée. Helder dit enſuite: „Den 3 auguſti s'avonds haakten de ſlinger af en bevondt dat het lootien van't pendulem was neergezakt. ik heb het dan zo na op de tijkens gezet als ik kon en het weder doen gaan zo bevond ik ſmorgens den 4 dat het weer zijn gewone ganck hadt. dit voorval [c.à.d. tout ce qui s'était paſſé depuis le 30 juillet] veroorzaakt groote confutzie [confuezie?] in deze zaak".

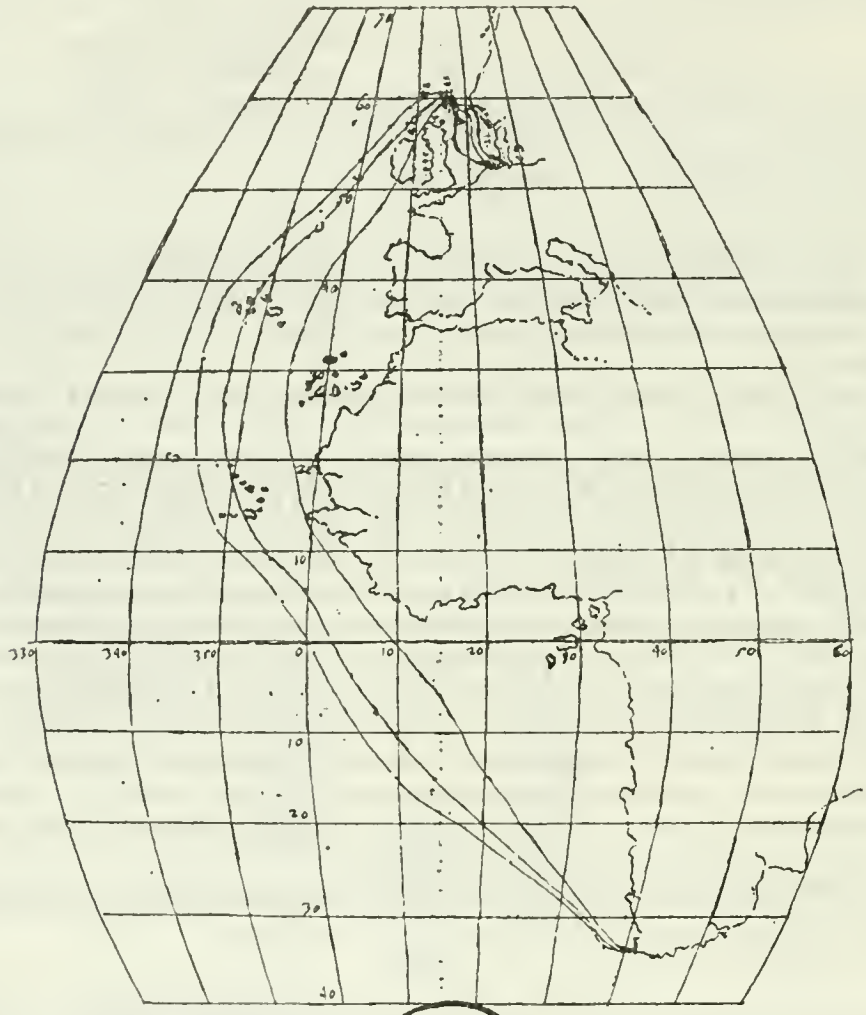
D'après Huygens (T. IX, p. 273) de Graaf dans le voyage de retour s'eſt fort bien acquitté de

---

3) Le cahier du rapport contient en outre, d'une main inconnue, 6 pages contenant les résultats de l'estime des pilotes de l'Alemaer. La copie commence comme suit: „Van de bekome Lengtens en Breedtens getrocken uijt een Journaal, komende van de Caap de Bonesperance na 't patria met Alkmaar A° 1687 den 20 April. April 20 lichte ons anker voor zonsondergangh met een klyn luchje, savons t Robbe Eylant op sey etc. dito 21 pijlde smorgens de Tafelberg Z. Z. Oost van ons 2½ a 3 mijlen, voors de heele dagh in stilte gedreven [comparez la p. 283 du T. IX]. dito 22, de gegiste Z. Breten 33:38 min. Lengte 36:42". Etc. jusqu'au 15 août. La latitude est estimée („gegist"), lorsqu'il y a des nuages, mesurée („bevonden") lorsque le soleil est visible.

ſa tâche („ſeer wel en ſorghvuldigh"). Preſque tous ſes calculs furent faits ſur l'horloge A qui ſe montra la meilleure (T. IX, p. 286); comparez les paſſages du Rapport de de Graaf cités plus haut.

[Fig. 129.]



ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

La Fig. 129, empruntée à une feuille ſéparée qui ſe trouve dans le Rapport de Huygens, fait voir, comme la Carte à la fin du T. IX (dont il a déjà été queſtion à la p. 544 qui précède), que

les longitudes calculées à l'aide des horloges ſuivant l'Inſtruction ne ſont pas juſtes, mais qu'elles deviennent juſtes, ou peu s'en faut, lorſqu'on tient compte de la diminution de la peſanteur due à la rotation de la terre. Dans les colonnes VI et ſuiv. de la Table du T. IX (p. 279—282) Huygens avait fait une erreur de calcul qui fut remarquée par de Volder (T. IX, p, 341, dernier alinéa); il l'a corrigée dans les deux manuſcrits de ſon Rapport; la Table nommée a les valeurs corrigées [1]). Dans la note 11 de la p. 284 du T. IX nous avons remarqué qu'„il y a erreur" dans la „ſomme 2 uren 59 min. 7 ſec." du 5 août qui conduit au chiffre „1 ure. 12 min. 43 ſeconden" devant trouver ſa place dans la colonne VIII. C'eſt vrai, mais l'erreur n'eſt, ici comme ailleurs, que de 30″ et a été corrigée par Huygens dans la Table; c'eſt pourquoi la colonne VIII donne 1.12.13 et non pas 1.12.43; ceci conformément aux corrections de de Volder (T. IX, p. 342), La correction a toutefois été mal faite par de Volder, nous ſemble-t-il, car au lieu de $2^h.59'7''$ (5 août) nous trouvons $2^h.59'37''$: il eût donc fallu *ajouter* 30″ à $1^h.2'43''$ au lieu d'en *retrancher* 30″ (d'après le dernier alinéa de la p. 284 du T. IX). En prenant donc 1′17″ dans la colonne VII et 1.13.13 dans la colonne VIII, nous obtenons 18°18′ pour le chiffre correſpondant de la colonne IX, qui eſt 18°3′ chez de Volder. On voit encore fort bien dans les manuſcrits de Huygens qu'il avait d'abord écrit 18°11′. Heureuſement de Volder ne s'eſt pas trompé dans le dernier chiffre [2]): il dit (p. 343) que la dernière différence de la colonne IX n'eſt pas 14°1′, comme Huygens l'avait écrit, mais 14°8′. Ici il ajoute donc les 7′ — ou plutôt 7′30″ [3]) — comme il aurait dû le faire partout. Sa concluſion qu'auprès de Texel l'erreur des horloges, lorſqu'on tient compte de la rotation de la terre, ne dépaſſe pas $2\frac{1}{2}$ mijlen (voir ſur la mijl hollandaiſe la note 3 de la p. 231 du T. XVII) reſte valable.

La Fig. 129 ſemble être antérieure à la Carte du Rapport de Huygens; en comparant l'allure des trois lignes, on voit que dans la Fig. 129 elles convergent moins bien vers Texel que ſur la Carte: l'une d'elles ſe termine près de Danemark. Huygens ne doit avoir fait un calcul plus exact que plus tard.

Obſervons que dans la Fig. 129 il ſe ſert du ſyſtème où les rapports des longueurs des degrés des parallèles entre elles ſont exacts, tandis que la Carte du Rapport, empruntée en grande partie à Rembrandtſz. van Nierop (T. IX. p. 285) eſt une „projection de Mercator" (comparez la note 1 de la p. 232 du T. XVII). Aux p. 211 (datant de 1685) et 313 (datant de 1687 ou 1688) du Manuſcrit F on trouve quelques remarques de Huygens reſpectivement ſur la projection de Mercator (qui n'y eſt pas nommé) et ſur les cartes où, „dans chaque parallele les degrez [ſont] egaux et dans la vraije proportion aux degrez de l'Equateur" („projection de Flamſteed").

Nous avons déjà dit à la p. 514 que la preuve expérimentale donnée de la rotation journalière de la terre et de l'exiſtence de la force centriſuge correſpondante a été le réſultat le plus remarquable de cette expédition. On peut toutefois ſe demander ſi elle a pu ſervir de plus, comme celle de 1669, à corriger tant ſoit peu les cartes.

[1]) Elles n'étaient évidemment pas corrigées dans le Rapport présenté aux Directeurs de la Cie. des Indes Orientales qui fut mis par eux entre les mains de de Volder. La Carte du T. IX ne tient donc pas compte des corrections, mais l'erreur est faible (voir le texte).

[2]) Il ne s'est trompé, semble-t-il, que dans le chiffre du 5 août, précisément le jour que Huygens prend comme exemple à la p. 284 du T. IX.

[3]) Dans les manuscrits du Rapport Huygens corrige en effet 14°1′ en $14°8\frac{1}{2}'$: l'erreur diminue ainsi encore un peu plus.

Dans ſon Rapport (T. IX, p. 286—287) Huygens dit que ſuivant la ligne corrigée des horloges l'île Fulo [Foul iſland], ainſi que l'île Fairhil [Fair iſland], les Orcades [Orkney iſlands] et la partie ſeptentrionale de l'Ecoſſe doivent ſe trouver à peu près trois degrés plus vers l'Eſt que dans la carte de Rembrandtſz. van Nierop. La différence des longitudes de Fulo et de Texel ne ſerait pas de 8°, mais de 5° à peine.

Il eſt vrai, ajoute-t-il, que d'autres cartes donnent des chiffres plus bas; ſans avoir vu celle des pilotes, il conclut qu'elle ne donne qu'environ 4° pour la dite différence.

Or, la carte des pilotes avait apparemment raiſon, puiſque les cartes modernes indiquent une différence de 4° à quelques minutes près. Ce que Huygens dit à propos des Orcades etc. eſt également vrai.

Telles qu'elles étaient, les horloges pouvaient donc ſervir, paraît-il, lorſque la mer n'était pas fort agitée, à corriger les cartes par trop défectueuſes. S'il était impoſſible d'obtenir avec elles des réſultats brillants — voir auſſi la note 3 de la p. 646 qui ſuit —, il ſerait cependant exagéré de dire que la valeur de quelques réſultats obtenus — comparez la p. 635 qui précède — fut abſolument nulle.

Remarquons encore que Huygens avait prié Helder de meſurer la longueur du pendule à ſecondes au Cap, ce dont il n'avait pas reçu de rapport (T. IX, p. 292 et 276). La note 1 de la p. 292 dit que peut-être, par quelqu'oubli, la pièce relative à ce ſujet n'eſt pas parvenue aux mains de Helder, puiſqu'elle n'était pas reliée avec le reſte de l'Inſtruction. Il y a cependant à Leiden une copie de l'Inſtruction et de cette pièce, d'une main qui ſemble bien être du dix-ſeptième ſiècle, où la pièce eſt — où plutôt était [1]) — reliée avec le reſte. Helder a fort bien pu avoir eu cette pièce en mains. Quoiqu'il en ſoit, Huygens n'a pas connu de meſure directe de la longueur du pendule à ſecondes au Cap.

D. L'EXPÉDITION DE 1690—1692 DE TEXEL AU CAP DE BONNE ESPÉRANCE ET RETOUR; RAPPORT DE DE GRAAF.

Nous avons déjà obſervé (p. 515) que le Rapport de de Graaf ſur cette expédition n'exiſte probablement plus. Quatre pages de 1692 intitulées „Toevallen ontrent de horologien", écrites et ſignées par de Graaf (comparez la p. 307 du T. IX), ſe trouvent dans le cahier du Rapport de Helder de 1686. Du 20 au 25 mai les horloges étaient à bord du „ſchip de Hoop ten ancker leggende aan de Caap". Elles furent enſuite „op het ſchip Spierdijk geplaaſt om daarmede naar het vaderlant te retourneren".

Nous avons parlé déjà deux fois (p. 513 et 515) des remarques manuſcrites de Huygens ſur le Journal perdu de de Graaf de 1692. C'eſt auſſi de ces remarques, que Huygens envoya à de Volder, qu'il eſt queſtion aux p. 424 et 434 du T. X. Nous les publions ici ſans autres commentaires que

[1]) La reliure étant dans un état de délabrement.

quelques notes. Vers la fin on trouve dans les notes la traduction de certains paſſages où Huygens parle de la rotation de la terre, et auſſi de la néceſſité (comparez les p. 515—516 qui précèdent) de conſtruire des horloges ne préſentant pas les mêmes inconvénients que celles conſtruites juſqu'alors.

Verklaeringh en aenmerckingen op het Journael van Jo. de Graef en 't geen ontrent de Horologien is voorgevallen in de laetſte proeve der Lengdevindingh A° 1690, 1691 en 1692.

Tot confirmatie van 't geen ick in mijn brief aen de Ed. Gr. achtb. Heeren Bewinthebberen hebbe derven verſeeckeren, dat het effect van de Horologien geenſins soodaenigh is geweeſt als gemeent is, maer dat ſij ter contrarie seer wel precis de Lengdemeting volbracht hebben voor ſoo veel haer effect bij onvermijdelycke toevallen of bij misverſtandt niet belet is geworden, of door misrekeningh verkeert uytgeleijt. soo hebbe ick noodigh geacht hier te raporteeren [1]) 't geen ick ſoo uijt monde van Mr. de Graef, die de conduite daervan gehouden heeft, als uijt ſijn Journalen en aenteyckeningen hebbe bevonden.

1. Het blyck dan eerſtelyck uyt het begin van het Journael op de uijtreyſe gehouden, hoe dat ſedert het ophangen der horologien in 't ſchip Brandenburgh, van den 22 Dec. 1690 tot den 29 der ſelve maendt alle devoiren ſijn aengewendt om den loop der horologien door de Son te examineren, en op de rechte ure te ſtellen doch te vergeefs ſoo uyt d'oorſaeck van het continueel doncker weer, als van de verre diſtantie van Landt.

Hier door ſijn de Horologien ſonder dienst te konnen doen gebleven tot aen 't Eylandt S. Jago ontrent Capo Verde.

2. Ondertuſſchen heeft men bevonden als blijckt uyt de aengeteeckende Toevallen der Horol. pag. 151, 152. 153. dat het horologie B defectueux en geen goedt werck was, hebbende dickmaels ſtil geſtaen en ongelycke bewegingh van de ſlinger bethoont, daer het andere A genaemt ſich altijds wel hieldt, behalven dat het den 4 Febr. nae een ſwaere ſtorm bevonden wierdt accidentelijck in ſijn ijſere beugels als verhangen en verwart te ſijn, ende daerom onmoghelijck niet aen de gangh te hebben konnen blijven. 't Selfde defect van 't horologie B is gedurigh op de verdere reijs aen de Caep en de weſtreys geobſerveert, als oock alreeds in't nemen van de Proef in t Jaer 1687.

3. Aen 't Eylandt S. Jago heeft men der horologien gangh dat is hoe veel daghelijx te ras of te langſaem gaen [2]) tegen de Son beginnen te obſerveren volgens myne inſtructie als pag. 27 van dit Journael te ſien is en de manier daervan pag. 77 en 78. En dit van den 26 Maert tot den 1 April, zijnde den 2 April weder van S. Jago ver-

---

[1]) Leçon alternative: beſchrijven.

[2]) Leçon alternative: voor of achtering.

trocken nae de Caep en aldaer gearriveert den 3 Jun. op welcke reijſe iek bethoonen ſal dat de lengde tuſſchen beijde, door de horologien perfect is afgemeten, gelijck Mr. de Graef 't ſelve oock ſoude gevonden hebben, ſonder ſeeckere miſrekeningh, als hier ſal blijcken.

4. Deſe reijſe is in 't breede beſchreven in 't Journael van pag. 27 tot pag. 60. En in 't korte vervat inde Tafel van pag. 67 tot 71. In welcke den inhoudt van ieder Colomne uijt de inſcriptie aen 't hoofdt der ſelve geſtelt te ſien is. Iek hebbe eenighe deſer Colomnen de openſtaende getallen geſuppleert, en in eenighe de verkeerde getallen geeorrigeert, welckers faute bij nae alleen hier uyt is ontſtaen dat Mr. de Graef de correctien van wegen de verſcheyde loop des pendulums nae maeten der Breedte welcke de IX colomne maecken bij abuys geaddeert heeft bij de ure des Lengdeſchils tuſſchen S. Jago en de Caep dat is by de getallen der VIII colomne als hij die moſt aftreeken, en ter contrarie afgetrocken als hij die moſt adderen. Waer van iek de reden in margine van voorſz. Tafel heb aengeweſen, ende de ſelve hier terſtondt noch breeder ſal explicieren, op dat het in 't toekomende voor inſtructie magh dienen.

5. De correctie die iek gedaen hebbe in de getallen van de IX Colomne is van weijnigh importantie, zijnde alleen van 24 ſeconden tijdts, die op den 18 April te veel waeren gereekent, waerdoor tot den 10 Maj. overal deſe 24 ſeconden te veel ſijn, en van hier tot den 28 Maj. noodſaeckelijck weder te weijnigh, gelyck licht kan naegerekent werden volgens den Regel hier op gegeven in mijn Raport van de Proeve des Jaers 1687. Doch deſe faute kan maer $\frac{1}{10}$ van een graed verſchil inde Lengde maecken.

6. Maer het verkeert adderen en subtraheren deſer getallen van die van de VIIIste colomne daer iek van geſeght hebbe is van veel grooter belang. Om dan in te ſien dat hier in abuys geweeſt is, ſoo ſegghe dat dewijl de horologien uyt reden van 't omdraeyen der aerde hoe nader de Linie, hoe langſamer gangh kryghen, volgens t geſtelde in mijn gemelte Raport, ſoo is ſeecker dat altijdt als men nae de Linie zeylt van noordelijcker of zuydelijcker geweſt de ure van het horologie uijt deſe reden moet verachteren, en bij gevolgh doen ſchijnen dat de ure der plaets daer men afgeſeijlt is vroeger of minder is alſſe weſen ſoude ſonder deſe vertraegingh. En dat ter contrarie als men verder van de Linie afzeijlt, het horologie moet raſſer gangh krijgen en dienvolgens de ure van de plaets des vertrecks laeter of meerder verthoonen als ſoude doen ſonder deſe verhaeſtingh.

7. Dewijl dan van den 2 April dagh des vertreeks van S. Jago tot den 7 Maj. nae de linie toe geſeylt is, en de Noorder Breedte gingh verminderende, ſoo is het horologie gedurigh verachtert en heeft tot deſe tydt toe de ure van S. Jago vroeger doen ſchynen (ſoo veel deſe reden kon importeren) als het anders ſoude gedaen hebben. Ende was deſe verachtering op den 8 April 0'.35" van een ure als in de Tafel te ſien is. Schynende dan vroeger te zijn aen S. Jago ſoo ſcheen het deſe 0'.35" weſtelijcker te leggen ten reſpecte van de plaetse des 8 Aprils als het anders volgens het horologie leggen ſoude. Aengeſien nu dat men ooſtelijck van S. Jago was, ſoo ſcheen de ure van

't lengdeſchil deſe 0′35″ meerder te ſijn als anders ſoude gedaen hebben. En bij gevolgh moeten de 0′.35″ afgetrocken werden van de ure des Lenghdeſchils ſonder de Correctie tuſſchen S. Jago en de plaets van 't ſchip den 8en Aprils gevonden: in plaets dat M. de Graef die by gedaen heeft[1]), als uyt meergemelte Tafel te ſien is daer hij 0′.35″ vande 9de col. adderende bij 0.12′.47 van de 8.ste col. kryght 0.13.22 inde 10de in plaets van 0.12.12 die ick vinde. Maer waerom dat in t Journael pag. 30. in plaets van deſe 0′35″ geſtelt werdt 1′.4″. weet ick geen reden van.

8. Het ſoude miſſchien klaerder rekeningh maecken als men deſe vertragingh 0′35″ bij de ure der horologie die t wees ten tyde van d'obſervatie addeerde, ſijnde deſen 8en April geweeſt 5.ur 11′8″ (als te ſien is pag. 30) om alſoo de ure van 't horologie te hebben die het ſonder dit ſoude geweſen hebben. maer de uytkomſt ſoude deſelſde geweeſt ſijn, want dan de ure aen de Son te S. Jago pag. 30 ſoude gekomen hebben 5.25.28. waer van getrocken 5.37.40 komt 0.12.12. gelyck ick in de Xde colomne geſtelt hebbe. Deſe verkeerde additie van Mr. de Graef van gemelte 8.en April is van gelijcken voorgevallen den 4 en 5en Maj.

9. Want alhoewel ſedert den 14 April van de Linie af zuydwaert gezeijlt is, ſoo werdt eerſt op den 10 Maj. de geheele vertraeging van't horologie tuſſchen S. Jago en de Linie voorgevallen en gecolligeert, overtroffen bevonden door de verhaeſting die gecolligeert is van de Linie af tot op dien dagh. Van waer dan voorts die vorderingh aen 't horologie bevonden werdt die ick in de gecorrigeerde IX. col. geſtelt hebbe. Waer door de ure van S. Jago meerder of laeter ſchijnende als anders doen ſoude, ſoo ſcheen het deſe minuten en ſeconden ooſtelijcker te leggen. En ſcheen daerdoor de ure van 't lenghdeſchil minder te ſijn alſſe was, dewijl men met het ſchip ooſtelijck van S. Jago ſich bevondt. Soo dat deſe vorderingh hier moſt geaddeert werden bij de ure van 't lenghdeſchil, gelyck ick gedaen hebbe, in plaets dat Mr. de Graef die afgetrocken hadde.

10. Ende ſoude hier weder de ſelſde uytkomſt geweeſt ſijn indien men deſe vorderingh afgetrocken hadde van de ure aen S. Jago volgens het horologie berekent, en dan voort gewerckt volgens de Inſtructie. Het abuys van Mr. de Graef is ſoo ick geloof hier uyt ontſtaen dat hij genomen heeft als een generalen regel 't geen ick in mijn Raport van d'eerſte Proeve geſecht hebbe in d'Explicatie der 7e Colomne van de Tafel aldaer. alhoewel het alleen paſte op de voorval van doenmaels, op welcke het wel geappliceert was.

11. Hebbende dan aldus de getallen vande IX.de en X.de Colomne gecorrigeert ſoo

---

[1]) Sur une des trois feuilles séparées qui se trouvent dans cette Pièce et que nous ne reproduisons pas, Huygens écrit encore: Dit deel der Inſtructie ſal in 't toekomende klaerder geſtelt werden. On voit qu'il songeait déjà à de nouvelles expériences.

ſijn die van de XI^de oock noodſaeckelijck daerdoor verandert, dewijlſe uyt de getallen vande X.^de ſpruijten, nemende voor ieder ure tijdts 15 graeden in lengde.

Maer ſedert den 18 Maj. heb ick de getallen in de X. en XI. col. gesuppleert en op den 13 Jun. oock die vande VIII en IX colom. alles volgens rekeningh gegrond op Obſervatien van M. de Graef. welcke rekeningh bij hem anders uytvallende en eyndelijck op d'aenkomst aen de Caep al te veel van de waerheijdt afgaende, apparentelijck oorſaeck geweest is dat hy de voorſz. getallen open heeft gelaeten.

12. In de XI col. heeft hij de getallen nae behooren geſtelt [1]) behalven de 24 ſeconden die doorgaens te veel of te weynigh heeft, gelyck ick hier te vooren aengemerckt hebbe. Doch deſe getallen vind ick in ſijn Journael geheel anders geſtelt van den 8 April tot den 28 Maj. en merendeels veel te kleijn ſonder dat ick eenighe reden of ordre daer in vinde, als bij ex. dat hij van den 14^en Maj. tot den 28 Maj. altijdt ſtelt 3 min. 4 ſec. [2]).

13. In de VIII^te Col. heb ick het getal ſpecterende tot den 24 April gecorrigeert ſtellende 0.18.32 in plaets van 0.22.48 t welck miſrekent was, als aengeweſen heb in t Journael pag. 37.

14. Alle deze noodſaeckelijcke verbeteringen in de Tafel van 't Journael gemaeckt en beweſen hebbende, ſoo ſiet men dat de Lenghde tuſſchen 't Eyland S. Jago en de Caep de B. Eſp^e. door de horologien is gevonden van 48 gr. 14 min. [3]). En om dat volgens de Caert van N. Viſſcher [4]) hier nevensgaende S^t. Jago 7 graden weſtelijcker leght als de Pico de Teneriffe, daer het begin der Lengden geſtelt werdt, ſoo komt de lengde van de Caep 41 gr. 14 min. t welck ſeer net met de voorſz. Caert over een komt.

15. Maer der Stierhuyden giſſingh is ſeer afgedwaelt. Want nae ick bemercke uijt haer Breedte van den 28 Jun. anno 1692 in t Journael vande weerreijs, pag. 109, ſoo leght in haer Caert de Caep op de lenghde van ontrent 38 gr. gelijck ick ſulx mede uijt het Journael van de Reijs van A° 1687 bevonden hadde. Maer nae haer rekeningh ſoo waeren ſij den 2 Jun. op de Lengde van 44 gr. 0'. en den 3 Junij, doen ſij den Tafelbergh 9 mylen Ooſt N. Ooſt van haer ſaghen, op de lengde van 45 gr. 42 min.

---

[1]) En marge: Correctie anders in 't journael.

[2]) En marge: 0.1.4 . . 8 *Apr.*; 0.1.22 . . 11 *Apr.*; 2.17 . . 18 *Apr.*; 3.4 . . 23 *Apr.*; 3.7 . . 24 *Apr.*; 2.41 . . 30 *Apr.*; 1.45 . . 4 *Maj.*; 1.45 . . 5 *Maj.*; 0.11 . . 10 *Maj.*; 3.4 . . 14 *Maj.*; *vergeten* . . 18 *Maj.*; 3.4 . . 20 *Maj.*; 3.4 . . 23 *Maj.*; 3.4 . . 24 *Maj.*; 3.4 . . 28 *Maj.*; *vergeten* [corrigé en 3.4.]. 3. *Jun. Dese correctie van wegen d'ongelijcke gangh na mate der breedte heeft de Graef in 't Journael, contrarie als in sijn Tafel, sonder reden of ordre.*

[3]) La différence des longitudes du Cap et de Sao Thiago n'étant que de 42° environ suivant les cartes modernes, on voit que le résultat déduit par Huygens des observations avec les horloges, était en réalité peu satisfaisant.

[4]) Voir la p. 435 du T. X et la p. 634 qui précède.

volgens mijn aenmerkingen in margine van pag. 57 en 58. en daer bij gedaen 40′ minuten voor de voorſz. 9 mijlen. ſoo vondenſe de Caep op de Lenghde van 46 gr. 22′ min. in plaets van de 38 gr. daer ſe leght in haer Caerte, ſoo dat ſij 8 gr. 22 uiin. over landt ſeylden gelijck men dat noemt zijnde alhier op deſe Breedte over de 100 duytſche mylen.

Doch nae de Caert van N. Viſſcher was haer dwaling minder en maer van 5 gr. 22 min. En daerom ſtaet te bedencken of deſe Caert niet naeder de waerheijdt is als die vande O. Ind. Compagnie die ſij gebruyckt hebben. Want geen van beijde tot noch toe op ſeeckere demonſtratie gegrondt ſijn.

16. Ick hebbe in myn bygaende Caerte [5]) de tweederhande Courſen van 't ſchip Brandenburg afgeteyckent d'eene volgens de Stierluijden giſſingh met de roode linie, d'andere volgens de metingh der Horologien met de ſwarte, en dat volgens de Breedten inde Eerſte Colom, en Lengden inde 2de en 11de Col. der meergemelte Tafel ſoo dat op ieder dagh dat de Langhde berekent is, de plaetse van 't ſchip in beyde linien ſijn aengeweſen. Alleenlyck heb ick op den 23 April en den 4 Maj. de plaetſe daer het ſchip naer 't horologie geweeſt ſoude ſijn daer de XX ſtaen, een weynigh buyten de ſwarte linie gelaeten; ſijnde nae apparentie hier iet gemiſt is [6]) door de ſons hooghte niet precijs genoch geobſerveert te hebben, dewijl het ſchip niet wel ſoo ſchielijck in eenen dagh door de ſtroom verſcheijdelijck kan gedreven werden. Daerom heb ick de linie niet door de X getrocken, maer wel door de naeſte plaetſen van den 24 April en 5 Maj. die ſekerder ſijn om dat beijde door 't obſerveren der ſonne in den horizont verkregen ſyn als men ſiet pag. 36 en 42.

17. Hier is nu aenmerckens waerdigh hoe veel deſe 2 Courſen van malkander ſomtijdts afgaen, waer van indien iemandt dencken mochte de faute van 't horologie oorſaeck te ſijn, ſoo ſoude ick ſeggen ſulx weynigh waerſchynelyckheydt te hebben. Want ſijnde de Lengde tuſſchen S. Jago en de Caep, ſoo net bij 't horologie afgemeten, ſoo ſoude het ſeer ſelſaem ſijn dat nu te ras en dan weder te langhſaem gegaen ware, en evenwel de ſomme het ſelfde als een eenparighe gangh ſoude uijtgebracht hebben.

De reden dan van de verſcheyde loop der waere Cours, ſal voortgekomen ſijn uijt eenighe en ongevoelycke vloeden of ſtroomen. Men weet datter een gedurighe generale ſtroom der zee is van Ooſt nae Weſten, en het blijckt dat het ſchip eenighe ſtroom tegen gehadt heeft doordien, dat vanden 19 April tot den 9 Maj. (in welke daghen de meeſte kromte in de Cours nae de Horologien voorgevallen is), de gevonden Breedten volgens 't Journael doorgaens kleynder geweeſt ſijn als de gegiſte. Want hier uyt hebben de ſtierluyden moeten beſluijten dat de ſtroom haer noortwaerdt aen

---

[5]) Nous ne possédons plus cette Carte.
[6]) Ce mot est de trop.

ſette, maer hoe veel deſelve haer weſtwaert dreef konden ſij onmoghelijck niet mercken, alhoewel ſulx abuſievelyck bij Willebr. Snellius [1]) en andere gemeent werdt.

Zijnde dan waerſchynelyck de waere Cours langhs de ſwarte linie geweeſt, ſoo ſiet men hier door de noodſaeckelyckheyt [2]) van de Inventie dewijl ſoo groote misrekeningen der Stierluyden als hier voorgevallen ſijn van 5. en 6. ja 8. graden in Lenghde dickwils oorſaeck ſouden ſijn van 't verlies van ſchip en alles.

Dus verre het gepaſſeerde op de heenreys nae de Caep onderſocht hebbende, ſoo ſal ick voorts de redenen aanwijſen waerom de Horologien op de weerreijs A° 1692 geenſins den gewenſchten dienſt hebben konnen doen. Van welcke redenen de voornaemſte en alleen ſuffiſant om ſulx te beletten is geweeſt dat Mr. de Graef bij misverſtandt de horologien niet en heeft opgehangen in 't ſchip Spierdijck gelijck in 't ſchip Brandenburgh op de heenreyſe gedaen hadde volgens den 3e artic. van mijne Inſtructie maer ſoodanigh dat noodſaeckelijck niet alleen ieder in ſich ſelfs moſten ongelyck gaen maer oock malkanders gangh turberen en bederven. Volgens mijn Inſtructie moſten de yſere beugels vande Horologien ieder apart aen 't verdeck of ſolderingh onbeweeghelijck vaſt geſchroeft of geſpijckert werden om de redenen daer bij gevoeght. Maer Mr. de Graef dit niet gedenckende heeft in 't Schip Spierdijck een Hockjen doen timmeren, en de Horologien daer in opgehangen op deſe manier, ſoo hij mij 't ſelve mette pen in 't rouwe afgeteyckent heeft [Fig. 130]. De ſyde van 't hockje, ABDC quam tegen de ſijde van 't ſchip. Het bovenſte ACHF was met ſeyldoeck teogeleijt. De deur was KL. De ribben daer de Horologien P en Q met haer beugels aen hinghen KM, ON. Soo dat als men de deur in quam men aen weer ſijden de wijſers hadde tegen over malkander komende.

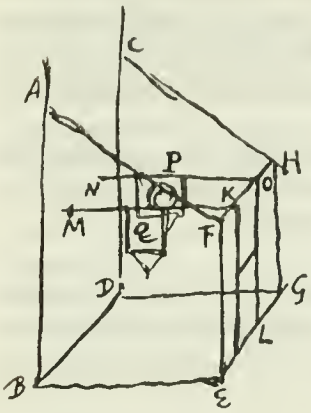
Dit ophanghen hadde geenſins de vaſtigheydt die de ſlingers der horologien vereijſchen, want ſij de kracht hebben, gaende als hier parallel met de linie BD, van aen dit geheele geſtel eenighe bewegingh te geven (alhoewel t eenemael onſienelijck), welcke ick door vele experimenten bevonden hebbe de gelycke gangh der horologien te bederven, en voornamentlijck als deze bewegingh van 't een aen 't ander als hier gecommuniceert kan werden.

Dit abuijs in 't hanghen der horologien heeft Mr. de Graef niet konnen ontkennen, en was hem leet. Sed errare humanum eſt. Alleenlijck verwondert my dat hij de ongewoon groote uytſpoorigheydt der horologien op de reys bemerckende, niet bedacht

[1]) La Prop. XI du Lib. II du „Tiphys Batavus" de 1624 de W. Snellius est ainsi conçue: „Si loxodromiam aliquam et ejus quantitatem, æstimationem tuam secutus, exinde latitudinis evariationem ab observata diversam deprehendas, crure mecodynamico [voir sur cette expression la Prop. XXII du Lib. I] secundum æstimatum cursum retento latitudinem in observatum parallelum transferes, & hinc longitudinis differentiam investigabis".

[2]) Leçon alternative: nuttigheydt.

[Fig. 130.][3])



heeft dat die een ſonderlinghe reden moſt hebben, dewijl ſomtydts (als tuſſchen den 27 Jul. en 9. Aug. ontrent de Linie ſijnde) het beſte der 2 horologien tot 10 minuten dat is $\frac{1}{6}$ van een ure daeghs te langſaem gegaen heeft, als men de Lengde door t ſelve berekent compareert met die van de Stierluijden in den tijdt van de ſelve daghen vertiert[4]). Welcke groote afwijcking van haeren gangh in deſe horologien buijten extraordinaire oorſaeck anders gansch onmoghelijck is. Ick hebbe gedacht of den draet van t Pendulum iets doorgeſchoten mocht geweeſt ſijn, en daer door de bewegingh langſamer geworden, maer dat en kan alleen de reden niet geweeſt ſijn dewijl ick vinde dat het horologie daer nae, te weten van den 9. Aug. tot den 6 Sept. maer 7 min. 8 ſec. daeghs verachtert is, en van den 6 Sept. tot den 8 Oct. maer 5 min. 21 ſec. daeghs. Want het pendulum kan niet weer korter worden, om 5 minuten in een dagh ſijn gangh te verhaeſten. Soo dat deſe groote ongelyckheydt, voornaementlyck uijt het qualyck hangen voortgekomen is. en ontrent de Linie grooter als elders is geweeſt miſſchien om dat hoe grooter hitte hoe loſſer dat dit geſtel van 't hockje geworden is door 't inkrimpen van 't hout. Hier nu bij komende de ſlechte conſtructie van 't Horologie B en het breecken en laſſen der veeren, ſoo kan men niet vreemdt vinden de weynighe correſpondentie tuſſchen dit en 't horologie A in de Toevallen[5]) aengemerckt. ſoo in deſe weerreys, als aen de Caep de Bonne Eſp.e, alwaer ſe in een diergelijck hockje, en op gelycke wijſe waeren opgehanghen[6]).

Ick hebbe dan bethoont dat de Horologien of met goedt ſuccès gedient hebben, of niet in ſtaet geweeſt ſijn om ſulx te konnen doen.

Voorts is te conſidereren dat door de nette uijtkomſt der Lengdemetingh tuſſchen S. Jago en de Caep nu voor de 2de mael geconfirmeert werdt de nieuwe Correctie van den loop der Horologien uijt het omdraeyen der aerde ſpruijtende, welcke ick te vooren door demonſtratie beweſen hadde te moeten ſoodanigh ſijn volgens de Leges Mechanices[7]). Want in de reyſe van 1687 heeft deſelve ſich mede ſeer blijcke-

---

[3]) Comparez la figure de la p. 396 du T. X.

[4]) Suivant van Lennep (voir la note 1 de la p. 652) „vertieren" se disait anciennement dans le sens de „voortgaan [avancer]".

[5]) Comparez la l. 8 d'en bas de la p. 642 qui précède.

[6]) A bord du vaisseau de Hoop (p. 642).

[7]) Voir la partie *B* qui précède.

lijck verthoont. Soo dat men nu wel voor vaſt houden magh dat met wat horologien die met gewight gedreven werden, of daer pendula aen komen, de Lengde metingh t'eenigher tydt ſal getenteert werden, noodſaeckelijck deſe Correctie moet in acht genomen en gebruyckt werden. Dewijl ſonder die te gebruycken veele graden in lenghde konnen gemiſt werden [1]).

Van gelijcken is de rekeningh vande vereffeningh des Tijdts vanwegen de Sons loop, door deze en de voorgaende voiages genoegſaem beweſen nae behooren te ſijn geſtelt, waer aen minder konde getwijffelt werden [alinéa biffé].

Aengaende nu deſe horologien die tot noch toe geemploieert ſijn ſoo is te weten datſe de eerſte van deſe form ſijnde en in 't begin anders met ſpirale veeren aen den onruſt gemaeckt, daernae hermaeckt en 't onderſte boven gekeert, geenſins ſoo goedt ſijn als menſe van nieuws ſoude konnen maecken. Want oock van grooter en ſtercker werck ſouden moeten weſen, dewijl d'Experientie dit genoegh te kennen geeft [2]).

En is nochtans te noteren dat het horologie A maer eens op de heenreys door accident heeft ſtil geſtaen in een ſtorm, ſijnde in de buijtenbeugels verwert: t welck licht kan voorkomen werden: en eens in de weerreijs door een onbekende oorſaeck, maer die ick vermoed van 't onvaſte geſtel daer t in hingh onſtaen te ſijn. Maer tusſchen S. Jago en de Caep is het altydt gaende gebleven. Soo goedt nu als A was, kon B mede gemaeckt werden ja beter.

Een dingh is hier in moeielyck, te weten dat het ſchijnt dat in de heete Climaten de veeren der horologien ſoo groote als kleijne niet alleen verſlappen, maer oock tot breecken meer als anders ſubject ſijn, waertegens niet wel andere remedie is als eenighe voor proviſie mede te nemen, om in plaets van de bedorven of gebroocken in te voegen. t welck op deſe laetſte reijſe is verſuijmt [3]).

---

[1]) En marge (et biffé en partie): Correctie geconfirmeert de 2de mael, is in alle Horologien te obſerveren. Moet ſoo weſen door noodſaeckelyke reden dewijl ſeecker genoegh is dat de Eerdkloot om draeijt [Traduction: „Cette correction, confirmée pour la deuxième fois, doit être observée dans toutes les horloges. Il doit nécessairement en être ainsi puisqu'il est bien certain que la Terre tourne". — Dans une des feuilles mentionnées dans la note 1 de la p. 645 Huygens parle aussi de la certitude de la rotation de la Terre].

Rekening oock goedt van de vereffening des Tijds, die men niet kan miſſen.

Wercken gemaeckt en hermaeckt [comparez la note suivante]. A goedt ergo B kan oock ſoo goedt ſijn. Beyde beter en van grover werck. Veeren ſchijnen te verſlappen. [Traduction: „Les horloges faites et refaites. A est bonne, donc B peut être également bonne. Construire l'une et l'autre mieux et plus solidement. Les ressorts semblent perdre leur force"].

[2]) Traduction: „A propos des horloges employées jusqu'ici, il faut savoir qu'étant les premières de cette forme et ayant été faites d'abord autrement, avec des ressorts spiraux au balancier, puis refaites et tournées sens dessus-dessous, elles ne sont aucunement si bonnes que les neuves qu'on pourrait construire. Elles devraient aussi être construites plus grandes et plus fortes: c'est ce que l'expérience fait bien voir". Comparez le § 6 à la p. 533 qui précède.

Maer 't geen de meeſte moeijte geeft in de practijck [4]) van deſe Inventie is dat men de Horologien haer gangh van nieuws moet tegens de Son obſerveren nae dat men die in 't ſchip opgehangen heeft: twelck niet wel anders kan geſchieden als door geſpannen draeden in de meridiaen aen Landt. Soo kan dit door donckere lucht, verheydt van Landt, of gebreck van tijdt dickwils belet werden, gelijck in 't nemen van beyde de Proeven gebleecken is [5]).

Om dan deſe Inventie te perfectioneren ſoo moet men middelen uijtvinden waer door dit inconvenient en oock het voorgaende moghen ontgaen werden 't welck niet onmoghelyck is en ick geloof tegenwoordigh niet verre daer van af te ſijn, als mede om den tijdt veel netter als door gemelte horologien aftemeten [6]).

Deſe en andere inconvenienten van de tot noch toe geemploieerde horologien conſidererende ſoo heb ick gedacht op middelen . . . [7]).

E. QUELQUES REMARQUES SUR LA DÉTERMINATION DES LONGITUDES AVEC LES HORLOGES OU PAR L'OBSERVATION DES SATELLITES DE JUPITER; ETC.

Le réſultat de l'expédition de 1690—1692 fait bien voir combien Huygens était optimiſte [8]) lorsqu'il écrivait (en ou vers 1686) à la p. 207 du Manuſcrit F: „Door dit middel der uyrwercken

---

[3]) Traduction: „Il y a ici la difficulté suivante: il semble que dans les climats chauds les ressorts des horloges, grands et petits, ne perdent pas seulement leur force, mais sont aussi plus qu'ailleurs sujets à se briser, à quoi il n'y a pas d'autre remède que d'en prendre quelques-uns avec soi pour pouvoir remplacer par eux les ressorts gâtés ou brisés. Ce qu'on a négligé de faire dans ce dernier voyage".

Remarquons que dans cette expédition les ressorts étaient probablement en acier: voir les dernières lignes de la p. 289 du T. IX.

[4]) Leçon alternative: in t gebruyck.

[5]) Traduction: „Mais ce qui fait le plus de difficulté dans la pratique de cette invention, c'est qu'il faut de nouveau comparer la marche des horloges avec celle du soleil après qu'on les a suspendues à bord; comparaison qui ne peut être bien faite, avec des fils tendus dans le méridien, qu'à terre. À bord elle peut souvent être empêchée par l'obscurité de l'air, par la grande distance de la terre, ou par le manque de temps, comme cela est apparu dans les deux expéditions".

[6]) Traduction: „Pour perfectionner cette invention, il faut donc trouver des moyens pour éviter cet inconvénient et le précédent, ce qui n'est pas impossible; je crois même n'en être pas loin. Il faut aussi tâcher de mesurer le temps beaucoup plus exactement qu'avec les horloges mentionnées".

[7]) Traduction: „Considérant ces inconvénients, et d'autres, des horloges employées jusqu'ici, j'ai songé à des moyens . . . ."

[8]) Nous voulons dire qu'il exagérait les qualités des horloges A et B de 1685.

al waeren die geenſins ſoo perfect als ſe ſijn de lengden te meten, is altijdt veel ſeeckerder als door de gewoone giſſingh. want men ſiet dat door deſe giſſing in 2 of drij daghen de ſtierluyden ſomtydts 10 of 12 mijlen mis rekenen, daer een horloge als 't al 10 ſeconden daeghs miſte, t welck in deſe wercken niet te vreſen is [!], ſoo ſoude het in 3 dagen ten hooghſten maer 2 mijlen faute geven. waer by noch komt, dat de ſtroomen noch het wraecken van 't ſchip [1]), geen dwalingh en kan veroorſaecken".

Quant à la perfection des horloges, notons que de Volder dans ſes remarques de 1689 (T. IX, p. 343) parle de la dilatation du pendule par la chaleur [2]) à laquelle Huygens, comme on ſait, n'attachait pas beaucoup d'importance: comparez la note 2 de la p. 66 du T. XVII et la p. 25 du préſent Tome.

Les cartes, comme la p. 634 le fait voir, laiſſaient encore beaucoup à déſirer [3]). Dans ſon Rapport de 1688 (T. IX, p. 273, 274, 290, 291) Huygens préconiſe, après Galilée, la détermination des longitudes ſur terre par l'obſervation des ſatellites de Jupiter. Les tables de Caſſini de 1668 — elles furent corrigées plus tard — n'étaient cependant pas ſi bonnes qu'il le penſait (T. IX, p. 274): ſuivant les cartes modernes le Cap de Bonne Eſpérance n'eſt pas à l'Eſt de Paris de 18°, comme Guy Tachard l'avait trouvé en ſe ſervant de ces tables, mais ſeulement de 16°10′.

Mais nous ne pouvons nous étendre ici ſur l'hiſtoire de la géographie ni ſur celle des expéditions maritimes, dont traitent un grand nombre d'auteurs [4]).

---

[1]) Il est vrai, comme le dit Huygens, que les courants [stroomen] ne causent pas d'erreur lorsqu'on détermine la longitude avec les horloges (comparez la p. 230 du T. XVII). En est-il de même du „wraecken van het schip"? Le verbe „wraecken" ici employé ne se trouve pas dans le „Middelnederlandsch Woordenboek" de E. Verwijs et J. Verdam. W. à Winschooten („Seeman", Leiden, J. de Vivie, 1681) dit que „wraacken" signifie „se mouvoir irrégulièrement" (sig ongestaadig beweegen), p.e. „de waagen wraeckt in het spoor" = „la voiture balance, heurte" (de wagen slingert, schokt) dans l'ornière. Il s'agirait donc d'un ballottement du vaisseau. Mais J. van Lennep dans son „Zeemanswoordenboek" (Amsterdam, Binger, 1856) écrit: „wraken, afdrijven, van streek gaan. Het schip wraakt of heeft wraak". D'après cet auteur le verbe signifie donc que le vaisseau (quoiqu'il n'y ait pas de courant) n'avance pas seulement dans la direction voulue (comparez sur le mot „streek" la note 1 de la p. 232 du T. XVII), mais prend de plus un mouvement latéral. Il est évident que ce mouvement ne cause pas d'erreur lorsqu'on se sert des horloges.

„Wraecken" se disait aussi de la boussole: ici il ne s'agit pas non plus d'un mouvement irrégulier de l'aiguille mais de sa déclinaison, c.à.d. de l'angle qu'elle fait avec la direction sud-nord. „Ons volck voer aent Lant om te sien hoe veel de naelde van 't Compas wraeckte .. Aengaende de wraeckinge des Compas waerom ons volck aen 't Landt ghevaren waren om dat perfect te meten werde bevonden dattet scheelt 16 graden" (G. de Veer à la p. 18 v. de sa „Waerachtige Beschrijvinghe van 3 Seylagien ter wereld noyt soo vreemt ghehoort etc.", Amstelredam, C. Claesz. 1605; p. 53—54 du T. I de l'édition de 1917, par S. P. l'Honoré Naber, La Haye, M. Nijhoff, des „Reizen van Willem Barents, Jacob van Heemskerck, Jan Cornelisz. Rijp en anderen", publication de la „Linschoten-Vereeniging").

[2]) Le pendule triangulaire de 1685 et des années suivantes était partiellement rigide (voir la p. 514).

[3]) Mentionnons aussi que la „Geographia et Hydrographia reformata" de J. B. Riccioli (Bononiæ, ex typ. hæredis V. Benatij, 1661) donne (p. 407 et 423) pour la différence des longitudes de Candie et de Toulon 51°32′ — 28°36′ = 22°56′.

[4]) Nous avons nommé (p. 371) la „Hakluyt Society"; qu'on nous permette de mentionner aussi les publications de la société correspondante néerlandaise, la „Linschoten-vereeniging" (comparez la fin de la note 1).

ANECDOTA.

Avertiſſement.

Nous terminons ce Tome par la publication des „Anecdota" déjà pluſieurs fois cités dans les Tomes précédents [1]). Il faut bien que ce petit manuſcrit ſoit publié quelque part intégralement et comme à peu près la moitié du texte ſe rapporte aux horloges, et qu'il y eſt auſſi queſtion de la chute des corps et de la force centrifuge par la conſidération de laquelle ſe termine l'„Horologium oſcillatorium", c'eſt ici, nous ſemble-t-il, qu'il faut le placer.

Les „Anecdota" ou „pièces inédites" datent d'une des dernières années de la vie de Huygens, puiſqu'il y eſt queſtion de ſes manuſcrits ſur la relativité du mouvement (voir les p. 195 et 213—231 du T. XVI). Le titre ne ſe rapporte évidemment qu'à ce qui précède le paragraphe ſur Saturne, puiſque les travaux ſur cette planète, ainſi que l'„Horologium" et l'„Horologium oſcillatorium", avaient été publiés.

Nous ne ferons aucune obſervation générale ſur la partie conſacrée aux horloges ni ſur ce que Huygens dit de ſes ouvrages ſur les corps flottants, la dioptrique, la théorie du choc et les phénomènes de Saturne. C'eſt excluſivement ſur la relativité du mouvement et ſur la force centrifuge, ſujet qui s'y rattache, que nous dirons ici quelques mots.

---

[1]) T. VII, XV et XVI.

Le lecteur de ce Tome [1]) a vu qu'en ſeptembre ou octobre 1687, lorſque Huygens eut étudié le rapport de de Graaf ſur le voyage de cette année du Cap de Bonne Eſpérance à Texel, ſes doutes ſur l'exiſtence d'une force centrifuge provenant de la rotation de la terre s'évanouirent. La rotation journalière de la terre, avec une viteſſe angulaire déterminée, devint par là pour lui une réalité inconteſtable. C'eſt ce qu'expriment p.e. l'avant-dernier alinéa de la p. 224 du T. XVI et divers paſſages du livre poſthume, le „Cosmotheoros" [2]). A la p. 647 du T. II des „Opera mechanica etc." (éd. 's Graveſande de 1751) on lit (Lib. I du Cosmotheoros): „Atque erunt quidem, qui cum Geometriam aut Mathematicas nunquam attigerint, omnino vanum ac ridiculum hoc inceptum noſtrum cenſebunt. Incredibile enim iis videtur, ut Siderum diſtantias, aut quæ ſit magnitudo eorum, metiri poſſimus. Tum vero motum huic Terræ aut falſo adſcribi exiſtimant, *aut nequaquam adhuc probatum eſſe* [nous ſoulignons]"; à la p. 651, après avoir dit que la diſtance de l'étoile polaire au pôle eſt variable, Huygens continue: „Ut proinde cælum totum, ſi circumrotari dicatur, ſuper alio atque alio axe id faciat neceſſe ſit, *quod eſt abſurdiſſimum*".

En écrivant: „Motum non alium quam relativum dari. etiam vertiginis motum relativum eſſe. contra Neutonum." Huygens ne veut donc pas dire qu'on pourrait raiſonnablement parler d'une terre immobile. Ce qu'il ſoutient c'eſt que la rotation journalière doit être conſidérée comme une rotation de la terre *ſur elle même* [3]), qu'il ne faut pas l'appeler rotation *par rapport à l'eſpace*: voyez les paſſages cités dans la note 5 de la p. 198 du T. XVI. Aucun mouvement ſelon lui n'eſt un mouvement par rapport à l'eſpace; tout mouvement eſt celui d'un corps par rapport à d'autres corps ou des parties d'un corps les unes par rapport aux autres. „Ut motus circularis ſit relativus partium etc. An autem corpora duo inter ſe relative moveri poſſunt quorum eadem manet diſtantia? Ita ſane etc.". (T. XVI, p. 232).

Il ne s'agit pas ici de diſcuter la queſtion de ſavoir ſi cette opinion de Huygens eſt ſenſée ou non, mais ſeulement d'établir que telle était, dans les dernières années de ſa vie, la manière de voir qu'il oppoſait à celle de Newton. Nous avons déjà dit dans le T. XVI (p. 198, note 5) que, tout en niant le mouvement par rapport à l'eſpace — „nullus eſt mutatio loci reſpectu ſpatij mundani"; „motus inter corpora

---

[1]) Voir les „Résultats de quelques expéditions maritimes".
[2]) Le „Cosmotheoros" fut prêt pour l'impression vers le 1 janvier 1695 (T. X, p. 703).
[3]) Comparez l'expression grecque „ἐν τῷ αὐτῷ στρέφεσθαι" (Platon, Θεαίτητος, XVIII).

relativus tantum eſt" (T. XVI, p. 215 et 232) — Huygens ſemble néanmoins attribuer, ſi non aux directions des mouvements, du moins aux changements de ces directions, un caractère abſolu.

Cette négation du mouvement par rapport à l'eſpace eſt d'ailleurs chez Huygens antérieure à l'apparition (en 1687) des „Principia" de Newton; il ſerait par conſéquent impoſſible de l'attribuer ſimplement au déſir de contredire l'illuſtre anglais. En août 1669 Huygens écrivait (T. VI, p. 481): „Selon moy le repos et le mouuement ne peuvent eſtre conſiderez que relativement, et le même corps qu'on dit eſtre en repos a l'egard de quelques uns, peut eſtre dit ſe mouuoir à l'egard d'autres corps, *et meſme il n'y a pas plus de realitè de mouuement dans l'un que dans l'autre* [nous ſoulignons]", et probablement vers le même temps (T. VI, p. 327) „que le mouvement d'un corps peut eſtre *en meſme temps veritablement egal et veritablement accelerè ſelon qu'on raporte ſon mouvement a d'autres differents corps*" [4]). Il ne s'agit donc pas ſeulement de la relativité des mouvements uniformes, mais auſſi de la relativité des mouvements accélérés. D'ailleurs cette dernière relativité fait ſon apparition déjà en 1659: dans le Traité ſur la Force Centrifuge le petit corps qui ſe détache du bord de la roue tournant uniformément (le peſanteur étant exclue) — T. XVI, p. 260—267 — poſſède un mouvement *uniforme* par rapport au milieu dans lequel la roue tourne, et un mouvement *accéléré* par rapport à un obſervateur attaché à la roue; la tendance à prendre ce mouvement accéléré *relatif* fait que le petit corps exerce ſur la main de l'obſervateur nommé qui le retient une force réelle. Comparez ſur la conception relativiſte les l. 3—2 d'en bas de la p. 518 qui précède.

Nous avons déjà obſervé dans le T. XVI que l'expreſſion *Princip der relativen Bewegung* ſe trouve, pour la première fois croyons-nous, dans la préface de l'édition allemande de 1903 du Traité ſur la Force Centrifuge et nous avons remarqué dans un article récent [5]) que les paroles citées de Huygens ſur le mouvement véritablement

---

[4]) Consultez toutefois le deuxième et le troisième alinéa de la p. 197 du T. XVI, où l'on voit que Huygens n'a pas toujours, nous semble-t-il, nié le mouvement par rapport au „spatium mundanum". On remarque chez lui une certaine hésitation. Aussi écrit-il en 1694 à Leibniz (T. XVI, p. 195) qu'il n'a trouvé le „sentiment plus veritable" que depuis deux ou trois ans.

[5]) „De relativiteit der beweging volgens Chr. Huygens", revue „Hemel en Dampkring", mai 1934.

égal et en même temps véritablement accéléré ont une certaine reſſemblance avec la queſtion poſée par Einſtein: „Wenn dem Begriffe der Geſchwindigkeit nur ein relativer Sinn zugeſchrieben werden kann, ſoll man trotzdem daran feſthalten, die Beſchleunigung als abſoluten Begriff feſtzuhalten? [1])".

Ce paralléliſme ne manque pas d'intérêt, et mérite ſans doute d'être mis en lumière, puiſque nous vivons à une époque où, en Angleterre comme ailleurs, grâce ſurtout a Einſtein, on n'attribue plus aux idées de Newton la valeur abſolue que bien des perſonnes leur attribuaient jadis.

Si Huygens avait vécu plus longtemps, il eſt poſſible qu'il aurait fait un effort pour établir comment le principe de la non-exiſtence du mouvement abſolu doit s'accorder avec le principe de la conſervation des forces (p. 477). Pour Leibniz [2]) la difficulté était moins grande, puiſqu'il admettait l'exiſtence d'un mouvement abſolu tout en jugeant le phyſicien incapable de le conſtater [3]).

Pour faire voir que la notion du mouvement d'un corps par rapport à l'eſpace immatériel n'eſt pas claire, Huygens ſe ſert de l'argument philoſophique ſuivant (T. XVI, p. 225): „Cum Ideam motus non aliunde habeamus quam ex mutatione poſitus corporis alicujus vel partium ejus (ut in motu circulari) ad alia corpora, nullum idcirco motum imaginari poſſumus quin iſtam poſitus mutationem contingere concipiamus, quoniam non poteſt motus concipi cui non conveniat idea motus". Quoiqu'en parlant de l'„idea motus" [4]) Huygens puiſſe avoir ſongé à quelqu' endroit de Platon — comparez la note 11 de la p. 31 qui précède —, il eſt fort poſſible qu'il n'aurait pas fait cette réflexion, s'il n'avait pas été en poſſeſſion de l'„Eſſay concerning the human underſtanding" de 1690 de John Locke: comparez la note 4 de la p. 659.

---

[1]) A. Einstein, „Mein Weltbild", 1934, Querido, Amsterdam, p. 249 (dans le Chapitre „Einiges über die Enstehung der allgemeinen Relativitäts-theorie").

[2]) Voir sur Leibniz et le principe de la conservation des forces la note 6 de la p. 359 du T. XVI.

[3]) C'est ce que Leibniz dit clairement dans la dispute avec Clarke dont nous avons parlé dans la note 1 de la p. 237 du T. XVI. Voir en outre les p. 198 et 199 (note 8) du T. XVI.

[4]) Et *peut-être* déjà en 1688 de l'„idea quietis" (T. XVI, p. 223). Nous remarquons qu'il y a un intervalle entre les deux derniers alinéas de la „pièce de 1688" et le texte précédent, et que la couleur de l'encre est différente. Il est donc possible que Huygens n'ait parlé ici de l'„idea quietis" qu'après avoir lu le livre de Locke.

En 1689 il avait rencontré en Angleterre non ſeulement Newton mais auſſi Locke; en 1691 (T. X, p. 212) il écrit être fâché de n'avoir pas aſſez connu ce dernier [5]), qui lui avait envoyé en mars 1690 ſon livre qu'il dit lire „avec beaucoup de plaiſir, y trouvant une grande netteté d'eſprit, avec un ſtyle clair et agréable" (T. IX, p. 393) [6]). Or, Locke parle conſtamment de la nature et de la valeur de nos „ideas". Notons que d'après lui „our idea of ſpace is ... diſtinct from that of body" (Livre II, Ch. XIII, § 27; comparez la p. 199 et les deux dernières lignes de la p. 231 de notre T. XVI).

Toutefois Locke ne ſe demande pas ſi l'on peut raiſonnablement parler d'une viteſſe déterminée d'une particule matérielle par rapport à l'eſpace. Le philoſophème de Huygens doit, paraît-il, être conſidéré comme plus ou moins original [7]).

---

[5]) Il ne l'avait apparemment pas rencontré en Hollande où Locke avait séjourné de 1683 jusqu'en mars 1689.

[6]) Huygens ajoute: „Je ne manqueray pas de lui écrire etc."; nous ne connaissons toutefois pas de lettre de Huygens à Locke.

[7]) Mais voyez ce que Huygens dit sur Descartes dans la note 2 de la p. 214 et à la p. 233 du T. XVI.

ANECDOTA.

§ 1. De innatantibus. Exercitij gratia [1]). Archimedis demonſtratio non videtur ſufficere [2]). Meum Theorema de appropinquatione centrorum gravitatis [3]). De Cylindro aliquid, de Cono [4]).

Notavi Archimedem cum per locum poſſet brevius, maluiſſe abſque eo [5]).

Veteres hoc obſervaſſe ut ſimplicioribus rationibus in demonſtrando uterentur, ut in 47 primi Elementorum noluerunt proportiones adhibere [6]).

Dioptrica [7]). prima fere ſtudia in his. adhuc uſque imperfecta nec pænitere. diu promiſſa. fruſtra inveſtigaveram correctionem mutuam ſuperficierum ſphæricarum [8]). quæ ſit optima lens convexa, 6 ad 1 [9]).

Theoremata omnia fere. forſan una demonſtratio teleſcopij. à nemine datam. Carteſium ignoraſſe nec Gregorium, nec Fabrium aut quenquam ſciviſſe [10]).

De Pareliorum et Coronarum cauſſis aliquid extat in Diarijs [11]). radius trans cylin-

---

1) Voir sur le traité: „De iis quæ liquido supernatant" les notes 1 et 2 de la p. 93 du T. XI.

2) Archimède, „De Corporibus fluitantibus" ou „Περὶ ὀχουμένων".

3) Est-ce à son „*Hypothesis I*": „Si Corpus sponte, seu gravitate suâ moveri incipiat, deorsum moveri; id est ut centrum gravitatis propius fiat plano horizonti parallelo" que Huygens donne ici le nom de „Theorema"?

4) Voir sur le cône flottant les p. 113—117, sur le cylindre flottant les p. 158—189 du T. XI.

5) Nous ne voyons pas où Huygens a noté qu'Archimède eût pu se servir, pour être plus court, d'un lieu géométrique.

6) Le Theor. XLVII du premier livre des „Elementa" ou „Στοιχεῖα" d'Euclide est le théorème de Pythagore.

7) T. XIII.

8) Voir les p. VII—VIII de l'Avertissement du T. XIII.

9) Il s'agit de la lentille biconvexe d'aberration minimale; voir le dernier alinéa de la p. 290 du T. XIII.

10) Huygens parle de la „Dioptrique" de 1637 de Descartes, de l'„Optica Promota" de 1663 de J. Gregory et de la „Synopsis optica" de 1667 de H. Fabry. Consultez sur ces livres le T. XIII.

11) Huygens parle de sa publication de 1667 („Relation d'une Observation faite à la Bibliothèque du Roy"), sur laquelle on peut consulter la note 10 de la p. 162 du T. VI, ainsi que les notes 3 de la p. 498 et 2 de la p. 513 du T. XVII. Cette Pièce a été publiée par nous, avec quelques variantes, aux p. 498—507 du T. XVII. Mais le traité „De Coronis et Parheliis" ne fut publié (en traduction latine) que dans les „Opuscula postuma" de 1703. Le texte hollandais a été publié pour la première fois en 1932 dans notre T. XVII.

drum refractus. ejus projectio ſeu veſtigium in baſi, tanquam major proportio refractionis eſſet [1]). cylindrus glacialis a ſtellula pendens Keplero obſervatus [2]).

Tabula aperturarum [3]).

Amplificatio ex ſphærulis et lenticulis [4]).

Quam difficile ſphæricæ ſuperficies perficiantur. quantum hic operæ impenderim [5]).

Metium non eſſe primum inventorem [6]).

Addidiſſem libellam errori non obnoxiam. extat in Diarijs [7]). meretur conſervari.

Quid binis teleſcopijs alij effecerint [8]).

De animalculis in ſemine præcipua obſervatio. non pridem facta, a Lewenhoekio exculta [9]). De circulatione. De animalculis in aqua pipere miſta. quæ puto ex aere allabi [10]).

De motu ex colliſione ſeu impulſu. dedi regulas quæ exſtant in Diarijs [11]). Quid Angli, ad quos 4 regulas priores miſeram cum demonſtrationibus. Walliſius non habebat antea ſed meam ſibi uſurpat, ſed obſcurè tamen. quæ vis ejus demonſtrationis non viderunt [12]). eam et in mollibus adhibui. quid invenerim [13]). Mariottus plagiator [14]).

---

[1]) Voir ce que nous disons aux p. 487—488 du T. XVII sur l'indice de réfraction apparent *N*.

[2]) T. XVII, p. 387 et 516.

[3]) Voir les p. 350—353 et 496—499 du T. XIII, ainsi que la note 5 de la p. 14 du T. XV.

[4]) Consultez sur les „Microscopes simples à boulettes sphériques" et les „Microscopes simples à lentilles" la p. 895 du T. XIII.

[5]) Voir la p. 889 du T. XIII („Fabrication des lentilles"), la p. 601 du T. XV (idem), et les p. 248—258 et 287—304 du T. XVII, ainsi que les „Commentarii de formandis poliendisque vitris ad telescopia" publiés pour la première fois (en latin) en 1703 dans les „Opuscula Postuma"; le texte original hollandais (voir toutefois la note 5 de la p. 243 du T. XVII) paraîtra dans un des Tomes suivants de la présente édition.

[6]) Voir les p. 436, 586, 588 et 591—593 du T. XIII. Descartes („Discours de la méthode") avait attribué l'invention du télescope à Jacob Metius.

[7]) „Nouvelle invention d'un niveau à lunette" (Journal des Sçavans du 29 janvier 1680). „Démonstration de la justesse du niveau" (J. d. Sc. du 26 février 1680).

[8]) Nous ne savons pas à quelle pièce Huygens fait allusion.

[9]) Voir sur Leeuwenhoek la note 16 de la p. 315 du T. VII, et plusieurs passages du T. XIII.

[10]) Voir sur les observations microscopiques de Huygens les p. CXXXIX—CXLII et 698—732 du T. XIII.

[11]) „Extrait d'une lettre de M. Huygens sur les regles du mouvement dans la rencontre des corps" (Journal des Sçavans du 18 mars 1669). Voir les p. 169—181 du T. XVI. Le traité „De motu corporum ex percussione" ne fut publié qu'en 1703 dans les „Opuscula Postuma" Nous l'avons publié dans le T. XVI.

[12]) T. XVI, p. 172—178 (Avertissement).

[13]) Consultez sur la „Percussion des corps mous" la p. 592 du T. XVI.

[14]) T. XVI, p. 207—209.

[15]) Voir sur cet alinéa, déjà cité dans la note 5 de la p. 198 du T. XVI, l'Avertissement qui précède.

Motum non alium quam relativum dari. etiam vertiginis motum relativum esse. contra Neutonum[15]).

De vi centrifuga exstant, sed non demonstrata[16]). præcipuum theorema (forsan demonstrabo) quo vis ea exæquatur gravitati[17]). Galileus deceptus[16]). Libera per vacuum &c.[18]). Neutonus applicuit feliciter ad motus ellipticos Planetarum. hinc quanti sit hæc vis centrifugæ cognitio apparet[16]). Borellus aliquid prius. sed vis centrifugæ mensuram ignorabat[19]).

Mirabile de turbine se sustinente, nec adhuc perspectum.

---

§ 2. De[20]) phænomenis Saturni. et lunula. quale primum telescopium meum, lens superficierum alteram planam ex speculo habebat. exili apertura[21]). tanto mirabilius[22]) annulum fuisse repertum. Diligentia mira in observando per hyemem, tertia post mediam noctem, vigente gelu[23]). Ex Neuræi epistola, de Gassendo qui moriens delegabat amicis hanc de Saturno disquisitionem[24]). De lunula mea Gassendo dixeram[25]). Quid Cardinalis Mediceus et Itali, quorum scripta servo[26]). Quid Eustachius cum Fabro[27]). sed hic sententiam veriorem postea amplexus ut in dialogis[28]). quid Jo[29])

---

[16]) Ces trois passages sont cités dans la note 3 de la p. 251 du T. XVI, où nous avons indiqué où Galilée s'était trompé.

[17]) Comparez le premier alinéa de la p. 46 du présent Tome.
Voir aussi le dernier alinéa de la p. 303 du T. XVI et la Prop. V à la p. 275 du même Tome.

[18]) T. XVI, p. 302.

[19]) Comparez les p. 250—251 du T. XVI.

[20]) Tout ce qui suit se rapporte à des traités que Huygens avait publiés.

[21]) Passage déjà cité à la p. 11 du T. XV, dans lequel nous avons publié la „De Saturni lunâ observatio nova" de 1656, ainsi que le „Systema Saturnium" de 1659.

[22]) Leçon alternative: majus.

[23]) Passage cité à la p. 8 du T. XV.

[24]) C'est ce que de Neuré ou Neuræus (voir sur lui la note 1 de la p. 373 du T. III) dit dans la lettre à J. Chapelain du 15 mai 1660 que nous avons publiée à la p. 375 du T. III.

[25]) Huygens avait rencontré Gassendi, qui mourut le 24 octobre 1655, à Paris en cette même année, comme il l'écrit à son père le 6 août (T. I, p. 341).

[26]) Huygens avait dédié son „Systema Saturnium" au prince Leopoldo de Medicis. Voir aussi les deux premiers alinéas de la p. 187 du T. XV.

[27]) Voir les p. 389—472 du T. XV.

[28]) T. XV, p. 401, 402.

[29]) Lisez: Giuseppe.

Campanus, qui laureolam in mustaceo, quod Romæ videndum præbuerit [1]). Alij quaterni Satellites a Cassino inventi [2]). Correctio inclinationis annuli [3]). Wallisij astus in anagrammate [4]). Wrennij hypothesis, eademque Freniclij de qua hic decertat. Riccioli fere eadem. Mira affectatio vel ingenij tarditas, post cognitam veram tali se venditantis [5]). Hevelius cessit [6]).

---

§ 3. De Horologio oscillatorio. quomodo primum invenerim ex hodometro [7]). Conatus plurium præripere cupientium. ut in Experimentis Florentinis [8]). Post nostrum libellum in Italiam dimissum, figuras per Bullialdum a Cardinali Mediceo missas quarum Galilei alteram. sed difficili machinatione, ut non mirum non successisse [9]). Hevelius sibi occeptum [10]). Germanus quidam ciniflo [11]) volebat Tychonem Brahe mihi præivisse. Daniæ legatus Craghe habebat vetus horologium Tychonis nequaquam affabre elaboratum cui pendulum inerat, et contendebat ita olim fabricatum fuisse. sed Ol. Romerus qui huc iter tunc forte habebat fraudem coarguit, optime se menisse [lisez: meminisse] dicens a quo et quando pendulum illud ipsum appensum foret [12]).

---

[1]) L'expression „laureolam in mustaceo quærere" (le „mustaceum" est une tarte où entrent des feuilles de laurier) se trouve chez Cicéron („Epistolæ ad Atticum", Lib. V, Ep. XX, § 4) et signifie: vouloir tirer gloire de choses peu importantes. Or, il nous semble que la gloire de Campani était bien méritée: voir p.e. la note 1 de la p. 117 du T. V et la p. 14 du T. XV. Sans doute Huygens veut dire simplement que Campani n'avait vu l'anneau de Saturne qu'après lui (voir la p. 96 du T. V).

[2]) Voir sur la découverte du deuxième et du troisième satellite de Saturne la p. 35 qui précède. Cassini découvrit encore deux satellites en mars 1684 (T. VIII, p. 492—494).

[3]) Voir la note 2 de la p. 206, ainsi que la p. 208, du T. XV.

[4]) Voir sur l'„astus" de Wallis la p. 458 du T. I.

[5]) Voir sur les hypothèses de Wren, de Frenicle et de Riccioli la note 7 de la p. 381 du T. XV, où nous avons déjà cité ce passage des „Anecdota".

[6]) Passage cité dans la note 10 de la p. 184 du T. XV.

[7]) Passage cité à la p. 36 du T. XVII.

[8]) Voir le deuxième alinéa de la p. 60 du présent Tome.

[9]) Voir les p. 8 et 14 du T. III, la note 2 de la p. 38 du T. XVII et le troisième alinéa de la p. 65 du présent Tome.

[10]) Voir la note 9 de la p. 11 du T. XVII.

[11]) Ciniflo = cinerarius. Le mot, qui se trouve dans les Satires d'Horace (1, 2, 98) désigne un individu de bas étage.

[12]) À la p, 238 du Manuscrit F datant de 1686 Huygens écrit:

„Tychonis Brahei Mechanica edita a° 1602.

A° 1586 auctor erat annorum 40. In descriptione quadrantis muralis magni

Sed præcipuum longè hic eſt Cycloidis inventum. utinam vidiſſet Galileus. Brounkerus tentavit Anglis vel ſibi hic aliquid decerpere, edita demonſtratione, abſque mei mentione, ſed falſâ, cum et ante aliam quoque falſam ad me miſiſſet [13]). Pardies etiam, ſed noſtræ non comparanda, in qua tempus definitur [14]).

Quale horologium ad longitudines metiendas paraverim, fere ut in libro edito, ſed additum ut ſingulis horæ ſcrupulis ſexageſimis eadem omnia reverterentur, una rota perennem motum habente, reliquis quieſcentibus, niſi cum huic novæ vires conciliandæ [15]). qui ſucceſſus. et de variatione ſecundum distantias ab æquatore. Voldero examinatum [16]).

De Evolutione nova Theoria et lucem adferens geometricis rebus [17]).

De centro oſcillationis, cujus particulam quandam aliter demonſtrare nonnulli exiſtimarunt aliquid eſſe [18]).

---

meminit horologiorum quibus utitur, quæ ad ſcrupula ſecunda indicent. In his magnum unum fuiſſe ſcribit in quo rota una 1200 denticulorum. huic duorum cubitorum diameter. Omnium iſtorum horologiorum compoſitionem alias ſe daturum pollicetur. Pendulorum nulla hic mentio. Horologio Di Kragij Danici legati inſcriptus eſt annus 1576 ſi bene memini. Quod ſi illo jam tempore Penduli uſum reperiſſet Tycho, qui fieri potuit ut toto 24 annorum ſpatio, quos poſtea vixit (obijt enim a° 1601 menſe Oct.) nullum in ſcriptis ſuis, inventi tam egregij tamque exoptati mentionem fecerit! Itaque exiſtimo Di Kragij horologio Tychonico pendulum poſtea adjectum, idque ea induſtria ut videretur jam olim ita fabricatum eſſe. Atque hoc ita ſe habere teſtatus eſt Cl. Romerus cum e Dania Hagam Comitis veniſſet ac ſe certo ſcire quando ita immutatum fuerit". La dernière phrase a apparemment été ajoutée plus tard (autre couleur d'encre). Römer visita la Hollande en 1687.

13) Voir sur la première démonstration de Brouncker, celle de 1662, la p. 349 du T. XVI; sur une deuxième datant de 1673, la p. 304 du T. VII; et sur une troisième la p. 314 du T. VII, où nous avons cité le présent texte.

14) Voir sur la démonstration de Pardies les p. 487—488 qui précèdent.

15) À la p. 179 du T. XVII il est parlé (en 1665) d'un remontage qui aurait lieu toutes les 15 secondes. Dans le „liber editus", c.à.d. dans l'„Horologium oscillatorium", il est question (p. 118 qui précède) d'un remontoir se remontant toutes les demi-minutes. Mais le remontoir de 1685 (déjà construit plus tôt; voir la note 8 de la p. 533) se remontait toutes les minutes (voir le N° XXVII à la p. 542 qui précède, et la p. 290 du T. IX).

À propos du remontoir de l'„Hor. osc." nous avons dit à la p. 182 du T. XVII que suivant Gould il se remontait toutes les demi-*secondes*. Nous avons remarqué depuis que ce *curiosum* se trouve déjà chez Berthoud („Histoire de la mesure du temps etc.", I, p. 248).

16) Voir sur la „variatio" nommée provenant de la rotation de la terre, et sur les remarques de de Volder, les p. 640—641 qui précèdent.

17) Voir les p. 40—44, 188—241 et 388—410 qui précèdent.

18) Voir les p. 33—34, 46—50, 52—58, 242—359, 413—436 et 441—466 qui précèdent.

15 ped. cum uncia ſpatium cadendo peractum in ſcrupulo horæ ſecundo [1]).

Penduli ſecundorum longitudo ante ignota [2]). Merſenni [3]). Mirum nec ipſi nec qui ipſius libellum legiſſet non veniſſe in mentem ut horologio pendulum aptaret [4]).

Horologium portatile cum involuto elatere. Fraus plagiarij Pariſienſis induſtriæ non vulgaris. non potuit ſe continere [5]). Omitte de Privilegio [6]).

Vitium Elateris ex mutatione caloris. alioqui tentaſſem itinere in Indiam [7]).

Omnia horologia portatilia poſtea hoc invento correcta. ubi tot mechanici continuo ſe exercuerint dico talia mirum non fuiſſe animadverſa.

Hookij ineptiæ, ſuſpiciones, injuriæ, alias ſatis ingenioſi. literæ Brounkeri. ipſis Anglis moleſtus Hookius. Hevelio iniquus [8]).

Horologium ex circulari pendulo. quid incommodi [9]).

---

[1]) Voir les p. 354—359 qui précèdent.

[2]) Voir la note 2 de la p. 354 du T. XVII et les p. 431 et 571 du présent Tome.

[3]) Voir sur Mersenne la note 1 de la p. 70 et la note 9 de la p. 279 du T. XVII.

[4]) Le „libellum" est peut-être celui de 1639, „Les nouvelles pensées de Galilée".

[5]) Il s'agit de I. Thuret; voir la p. 504 qui précède.

[6]) Voir la p. 504.

[7]) Voir la p. 508.

[8]) Voir sur Hooke les notes 2 de la p. 502, 4 de la p. 504 et 1 de la p. 605 du présent Tome. Sur Hooke et Hevelius on peut consulter les p. 395, 431 et 432 du T. VII.

[9]) Voir sur les horloges à pendule conique les p. 360—365 et 437—438 qui précèdent. Nous ignorons à quels inconvénients de ces horloges Huygens fait allusion.

TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

Page.

L'HORLOGE À PENDULE OU À BALANCIER DE 1666 À 1695, AVERTISSEMENT ..... 1—4

L'HORLOGE À PENDULE DE 1666 À 1673 ..... 5—25

TEXTE ..... 7—19

Appendice I. Requête de Chr. Huygens à Louis XIV, pour obtenir un privilège sur les horloges marines [1665] 20

Appendice II. Choses à corriger aux pendules de mer [1668] ..... 21—22

Appendice III. Autres corrections aux horloges [1668—1670] ..... 23—24

Appendice IV. Expérience sur la dilatation des corps solides par la chaleur [1675?] ... 25

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM DE 1673 ..... 27—438

AVERTISSEMENT ..... 29—67

Questions de mathématiques pures. *A.* Quadrature du cercle. *B.* Développées et développantes semblables. *C.* Rayon de courbure ..... 39—44

Questions de mécanique théorique. *A.* Pesanteur et force centrifuge. *B.* Arcs cycloïdaux et pendule composé. *C.* Rectangulum oscillationis ou rectangulum distantiarum. *D.* Méthode de la Prop. XV de la Pars Quarta. *E.* Recherche du centre d'oscillation dans quelques cas particuliers ..... 44—50

Expédition pour déterminer les longitudes et table de l'équation ..... 50—52

Précurseurs et concurrents de Huygens. *A.* Tangentes aux courbes engendrées par les points d'une figure roulante. *B.* Centre d'oscillation et mesure universelle de la longueur. *C.* Horloges à pendule oscillant dans un plan antérieures à celles de Huygens. *D.* Horloges à pendule conique ..... 52—67

TITRE 69

Figure représentant l'horloge astronomique à pendule 71

Sommaire ..... 72—73

Dédicace de Huygens de son livre à Louis XIV, Roi de France et de Navarre ..... 74—81

Hadriani Vallii Daphnis, ecloga, ad Chr. Hugenium ..... 82—83

Privilège du Roy 84

Préface de Huygens ..... 86—91

Première Partie, contenant la description de l'horloge ..... 92—123

Deuxième Partie, de la chute des corps pesants et de leur mouvement cycloïdal ..... 124—187

Troisième Partie, de l'évolution et de la dimension des lignes courbes ..... 188—241

Page.

Quatrième Partie. du centre d'oſcillation. . . . . 242—359
Cinquième Partie, contenant une autre conſtruction baſée ſur le mouvement circulaire des pendules, et des théorémes ſur la force centrifuge . . . . . 360—368
Appendice I à la Première Partie. Détails ſur les obſervations à faire ſur mer pour trouver les longitudes à l'aide d'horloges [1668—1669] . . . . . 369—373
Appendice II à la Première Partie. Calcul de la période d'un pendule ſimple dépourvu d'arcs cycloïdaux et exécutant des oſcillations de 180° [1659—1693 ou 1694]. . . . . 374—387
Appendice à la Deuxième Partie. Figures roulantes [1670] . . . . . 388—394
Appendice I à la Troiſième Partie. Rectification des „paraboloïdes" et des „hyperboloïdes" 395—396
Appendice II à la Troiſième Partie. Quadrature de la ſurface des „ſphéroïdes" et des „conoïdes paraboliques" . . . . . 397—398
Appendice III à la Troiſième Partie. L'épicycloïde [1678] . . . . . 399—405
Appendice IV à la Troiſième Partie. Développée du folium Carteſii [1691] . . . . . 406—409
Appendice V à la Troiſième Partie. Rayon de courbure minimal de la courbe logarithmique [1692] 410
Appendice I à la Quatrième Partie. Premier projet d'une démonſtration de la loi de l'équilibre de la balance [1666] . . . . . 411—412
Appendice II à la Quatrième Partie. Centres d'oſcillation d'un ſegment de parabole, d'une croix et d'un demi-paraboloïde de révolution. Lieu des baſes d'un groupe de cônes droits ſuſpendus au même point et poſſédant le même centre d'oſcillation. . . . 413—418
Appendice III à la Quatrième Partie. Centre d'oſcillation d'un ſecteur de ſphère [1669 ou 1670] . . . . . 419—426
Appendice IV à la Quatrième Partie. Conſidération ſur le défaut d'iſochroniſme réſultant de ce que le pendule ſuſpendu entre les arcs cycloïdaux eſt un pendule phyſique et non pas mathématique [1670] . . . . . 427—428
Appendice V à la Quatrième Partie. Le poids curſeur du pendule. Longueur du pendule à ſecondes [1670] . . . . . 429—432
Appendice VI à la Quatrième Partie. Nouvelle démonſtration de la formule fondamentale du pendule phyſique, baſée ſur la décompoſition de la force vive totale d'un corps rigide en une force vive de tranſlation et une force vive de rotation autour du centre de gravité [1692 ou 1693] . . . . . 433—436
Appendice I à la Cinquième Partie. Le pendule conique et ſon poids curſeur [1667 ou 1668] 437
Appendice II à la Cinquième Partie. Remarque ſur la conſtruction des horloges à pendule conique. 438
OBJECTIONS DE ROBERVAL CONTRE LES DÉMONSTRATIONS DE L'AUTEUR DE L'„HOROLOGIUM OSCILLATORIUM", ET RÉPONSES DE HUYGENS [1670] . . . . . 439—456
AVERTISSEMENT . . . . . 441—447
TEXTE . . . . . 451—456

Page.

DE HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA ULTERIOR [1681—1690] ..... 457—466
LA CONSERVATION DES FORCES ..... 467—477
AVERTISSEMENT ..... 469—472
I. Le perpetuum mobile du marquis de Worcester [1667] ..... 473—474
II. La non-existence du mouvement perpétuel suivant Stevin [1676] ..... 475—476
III. La conservation des forces suivant Huygens [1693] 477
PRINCIPE DE L'INCITATION DONNÉE AUX CORPS PAR UN AGENT EXTÉRIEUR OU PAR UNE CAUSE INCONNUE, ET DÉCOUVERTE DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ISOCHRONISME DES VIBRATIONS ..... 479—498
AVERTISSEMENT ..... 479—488
I. Découverte de la théorie générale de l'isochronisme des vibrations [1673 ou 1674] . 489—495
II. Principe de l'incitation donnée aux corps par un agent extérieur ou par une cause inconnue [1675 ou 1676] ..... 496—498
APPLICATION PRATIQUE AUX HORLOGES DE DIFFERENTS MOUVEMENTS VIBRATOIRES PLUS OU MOINS ISOCHRONES ..... 499—596
AVERTISSEMENT ..... 501—521
I. L'application de janvier 1675 du ressort spiral régulateur aux balanciers des montres 522—526
II. L'application de décembre 1683 des vibrations de torsion aux horloges marines (pendulum cylindricum trichordon) ..... 527—535
III. Premier projet de 1683 ou 1684 du „balancier marin parfait" de 1693 ..... 536—538
IV. L'application du pendule triangulaire, datant déjà de 1671, à une horloge marine construite vers 1685, cette dernière étant un remontoir à ressorts ..... 539—545
V. Le „balancier marin parfait" de janvier-février 1693 ..... 546—561
VI. La „libratio isochrona melior præcedente" de mars 1693 ..... 562—570
VII. La „libra isochronis recursibus" de mars 1694 ..... 571—591
VIII. La dernière horloge marine de 1694 ..... 592—596
HUYGENS, ROEMER ET LEIBNIZ HORLOGERS ..... 597—623
AVERTISSEMENT ..... 599—604
I. L'échappement à ancre [1675] ..... 605—606
II. La forme des dents des roues. *A.* Forme épicycloïdale des dents pour les roues planes, d'après Roemer. *B.* Forme épicycloïdale des dents d'un pignon qui engrène dans une roue de champ à dents plates, et forme des dents d'une roue de champ qui engrène dans un pignon à dents plates, d'après Huygens [1674] ..... 607—620
III. Manière de faire qu'en montant l'horloge à ressorts elle ne discontinue par son mouvement ..... 621—622
IV. Forme de la vis et de l'écrou servant à monter ou baisser le plomb du pendule 623
INSTRUMENTS NAUTIQUES ..... 625—629
RÉSULTATS DE QUELQUES EXPEDITIONS MARITIMES ..... 631—653
A. L'expédition de 1669 de Toulon à Candie, et retour, du duc de Beaufort et de de

Page.

la Voye. *B.* L'expédition de 1672—1673 de J. Richer à Cayenne. *C.* L'expédition de 1686 de Texel au Cap de Bonne Eſpérance, et retour; rapports de Helder et de Graaf. *D.* L'expédition de 1690—1692 de Texel au Cap de Bonne Eſpérance, et retour; rapport de de Graaf. *E.* Quelques remarques ſur la détermination des longitudes avec les horloges ou par l'obſervation des ſatellites de Jupiter; etc.

ANECDOTA ..... 655—668

AVERTISSEMENT ..... 657—661

TEXTE ..... 663—668

II. PERSONNES ET INSTITUTIONS MENTIONNÉES.

Dans cette liſte on a rangé les noms ſans avoir égard aux particules *de*, *a*, *van* et autres.
Les chiffres gras déſignent les pages où l'on trouve des renſeignements biographiques [1]).

Abalphatus Aſpahanenſis, ou Abu'l fath ibn Mohammed al-Isfahâni. 394.
Académie de Cambridge. 44.
Académie (Française) des Sciences. 4, 9, 18, 19, 25, 32, 36, 40, 45, 412, 442, 443, 452, 454, 455, 458, 475, 481, 486, 502, 505, 521, 529, 544, 600, 602, 603, 636.
Académie Impériale de Petersbourg. 41, 46.
Académie Royale des Sciences d'Amſterdam. 516.
Accademia del Cimento de Florence. 60, 666.
Adam (Charles). 52, 232, 388.
Albèri (Eugenio). 61, 62.
Alembert (Jean le Rond d'). 442, 465.
Alesme (A. d'). 503.
Apollonios. 41, 393, 394, 699.
Appell (P.) 204.
Aratos. 30, 31, 83.
Archimède. 33, 178, 210, 211, 250, 251, 377, 424, 481, 599, 663.
Archives communales de Dordrecht. 515.
Archives communales de la Haye. 7, 509, 516, 517.
Archives communales de Leiden. 701.
Archives communales de Nymègue. 602.
Archives de l'Etat à la Haye. 509, 523, 525.
Archives des Etats de Hollande et de la Friſe occidentale. 524, 525.
Archives notariales de la Haye. 7, 509.
Archiviſte d'Arnhem. 504.
Archiviſte départemental à Saint-Lo. Voyez Legoy.

[1]) Le lecteur trouvera dans la liste des chiffres gras — voir p.e. Harrison — qui ne se rapportent pas à des renseignements biographiques proprement dits: mais ne peut-on pas dire que, pour un horloger p.e., l'histoire de ses ouvrages constitue la partie la plus importante de sa biographie?
Dans le T. XVII nous avons omis par mégarde le nom de Rijnaerts (Christiaen). **12.**

Archiviſtes de la Haye. 523.
Ariſtote. 54, 204, 600.
Aſtronomes grecs (les). 603.
Atticus (Titus Pomponius). 666.
Auzout (Adrien). 603.
Baldi (B.). 54.
Baleſtri (Domenico). 61.
Barents (Willem). 653.
Baſſermann—Jordan (E.). 66.
Batenburch (Jan van). Voyez van Call.
Beaufort (duc de). 10, 12, 21, 116, 117, 119, 373, 633.
Beaune (Florimond de). 407.
Becher (Johann Joachim). **702.**
Becker van Call (Jan). Voyez van Call.
Beeckman (Martin). 8.
Bernoulli (Jacques). 40, 42, 43, 227, 457—461. 463—465, 470, 501, 547.
Bernoulli (Jean). 41, 43, 458, 465, 466, 501, 602.
Berthoud (Fernand). 506, 519, 547, 548, 667.
Bewindhebberen. Voyez Directeurs.
Bibliothèque de l'Univerſité de Göttingue. 55.
Bibliothèque de l'Univerſité de Leiden. 67, 609, 640, 642.
Bibliothèque du Cabinet du Louvre à Paris. 84.
Bibliothèque Impériale à Paris. 20.
Bibliothèque Nationale à Paris. 4, 20, 459, 695.
Bibliothèque Royale à Paris. 84.
Biot (J. B.). 43, 61, 62, 65.
Blaeu (W. J.). 371, 634, 701, 702.
Bodeker (Joſt). **66.**
Bois (P. du). 520.
Boismorand (de). 59.
Borelli (G. A.). 41, 43, 393, 394, 665.
Boullian (Iſmaël). 4. 17. 60—63, 666.
Bourbons (les). 35.
Boutroux (Pierre). 511.
Boyle (Robert). 453.
Brahé (Tycho). 34, 505, 600, 666, 667.
British Muſeum à Londres. 701.
Britten (F. J.). 520.
Broeck (C. van). 8.
Bronsvelt (G.). 8.
Brook Taylor. 486.

Brouncker (William). 58, 211, 243, 522, 667, 668.
Brown (Harcourt). **4**, **698**.
Bruce (Alexandre), comte de Kincardine. 22, 115.
Brugmans (H. L.). **3**, 695, **698**.
Bruna (P. P.). **51**, 695.
Brunſchvicg (Léon). 511.
Burgi (Joſt). 32.
Call (Jan van). **602**.
Calthoff (Caſpar). **474**.
Camerini. **60**, 65.
Campani (Giuſeppe). 665, 666.
Cantor (M.). 41, 43, 226.
Carcavy (Pierre de). 8, 59.
Cardan (Jérôme). 11, 12.
Cartes (René des). 46, 52—54, 154, 208, 209, 232, 233, 242, 243, 388, 393, 401—403, 406, 407, 446, 453, 456, 460, 469, 472, 483, 603, 661, 663, 664.
Caſſini (Giovanni Domenico). 35, 636, 652, 666.
Caſtelli (Benedetto). 442.
Caſtillioneus ou Caſtillion (J.). 43.
Catelan (Abbé de). 457, **459**, 460, 461.
Catelan (Mlle). 459.
Cavalieri (Bonaventura). 50.
Cavendish (Charles). 52, 53, 243.
Centre international de ſynthèſe. Voyez Comité international etc.
Céſar (Jules) (C. Julius Cæſar). 30.
Ceulen (Johannes van, père). 32, 508, **509**, 510, 511, 513, 516, 525, 526, 532, **533**, 534, 567, 699.
Ceulen (Johannes van, fils). **509**.
Chapelain (Jean). 7—9, 32, 34, 513.
Charles I, Roi d'Angleterre. 474.
Charles II, Roi d'Eſpagne. 519.
Chriſtian V, Roi de Danemark. 603.
Cicéron (M. Tullius Cicero). 3, 666.
Clarke (S.). 660.
Clement (William). **606**.
Clemente di San Carlo. 442.
Clerſelier (Cl.). 52, 388.
Clockmakers Company à Londres. 520, 547.
Cloeſen (Bernard van der). 516, **517**, 520, 521, 567, 593, 595.
Cloeſen (O. van der). 517.
Colbert (Jean Baptiſte). 9, 20, 35, 84, 522.

Collège de Clermont à Paris. 487.
Collins (J.). 43, 44.
Combes (F. de). 24, 371.
Comité international d'hiſtoire des ſciences et de la ſection d'hiſtoire des ſciences du centre international de ſynthèſe. 53.
Communauté des marchands libraires et imprimeurs de Paris. 84.
Compagnie des Indes (anglaiſe). 521.
Compagnies des Indes des Pays-Bas impériaux. 521.
Compagnies des Indes (françaiſe). 521.
Compagnie hollandaiſe des Indes Orientales. 509, 514, 515, 521, 526, 532—534, 539, 544, 562, 592, 641, 647.
Conſeil communal de Nymègue. 602.
Conſeil privé du Roi Louis XIV. 84.
Copernicus. Voyez Kopernik.
Corporation des horlogers à la Haye. 509, 517.
Coſter (Salomon). 63, 64, 438, **513**, 599, 601.
Cour provinciale de Hollande. 8.
Craghe. 666.
Curateurs de l'Univerſité de Leiden. 19.
Daligre. 84.
Dam (P. van). 510.
Davis (John). 371, 372.
Delambre (J. B. J.). 635.
Derham (William). 606.
Deſcartes. Voyez Cartes (des).
Deſchales (C. F. M.). 58.
Dettonville (A.). Voyez Paſcal (Blaiſe).
Dircks (H.). 474.
Directeurs de la Compagnie hollandaiſe des Indes Orientales. 509, 510, 514, 515, 526, 533, 539, 544, 562, 592, 641, 643.
Divinis (Euſtachio de). 665.
Doncker (H.). 634.
Douw (Simon). 33.
Drummond Robertſon (J.). **17**, 60, **61**, 62, 63, 505, 520, 523, 606, 695, 699.
Dubem (Pierre). 54, 470.
Duillier (Nicolas Fatio de). 610, 637.
Duſſen (Willem van der). 514, **515**, 701.
Ecchellenſis (Abraham). 41, 393, 394.
Einſtein (Albert). 660.
Elvius (P. P.). 387.
Eſtienne. 24, 58.

Etats de Hollande et de la Frife occidentale. 63, 90, 504, 598, 523, 524.
Etats-Généraux. 504, 525.
Euclide. 31, 39, 151, 186, 284, 285, 292, 293, 300—303, 441, 663.
Eudoxe. 30.
Euler (Léonard). 41, 46, 378, 387, 428, 518.
Fabry (Honoré). 52, **53**, 54, 57, 58, 242, 243, 443—447, 663, 665.
Faddegon (J. M.). 695.
Fatio. Voyez Duillier.
Ferdinando de Medicis. 63—65, 699.
Fermat (J.). 210, 211, 451, 511, 530.
Flamfteed (J.). 641.
Frenicle de Beffy (B.). 666.
Friedlein (J.). 600.
Fockes (Barent). 534.
Fromanteel (John). **513**.
Fullenius (Bernhard). 510.
Galilei (Galileo). **35**, 45, 46, 60—62, **63**, 65, 83, 88, 90, 91, 136, 137, 140—143, 172, 173, 184, 185, 376, 441, 442, 452, 453, 456, 487, 605, 606, 652, 665—668.
Galilei (Vincenzio). **60—62**, 65, 90, 91, 699.
Galilei (Veuve de Vincenzio). 61—63.
Gallois (J.). 509.
Gallon. 547.
Gaffend ou Gaffendi (Pierre). 665.
Gazier (F.). 511.
Generini (Francefco). **63**, **64**.
Gent (Willem Jofeph van). 17.
Géomètres grecs (les). 33, 34, 603.
Golius (Jacobus). **41**, 393, 699.
Gouffier (Arthus), duc de Roanais. **503**.
Gould (Rupert T.). 16, 17, 521, **547**, 560, 667.
Graaf (Abraham de). 544.
Graaf (I. de). 535.
Graaf (Johannes de). 513—515, 535, 539, 544, 545, 636—640, 642—646, 648, 658.
Graham (George). 547.
's Gravefande (Gulielmus Jacobus). 7, 67, 93, 122, 139, 220, 235, 308, 309, 457, 485, 521, 658.
Gregory (J.). 40, 663.
Gretton (Ch.). 520.
Guiffrey (J.). 505, 633.
Guillaume III. Voyez Willem III.
Guldin (P.). 49.
Gunther (R. Th.). 371.

Hakluyt Society. 371, 653.
Halley (E.). 393.
Hamel (J. B. du). 443, 505, 602.
Harrifon (John). **17**, **522**.
Hartfoeker (N.). 459.
Hautefeuille (J. de). 502—504.
Heckfcher (A.). 44, 226, 301.
Heemskerk (Jacob van). 653.
Helder (Thomas). 513, 539, 636, 637, 642.
Henriette-Anne d'Angleterre, duchelle d'Orléans. 7.
Henry (Ch.). 443, 451, 511, 530.
Hermann (Jakob). 40.
Heuraet (J. van). 208—211.
Hevelius (Johannes). 4, 442, 629, 666, 668.
Hire (Philippe de la). 602, 603, 610, 611, 614.
Holmes (Robert). 7, 9, 116, 117.
Holwarda (J. F.). 83.
Homère. 83, 503.
Honoré Naber (S. P. l'). 653.
Hooke (Robert). 17, **66**, 484, **502—505**, **606**, 668.
Hôpital général de Paris. 84.
Hôpital (G. E. A. marquis de l'). 43, 457—464, 592.
Horace. 666.
Horlogers anglais et français du dix-huitième fiècle. 530.
Horrebow (P.). 505, 600, 602, 606.
Hudde (J.). 232, 406, 408, 509, 510, 526, 533—535, 539, 544, 545.
Hulshof (A.). 702.
Huygens (Conftantyn, frère). 505, 532, 544.
Huygens (Conftantyn, père). 7, 20, 29, 30, 41, 53, 55, 66, 82, 84, 86, 87, 446, 504, 505, 509, 516, 544, 665.
Huygens (Lodewyk, frère). 9, 10, 22, 633.
Huygens (frères). 29, 82.
Jaeger (F. M.). 702.
Jal (A.). 20.
James II, Roi d'Angleterre. Voyez York (duc d').
Jean Cafimir, Roi de Pologne. 64.
Kepler (Johannes). 42, 664.
Kincardine (comte de). Voyez Bruce (Alexandre).
Kock (A. C. de). 699.
Kopernik (Nicolas). 34.
Krafft (G. W.). 40, 41, 400.
Kragius. Voyez Craghe.

Laer (Pieter van). 701.
Lagrange (J. L.). 442, 445, 458, 464, 470.
Lalovera ou de la Loubère (A.). 204, 205, 211.
Laviſſe (E.). 35, 443.
Lefort (F.). 43.
Legoy (A.). 400.
Leeuwenhoek (Antony van). 664.
Leibniz (G. W.). 40, **42**, 44, 211, 378, 434, 458, 465, **470—472**, 483, 484, 486, 503, 508, 519, 523, 525, 546, 592, 597—623, 659, 660, 699, 700.
Lennep (Jacob van). 649, 652.
Leopoldo de Medicis. 60—65, 441, 665, 666, 699.
Linſchotenvereeniging. 653.
Locke (John). 660, 661.
Loria (Gino). 603, 608.
Louis, duc d'Orléans. 521.
Louis XIV, Roi de France. 7—9, 18—20, 30, 32, 34, 35, 69, 74—81, 84, 116, 117, 459, 505, 522.
Magalotti (L.). 60.
Malvaſia (Cornelio). 91.
Marchetti (Aleſſandro). 442.
Marguet (F.). 518, 520, 522, 546.
Mariotte (E.). 58, 482, 603, 664.
Martinot (ou Martinet). **4**, **503**.
Medicis (les). 35. Voyez auſſi Ferdinando et Leopoldo de Medicis.
Meerſche (P. van der). 698.
Mercator (Nicolas). **519**.
Mercator (Nicolaus). 641.
Merſenne (Marin). 41, 52—55, 57, 58, 101, 203, 204, 242, 243, 388, 401, 443—446, 455, 486, 530, 668.
Metius (Jacob). 664.
Meybofch (Carel ou Gillis). 701.
Molhuyſen (P. C.). 19, 519.
Monte (Guido Ubaldi del). 54.
Montmort (H. L. H. de). 8, 9, 698.
Moray (R.). 7, 311.
Motte (B.). 485.
Mousnier (Pierre). **53**, 54—58, 443, 445—447.
Mouton (Gabriel). 36, 59, 352, 353.
Muguet (F.). 69, 84.
Muſée de la „Clockmakers Company" à Londres. 547.
Muys van Holy. 523.
Nederlandſch Hiſtoriſch Natuurwetenſchappelijk Muſeum. 371, 517, 525.

Nelius ou Neile (W.). 210, 211.
Neuracus ou de Neuré (M. A.). 665.
Newcomb (S.). 51.
Newton (Iſaäc). 37, 38, 43—45, 387, 400, 483—486, 501, 546, 547, 551, 554, 563, 579, 636, 658—661, 665.
Nierop (Rembrantſz. van). Voyez Rembrantſz.
Nix (L. M. L.). 394.
Noël (Eſtienne). 54.
Nulandt (F. W. de). 117.
Obſervatoire de Copenhague. 18, 600—602.
Obſervatoire de l'Univerſité de Leiden. 18, 19, 52, 601.
Obſervatoire de Paris. 18, 35, 78, 79, 505.
Oettingen (A. von). 44, 226, 301.
Oldenburg (Heinrich). 487, 504, 505.
Ooſterwijck (Severijn Adamſen). 8, 9, 17, 119, **505**.
Orléans (duc ou ducheſſe d'). Voyez Henriette-Anne, Louis, et Philippe.
Oſtwald (W.). 44, 301.
Pappos. 34, 49, 276.
Pardies (I. G.). 485, **487**, **488**, 502, 667.
Parlement français. 84.
Paſcal (Blaiſe). 203, 204, 212, 213, **503**, 511, 530.
Paſcal (Claude). **513**.
Paſcal (Etienne). 451.
Péripatéticiens (les). 454.
Perrault (P.). 522.
Petit (Pierre). 372.
Philippe, duc d'Orléans. 7.
Philoſophes du dix-huitième ſiècle. 599.
Picard (E.). 204.
Picard (Jean). 18, 25, 603.
Platon. 31, 658, 660.
Ptolémée. 486.
Pythagore. 486, 663.
Pythagoriciens (les). 486.
Rambaud (A.). 35, 443.
Rembrantſz. van Nierop (Dirk). 641, 642.
Reverchon (Léopold). 92.
Riccioli (Giovanni Baptiſta). 653, 666.
Richer (Jean). 18, 22, 117, 635, 636.
Roanais (duc de). Voyez Gouffier.
Roberval (Gilles Perſonne de). 4, 52, 54, 55, 204, 205, 243, 439, **442**, **443**, 445—447, 449—457, 459, 511, 529, 530.

Roemer (Ole). 505, 597—623, 666, 667, 700.
Royal Society. 4, 36, 66, 352, 353, 547, 606.
Royer (A. J.). 519, 698.
Rijp (Jan Cornelisz.). 653.
Scheepvaartmuseum à Amsterdam. 701, 702.
Schevichaven (H. D. J. van). 602.
Schooten (Frans van). 52, 154, 208—211, 388, 393, 401, 402, 407.
Schütte (F.). 603.
Schuh (F.). 3, 39.
Science Museum à Londres. 65, 606.
Seuil (du). 22.
Shakespeare (William). 31.
Skive (L. Th.). 600.
Sluse (René François de). 40, 210, 211.
Snellius (Willebrordus). 648.
Société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. 511.
Somerset (E.). Voyez Worcester.
Stapel (F. W.). 510.
Stevin (H.). 467.
Stevin (Simon). 467, 471, 475, **476**.
Suerius (D.). 17.
Sully (Henry). 17, 503, 519, **520**, 521, **546**, 547, 548, 560, 599, 698, **701**.
Swinden (J. H. van). 698, 699, 702.
Tachard (Guy). 652.
Tannery (Paul). 35, 36, 52, 232, 388, 443, 451, 511, 530.
Tannery (Mme Paul). 52.
Teilen (van). 510. Erratum pour van Ceulen.
Thabit ibn Corrah. 394.
Théophraste. 30.
Thévenot (Melchisédec). 54, 55.
Thierry (D.). 84.
Thuret (Isaac). **7—9**, 11, 16, 18, **19**, 33, 35, **504—507**, **513**, **522**, 599, 601, 668, 695, 700.
Torricelli (Evangelista). 441, 442, 453.
Tracy (Steven). **517**.
Treffler (Marco). 699.
Treffler (Philippe). **63**, **64**, 699.
Ubaldi (Guido). Voyez del Monte.
Université de Copenhague. 600.
Université de Göttingue. 55.
Université de Leiden. 19, 41, 52, 67, 519, 609, 640.

Uylenbroeck (P. J.). 400, 520.
Vallius. Voyez van der Walle.
Vaumelle (Pierre de). 40, **400**, 402, 403, 603.
Veer (Gerrit de). 653.
Veltman. 66.
Verdam (J.). 652.
Vernon (F.). 36, 43, 44, 443.
Verwijs (E.). 652.
Vinci (Leonardo da). 54, 60, 66.
Virgile. 30, 83, 505.
Vifbach ou Vifbagh (Pieter). **516**.
Viffcher (N.). 634, 646, 647.
Vitellio. 42.
Viviani (Vincenzio). 30, 60—65, 441, **442**, 699.
Volder (B. de). 514, 545, 562, 641, 642, 652, 667.
Vollgraff (J. A.). **693**, **699**.
Voltaire. 30.
Voye (de la). 21. 22, 117, 371, 373, **633**, 635, 698.
Waard (Cornelis de). 53, 203, **204**, 243, 530.
Walle (Adrianus ou Hadrianus van der). 30, 31, 34, 82—84, **698**, 699.
Wallis (John). 58, 154, 155, 202, 203, 210—213, 664, 666.
Weber. 17.
Wit (Frederik de). 634, 702.
Witt (Johan de). 232, 702.
Willem III, Stadhouder. 523.
Winfchoten (W. à). 652.
Wolff (R.). 51.
Worcefter (Edward Somerfet, Marquis of). 467, 472, **473—474**.
Worp (J. A.). 505.
Wren (Chriftopher). 154, 155, 202—205, 208, 209, 547, 666.
York (duc d'). 522.

III. OUVRAGES CITÉS.

Les chiffres gras désignent les pages où l'on trouve une description de l'ouvrage.

Les chiffres ordinaires donnent les pages où il est question de l'ouvrage, ou qui contiennent dans le cas de Huygens la reproduction de l'ouvrage.

E. Albèri. Voyez J. B. Biot.

„ Voyez G. Galilei.

Apollonios, Conica (éd. *G. Borelli* et *A. Ecchellensis*), 1661, 41, 393, 394.

„ „ (éd. *E. Halley*), 1710, 395.

„ „ (manuscrits arabes), 41, 393, 394.

„ „ Voyez L. M. L. Nix.

Aratos, Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα, 30, 83.

Archimedes, De Corporibus fluitantibus, 250, 251, 481, 663.

„ De Sphæra et Cylindro, 424.

„ De Sphæroidibus et Conoidibus, 178, 179, 377.

Aristoteles, Περὶ φυσικῆς ἀκροάσεως, 600.

„ Mechanica, 54.

B. Baldi, In mechanica Aristotelis problemata exercitationes, 1582, 54.

E. Bassermann—Jordan, Geschichte der Räderuhren, 1905, 66.

Fl. de Beaune, In geometriam Renati des Cartes notæ breves, 1683, **407**.

J. J. Becher, De nova temporis dimetiendi ratione theoria, 1680, 702.

Jacques Bernoulli, Additamentum ad solutionem curvæ caustícæ fratris Jo. Bernoulli, una cum meditatione de natura evolutarum, & variis osculantium generibus, 1692, **42**.

„ Curvatura laminæ elasticæ. Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, 1694, **227**.

„ Démonstration du principe de Mr. Huygens touchant le centre de balancement, 1704, **458**.

„ Démonstration générale du centre de balancement ou d'oscillation, tirée de la nature du levier, 1703, **458**, 465.

„ Demonstratio centri oscillationis ex natura vectis, 1691, **458**.

„ Excerpta ex litteris datis Basileæ ad Autorem Diarii Parisiensis, de controversia inter Abbatem Catelanum & Hugenium de centro oscillationis, 1684, 457.

„ Narratio Controversiæ inter Dm. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatæ de centro oscillationis, 1686, 457.

Jean Bernoulli, Difcours fur les loix de la communication du mouvement, 1727, **459**, 466.
„ Lectiones mathematicæ de methodo integralium, 1691 & 1692, **43**.
„ Opera Omnia, 1752, 41, **43**.
„ Voyez G. G. Leibniz.
F. Berthoud, Hiftoire de la mefure du temps par les horloges, 1802, 506, 519, 547—549, 667.
J. B. Biot, Dell' orologio à pendolo di Galileo Galilei, differtation de M. Eugenio Albèri, 1858, **61**, 62.
W. J. Blaeu, De groote zeefpiegel, 1655, **371**.
„ Globe, 634, **701**, 702.
J. Bodeker, Manufcrit de 1587, **66**.
P. du Bois, Hiftoire de l'horlogerie, 1849—1850, **520**.
Tycho Brahe, Aftronomiæ inftauratæ mechanica, 1602, 666.
F. J. Britten, Old clocks and watches and their makers, 1911, 1933, **520**.
Brook Taylor, Of the motion of a ftretcht ftring, 1713, **485**, 486.
Harcourt Brown, Scientific organizations in feventeenth century France (1620-1680), 1934, 4, **698**.
H. L. Brugmans, Le féjour de Chr. Huygens à Paris et fes relations avec les milieux fcientifiques français, fuivi de fon Journal de voyage à Paris en 1660 et 1661 et de fon Journal à Londres en 1663, 1935, 3, **698**.
M. Cantor, Vorlefungen über Gefchichte der Mathematik, 1901, **41**, 43, 226.
R. des Cartes, Difcours de la méthode, 1637, 664.
„ La Dioptrique, 1637, 663.
„ La Géométrie, 1637, 232, 388, 393, 402, 403, 406, 407.
„ Lettres (éd. *Clerselier*), Vol. III, 1667, 52, 388.
„ Oeuvres (éd. *Adam* et *Tannery*), 1897—1913, 52, 232, 389.
„ Voyez F. de Beaune.
„ Voyez F. van Schooten.
G. D. (ou *J. D.*) *Caffini*, Ephemerides bononienfes Mediceorum fiderum ex hypothefibus et tabulis J. D. Caffini etc. deductæ, 1668, 652.
J. Caftillioneus. Voyez I. Newton.
Catelan. Examen mathematicum centri ofcillationis, 1681—1682, 457.
„ Exceptio ad refponfionem Hugenii, 1682, 457.
„ Objectio contra motum pendulorum in cycloidibus, 1682—1683, 457.
„ Obfervationes in propofitionem, quæ fundamentum eft 4e partis tractatus de pendulis Hugenii, 1681—1682, 457.
„ Principe de la fcience générale des lignes courbes ou principaux élémens de la géométrie univerfelle, 1691, **459**.
„ Refponfio ad litteras D.^ni Bernoulli de controverfia fua cum D.^no Hugenio de centro ofcillationis, 1684, 457.
„ Refponfio ad objectiones Hugenii adverfus methodum Abbatis Catelani de determinando centro ofcillationis, 1682—1683, 457.
„ Témoignage que rendent les mathématiques à la gloire du Roi, 1681, 17, **459**.
Catelan et Mlle Catelan la cadette, Infcriptions en vers latins et françois pour les basreliefs de la ftatue du Roy, 1686, 459.

Clerſelier. Voyez des Cartes.
M. Tullius Cicero, Epiſtolæ ad Atticum, 666.
J. Collins et *alii*, Commercium epiſtolicum de analyſi promota, 1712 & 1722, **13**.
„ „ „ „ „ „ „ (éd. *Biot* et *Lefort*), 1856, **13**.
J. Colſon. Voyez I. Newton.
P. van Dam, Beſchrijvinge van de Oost-Indiſche Compagnie (1701) (éd. *Stapel*), 1927—1929, **510**.
J. Davis, The ſeamans ſecrets, 1594 & 1607, **371**, 372.
„ Voyages and works (éd. *Hakluyt Society*), 1880, **371**, 372.
J. B. J. Delambre, Hiſtoire de l'aſtronomie moderne, 1821, 635.
W. Derham, The artificial clockmaker, 1696, 606.
R. Deſcartes. Voyez Cartes, des.
A. Dettonville. Voyez Blaiſe Paſcal.
H. Dircks, The life, times and ſcientific labours of the ſecond marquis of Worceſter, to which is added a reprint of his Century of Inventions 1683, etc., 1865, **174**.
H. Doncker, Zee-atlas, 1663 et 1665, 634.
J. Drummond Robertſon, The evolution of clockwork, 1931, 17, 60—63, 505, 520, 523, 606, 699.
P. Duhem, Etudes ſur Léonard da Vinci, ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu, 1906, **54**.
„ Les origines de la statique, 1905, **170**.
A. Einſtein, Mein Weltbild, 1934, **660**.
P. P. Elvius, Theorema de oſcillationibus pendulorum, 1734, **387**.
Euclides, Elementa, 151, 284, 285, 292, 293, 300—303, 308, 663.
„ Voyez V. Viviani.
L. Euler, De motu tautochrono pendulorum compoſitorum. 1750, **46**, 428.
„ Inveſtigatio curvarum quæ evolutæ ſui ſimiles producunt, 1740, **41**.
„ Inveſtigatio curvarum quæ ſimiles ſint ſuis evolutis vel primis, vel ſecundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cuiuscunque, 1787, **41**.
H. Fabry, Dialogi phyſici, 1669, 446, 665.
„ Philoſophia univerſa per propoſitiones digeſta et in breve compendium redacta, 1646, **53**.
„ Synopſis optica, 1667, 663.
„ Voyez P. Mousnerius.
N. Fatio de Duillier, Pièce ſur les dents des roues, 1686, **610**.
J. Fermat, Oeuvres (éd. *Tannery* et *Henry*), 1891—1896, 451, **511**.
„ Supplément aux Oeuvres (éd. *C. de Waard*), 1922, **530**.
G. Galilei, Diſcorſi e dimoſtrationi matematiche intorno a due nuove ſcienze, 1638, 136, 141, 442.
„ Opere, 1656, 442.
„ Opere (éd. *E. Albèri*), 1842—1856, 62.
„ Opere (Edizione Nazionale), 1890—1909, 61, 62, 136, 141, 172, 173, 184, 185.
„ Voyez M. Merſenne.
„ Voyez V. Viviani.
Gallon, Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences, 1735, 546, 547.
R. T. Gould, The marine chronometer, its hiſtory and development, 1923, 16, 17, 521, 547, 560, 667.

J. de Graaf, Journal (manuſcrit), 1687, 514, 544, **636**, 637—640, 650.
„ Journal (manuſcrit perdu), 1690—1692, 515, 642—651.
G. Graham, Lettre à H. Sully, 1724, 547, 548.
Gravesande (G. J. 's), Phyſices elementa mathemathica experimentis confirmata, (3ième édition), 1742, **485**.
J. Gregory, Optica promota, 1663, 663.
J. Guiffrey, Comptes des bâtiments du Roi (1664—1687), 1881, **505**, 633.
R. Th. Gunther, Early ſcience in Oxford, 1923, **371**.
Hamel (J. B. du), Regiæ ſcientiarum academiæ hiſtoria, 1701, **443**, 505, 602.
A. Heckſcher. Voyez Chr. Huygens.
Th. Helder, Journal (manuſcrit), 1686, 544, **636**, 637, 639.
Ch. Henry, Huygens et Roberval, documents nouveaux, 1879, **442**, 443.
J. Hermann, Travail inédit ſur les développées, 41.
J. van Heuraet, Epiſtola de transmutatione curvarum linearum in rectas, 1659, 208, 209.
J. Hevelius, Machina coeleſtis, 1673—1679, 629.
Ph. de la Hire, Traité des épicycloïdes & de leurs uſages dans les mécaniques, 1695, 602, 603, 610, 611, 614.
Homère, l'Iliade, 503.
S. P. l'Honoré Naber, Reizen van W. Barents, J. v. Heemskerck, J. Cz. Rijp e.a., 1917, **653**.
R. Hooke, De potentia reſtitutiva, or offspring explaining the power of ſpringing bodies etc., 1678, 502.
Q. Horatius Flaccus, Saturæ, 666.
P. Horrebow, Baſis aſtronomiæ, 1735, 505, **600**.
Hôpital (G. F. A. marquis de l'), Litteræ ad D.um Hugenium, in quibus contendit, ſe regulam hujus autoris de centro oſcillationis penduli compoſiti demonſtrare par cauſam phyſicam, & reſpondere ſimul D.no Bernoulli, 1690, 458, 461, 463.
A. Hulshof, Een Duitſch econoom in en over ons land omſtreeks 1670, 1910. **702**.
Chr. Huygens, Anecdota, 655—668, 700.
„ Balancier de montre reglé par un reſſort, 522.
„ Brevis aſſertio ſyſtematis Saturnii, 446.
„ Chartæ mathematicæ, 13, 400, 438.
„ Commentarii de formandis poliendisque vitris ad teleſcopia, 664.
„ De circuli magnitudine inventa, 30, 106, 107.
„ De coronis et parheliis, 663.
„ De iis quæ liquido ſupernatant, 481, 657, 663.
„ Démonſtration de l'équilibre de la balance, 412.
„ Démonſtration de la juſteſſe du niveau, 664.
„ De motu corporum ex percuſſione, 38, 447, 664.
„ De Saturni luna, 665.
„ De vi centrifuga (manuſcrit), 37, 360, 361, 665.
„ Die Pendeluhr (traduction de l'Horologium oſcillatorium par *A. Heckſcher* et *A. von Oettingen*), 1913, **14**, 226, 301.

Chr. Huygens, Dioptrica, 37, 43, 657, 663.
„ Discours de la cause de la pesanteur, 45, 636.
„ Excerpta ex litteris ad auctores Diarii Parisiensis, quæ continent responsionem ad exceptionem D.ni Abbatis Catelani de centro oscillationis, 457.
„ Excerpta ex litteris, quibus respondet observationi Abbatis Catelani in 4um propositionem tractatus de centris oscillationis, 457.
„ Extrait d'une lettre sur les règles du mouvement dans la rencontre des corps, 458, 657, 664.
„ Horologium, 60, 64, 86, 87, 90, 91, 601, 657, 702.
„ Horologium oscillatorium, 14, 16, 18, 19, 27—438, 439—466, 470, 476, 482, 484, 489, 491, 492, 495, 501, 512, 521, 601, 634, 635, 657, 667, 668, 699.
Traduction française de la Pars I, 92.
Traduction allemande, voyez „Die Pendeluhr".
„ Instruction pour de Graaf et Helder, 17, 373, 513, 539, 637, 639, 642, 643, 645, 648.
„ Journal de voyage 1660—1661 (manuscrit), 3, 4, 54, 503, 698.
„ Journal de voyage 1660—1661 (éd. *H. L. Brugmans*), 1935, 3, **698**.
„ Journal de voyage 1663 (manuscrit), 3, 472.
„ Journal de voyage 1663 (éd. *H. L. Brugmans*), 1935, 3, **698**.
„ Kort Onderwijs aengaende het gebruyck der horologien tot het vinden der lenghten van Oost en West, 17, 22, 52, 370, 371, 539.
„ Κοσμοθέωρος, 31, 658.
„ Lettre à J. Gallois sur le ressort spiral régulateur du balancier des montres, 502, 522.
„ Manuscrit 13, 220, 395, 397. Manuscrit 15, 701.
„ Manuscrit B, 3, 37, 49, 413—416.
„ Manuscrit C, 3, 9—11, 49, 91, 369, 411, 437, 473, 481.
„ Manuscrit D, 12—14, 21, 24, 49, 370, 373, 376, 388, 390, 394, 414, 419, 427, 429, 430, 442, 451, 489, 607.
„ Manuscrit E, 45, 399, 400, 402, 403, 405, 441, 475, 489, 496, 513, 522, 525, 605, 607, 611.
„ Manuscrit F, 17, 31, 32, 371, 373, 509, 513, 525, 527, 533, 536, 543, 612, 614, 621, 623, 627, 633—636, 641, 651, 666, 702.
„ Manuscrit G, 376, 379, 406, 515, 516, 537.
„ Manuscrit H, 406, 407, 433, 476, 519, 546, 549, 562, 570, 577, 578, 581.
„ Manuscrit I, 379, 570, 592, 701.
„ Manuscrits sur la relativité du mouvement, 657, 665.
„ Nouvelle invention d'un niveau à lunette, 664.
„ Observationes in litteras præcedentes [Marchionis de l'Hôpital] & in relationem D.ni Bernoulli, 458.
„ Opera (éd. *'s Gravesande*), 7, 67, 93, 122, 220, 235, 308, 457, 521, 658.
„ Opuscula postuma (éd. *de Volder* et *Fullenius*), 663, 664.
„ Physica varia, 25.

Chr. Huygens, Pièce ſur la voix humaine, 3.
„ Rapport de 1688 aux Directeurs de la C.ie des Indes Orientales, 639—642, 652, 667.
„ Relation d'une obſervation faite à la Bibliothèque du Roi, 663.
„ Solutio problematis funicularii, 43.
„ Syſtema Saturnium, 657, 665.
„ Traité de la lumière, 487.
„ Traité de vi centrifuga, 44, 45, 592, 659; Traduction allemande, 659.
„ Varia, 7.
„ Voyez Ch. Henry.
„ Voyez J. A. Vollgraff.
„ Voyez P. J. Uylenbroek.
Conſtantijn Huygens, Brieſwiſſeling (éd. *J. A. Worp*), 1911, **505**.
F. M. Jaeger, Over Johan Joachim Becher en zijne relaties met de Nederlanden, 1919, **702**.
J. Kepler, Ad Vitellionem paralipomena, 1604, 42.
A. C. de Kock, De uitvinding van het ſlingeruurwerk, 1933, **699**.
G. W. Krafft, De lineis curvis quæ evolutæ ipſæ ſe generant, 1727, **41**, 400.
J. L. Lagrange, Mécanique analytique, 1788, 442, 445, 458, 464, 470.
A. Lalovera, Veterum geometria promota in ſeptem de cycloïde libris, 1660, 511.
E. Laviſſe et *A. Rambaud*, Hiſtoire générale du IVe ſiècle à nos jours, 1924, 35, 443.
G. G. Leibniz, Diſpute avec S. Clarke (publication de Des Maizeaux, 1740), 660.
„ Extrait d'une lettre de Mr. Leibniz à l'Auteur du Journal touchant le principe de juſteſſe des horloges portatives de ſon invention, 1675, 523.
„ Generalia de natura linearum, anguloque contactus et oſculi, 1692, **42**.
„ Meditatio nova de natura anguli contactus et oſculi, 1686, **42**.
„ Remarques ſur le diſcours de Mr. H[enry] S[ully] touchant la manière de gouverner les horloges à pendule et les montres à ſpirale, 1715 (?), **503**, 508, 519, 523, 525, 599, 600, 604, 699, 700.
G. G. Leibniz et *Joh. Bernoulli*, Commercium philoſophicum et mathematicum I (1694—1699), 1745, **602**, 603.
J. van Lennep, Zeemans-woordenboek, 1856, 649, **652**.
J. Locke, An eſſay concerning the human underſtanding, 1690, 660, 661.
G. Loria, Spezielle algebraiſche und tranſcendente ebene Kurven (traduction de l'italien de F. Schütte), 1902, 603, 608.
C. Malvaſia, Ephemerides noviſſimæ motuum cœleſtium, 1662, 91.
F. Marguet, Hiſtoire générale de la navigation du XVe au XXe ſiècle, 1931, 518, 520, 522, **546**, 547.
E. Mariotte, Oeuvres, 1717, **482**.
„ Traité de la percuſſion ou choc des corps, 1673, 482.
M. Merſenne, Cogitata phyſico-mathematica, 1644, 101.
„ Correſpondance I (éd. *Mme P. Tannery* et *C. de Waard*), 1932/1933, 41, **52**, 53, 203.
„ Harmonie univerſelle, 1627, 486.
„ Harmonicorum libri, 1636 et 1648, **486**.

M. Merſenne, Les nouvelles penſées de Galilei, 1639, 668.
„ Les méchaniques de Galilée, 1634, 141.
„ Novarum obſervationum phys. math. T. III, 1647, 445, 446.
„ Univerſæ geometriæ mixtæque mathematicæ synopſis, 1644, 41.
P. C. Molhuyſen, Bronnen tot de geſchiedenis der Leidſche Univerſiteit [1572—1811], 1913—1924, 19, **519**.
G. Ubaldi del Monte, Mechanicorum liber, 1577, 54.
P. Mouſnerius, Tractatus phyſicus de motu locali etc., cuncta excerpta ex prælectionibus P. P. Honorati Fabry S. J., 1646, **53**, 54—58, 443—447.
G. Mouton, Obſervationes diametrorum ſolis et lunæ apparentium, etc. 1670, **59**, 353.
I. Newton, Lectiones opticæ in Academia Cantabrigienſi annis 1669, 1670 & 1671 in ſcholis publicis habitæ, 1729, **44**.
„ Method of fluxions and infinite ſeries with application to the geometry of curved lines (traduit du latin) (éd. J. Colſon), 1736, 43.
„ Methodus fluxionum et ſerierum infinitarum, 1744, **43**.
„ Opuſcula mathematica, philoſophica et philologica (éd. *J. Caſtillioneus*), 1744, **43**, 44.
„ Philoſophiæ naturalis principia mathematica, 1687, 45, 400, 484—486, 554, 636, 659.
„ Tractatus de quadratura curvarum, 1704, 387.
L. M. L. Nix, Das fünfte Buch der Conica des Apollonios van Perga in der arabiſchen Ueberſetzung des Thabit ibn Corrah, 1889, **394**.
E. Noel, Oeuvres, 1646 et 1658, 53.
A. von Oettingen. Voyez Chr. Huygens.
Pappos, Συναγωγή, 49, 276.
I. G. Pardies, La ſtatique ou ſcience des forces nouvantes, 1673, 487, 488.
Bl. Paſcal, Hiſtoire de la roulette, 1658, 203.
„ Lettre de A. Dettonville à M. Huygens de Zulichem, 1659, 203.
„ Oeuvres (éd. *Brunſchvicg*, *Boutroux* et *Gazier*), 1914, 511.
J. Picard, Meſure de la terre, 1671, **25**.
Voyage d'Uranibourg, 1671, **18**, 25.
Platon, Θεαίτητος, 658.
„ Πολιτεία, 31.
W. Ploeg, Conſtantijn Huygens en de natuurwetenſchappen, 1934, **516**.
Cl. Ptolemæus, Harmonika (éd. *J. Wallis*), 1682 et 1699, 486.
„ „ (éd. *I. Düring*), 1930, 486.
A. Rambaud. Voyez E. Laviſſe.
G. B. Riccioli, Geographiæ et hydrographiæ reformatæ libri XII, 1661, **653**.
J. Richer, Obſervations aſtronomiques et phyſiques faites [en 1672-1673] en l'iſle de Caïenne, 1679, 636.
„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1729, **18**, 636.
G. P. de Roberval, Diſcours (perdu) à l'Académie des Sciences ſur les centres de percuſſion, 1671 (?), 443, 455.

G. P. de Roberval, Obſervations ſur la compoſition du mouvement, et ſur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes, 1693, **453**, 454.
„ Propoſition qui ſert à trouver le centre de gravité (manuſcrit), **451**.
„ Theorema lemmaticum ad invenienda centra gravitatis mire inſerviens, 1645, (manuſcrit), **451**.
„ Traité de mécanique (manuſcrit perdu), 442, 447.
„ Traité des pendules iſochrones (manuſcrit perdu), 55, 443.
„ Voyez Ch. Henry.
„ Voyez C. de Waard.
O. Roemer, Diſcours (perdu) ſur la forme épicycloïdale des dents des roues, 1675, 602.
„ Triduum obſervationum Tuſculanarum, 1735, 600.
H. D. J. van Schevichaven, De St. Stephenskerk te Nijmegen, 1900, **602**.
„ Penſchetſen van Nijmegens verleden, 1898, **602**.
F. van Schooten, In Geometriam Renati des Cartes Commentarii, 1649 et 1659, 52, 209, 389, 393, 401, 402, **407**.
„ Exercitationes mathematicæ, 1656, 408.
F. Schuh, Sur quelques formules approximatives pour la circonférence du cercle et ſur la cyclométrie de Huygens, 1914, **39**, 40.
W. Shakeſpeare, Hamlet, prince of Denmark, 31.
W. Snellius, Tiphys Batavus, 1624, 648.
E. Somerſet. Voyez Worceſter.
S. Stevin, Beghinſelen der Weeghconſt, 1586, 476.
H. Sully, Abrégé de quelques règles pour faire un bon uſage des montres, 1711, 520, **701**.
„ Deſcription abrégée d'une horloge d'une nouvelle invention, 1726, **520**, 522, 547.
„ Lettre à G. Graham, 1724, 548, 549.
„ Règle artificielle du temps etc., 1717, **503**, 519, 599.
J. H. van Swinden, Verhandeling over Huygens als uitvinder der ſlingeruurwerken, 1817, 702.
P. Tannery, Les ſciences en Europe, 1924, **36**, **443**.
„ Paſcal et Laloubère, 1890, **511**.
Thabit ibn Corrab. Voyez L. M. L. Nix.
E. Torricelli, Trattato del moto dei gravi, 1641, 442.
„ Voyez Viviani.
G. Ubaldi. Voyez del Monte.
P. J. Uylenbroek, Chr. Hugenii aliorumque ſeculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philoſophicæ, 1833, **400**, 520.
G. Vallerius, Obſervatio et experimentum de funependulorum vibrationibus, 1731, **387**.
Vallius. Voyez van der Walle.
G. de Veer, Waerachtighe Beſchrijvinghe van drie Seylagien etc., 1605, **653**.
Veltman, Handſchriftliche Aufzeichnungen über einige alte jetzt verſchwundene Uhrwercke der Stadt Osnabrück, 1890, **66**.
E. Verwijs & J. Verdam, Middelnederlandſch woordenboek, 1916, 652.

L. da Vinci, Manuſcrits, 54, 60, 66.
P. Virgilius Maro, Eclogæ, 30.
P. Virgilius Maro, L'Enéïde, 83, 505.
N. Viſcher, Atlas contractus orbis terrarum, 1671, **634**.
V. Viviani, Lettre au prince Leopoldo de Medicis, 1659, 60, **61**, 62—65, 699.
„ Quinto libro degli Elementi d'Euclide etc. Aggiuntevi coſe varie, e del Galileo, e del Torricelli, 1674, **441**.
J. A. Vollgraff, Chr. Huygens, eenige citaten en beſchouwingen naar aanleiding van den driehonderdſten gedenkdag zijner geboorte, 1929, **4**.
„ Chr. Huygens en het ankerechappement, 1934, **606**.
„ Chr. Huygens et Jean le Rond d'Alembert, 1915, **442**.
„ De relativiteit der beweging volgens Chr. Huygens, 1934, **659**.
„ De rol van den Nederlander Caſpar Calthoff bij de uitvinding van het moderne stoomwerktuig, 1932, 474.
„ Heeft prins Leopoldo gezegd dat in 1656 te Florence een ſlingeruurwerk is geconſtrueerd? 1934, **699**.
„ Heeft Vincenzio Galilei op zijn ſterfdag zijn uurwerken vernield? 1934, **699**.
Voltaire, Siècle de Louis XIV, 1751, 30.
De la Voye, Journal de 1669 (manuſcrit perdu), 373, 633—635.
C. de Waard, Note ſur la vie de Merſenne, 1932, **204**, 243.
„ Une lettre inédite de Roberval du 6 janvier 1637 contenant le premier énoncé de la cycloïde, 1921, **204**.
A. ou H. van der Walle, Daphnis ecloga ad Chr. Hugenium Zulichemium, 1665, **30**, **34**.
J. Wallis, Arithmetica infinitorum, 1656, 211.
„ Lettre à Leibniz, 1696, **211**.
„ Mechanica ſive de motu, 1671, 58.
„ Opera mathematica, 1699, **211**.
„ Tractatus duo, prior de cycloide, poſterior de ciſſoide, 1659, **154**, 202, 203, 210, 211.
W. à Winſchooten, Seeman, 1681, **652**.
F. de Wit, Atlas, 634.
„ Caert van Europa, 1672, 634, **702**.
R. Wolff, Handbuch der Aſtronomie, 1892, **51**.
Worceſter (*Marquis of*), Century of Inventions, 1663, **473**, **474**.
„ Voyez H. Dircks.

Acta eruditorum, 1682, 41, 400.
„ 1686, 42.
„ 1691, 43, 458, 464.
„ 1692, 40, 42.
„ 1694, 227.

Acta literaria et ſcientiarum Sueciæ, 1731 et 1734, 387.
Actes des Etats de Hollande et de la Friſe occidentale, 1657 et 1658, 90, 91.
Archives néerlandaiſes des ſciences exactes et naturelles, Série III A, T. III, 1914, 40.
Aſtronomical papers for the uſe of the American ephemeris and nautical almanac, 1898, 51.
Bulletin des ſciences mathématiques, 1921, 204.
Catalogue de la bibliothèque de A. van der Walle, 1684, 698.
Catalogue de la Bibliothèque Nationale à Paris, 459.
Chriſtiaan Huygens, revue, 1929, 3.
Commentarii Academiæ Scientiarum Imp. Petrop. 1727 et 1740, 41.
Divers ouvrages de mathématique et de phyſique, par Meſſieurs de l'Académie Royale des Sciences, 1693, 412, 454, 529.
Economiſch-hiſtoriſch Jaarboek, 702.
Hemel en Dampkring, revue, 1933 et 1934, 606, 659, 699.
Hiſtoire de l'Académie des Sciences de Paris, 1703, 458.
Janus, archives internationales pour l'hiſtoire de la médecine etc., 1915, 442.
Journal des Sçavans, 1654, 457.
„ 1669, 664.
„ 1675, 522, 523,
„ 1680, 664.
Journal des Savants, 1858, 61.
Journal des Sçavans, contrefaçon d'Amſterdam, 1675, 502, 522, 523.
„ „ „ 1682 et 1683, 549.
L'horloger, revue générale, 1922 et 1923, 92.
Manuſcrits Conſtantijn Huygens N° 47, 516.
Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 juſqu'à 1699, 1729, 18, 19, 25, 636.
Memorie raeckende de verblijven van de Heer Chriſtiaen Huygens in Engelandt, 7.
Middel om het Ooſt en Weſt te vinden (manuſcrit) 516.
Mitteilungen des hiſtoriſchen Vereins zu Osnabrück, 1890, 66.
Nova Acta Academiæ Scientiarum Imp. Petrop. 1787, 41.
Novelle Fiorentine, 1774, 699.
Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Imp. Petrop. 1750 et 1751, 46.
Onze Eeuw, revue, 702.
Oſtwalds Klaſſiker der exacten Wiſſenſchaften N° 192, 1913, 44, 301; N° 138, 1903, 659.
Philoſophical Transactions, 1713, 485.
Regiſtres de l'Académie (françaiſe) des Sciences, 40, 45.
Reſolutiën van de Bewindhebbers van de Ooſt-Indiſche Compagnie ter Camer tot Amſterdam, 509, 510, 526, 533—535, 539, 544.
Réſolutions des Curateurs de l'Univerſité de Leiden, 19.
Rijks geſchiedkundige publicatiën, 510.
Saggi di naturali eſperienze fatte nell' Accademia del Cimento, 1667, 60, 666.

IV. MATIÈRES TRAITÉES.

Comme dans le T. XVII, nous ne donnons pas de table alphabétique de toutes les matières traitées. Elle ferait double emploi avec la liſte des Pièces et Mémoires. Nous nous bornons à mentionner certains ſujets qu'on ne trouve pas, ou pas en détails, dans cette liſte.

Nous avons de nouveau relié entre elles, autant que poſſible, les notes qui traitent d'un même ſujet. Parfois — p.e. dans la note 6 de la p. 17 — nous renvoyons le lecteur aux Additions et Corrections. Dans quelques autres cas — p.e. dans celui de la note 1 de la p. 477 — on y trouve la page à laquelle la note fait alluſion, ſans que celle-ci renvoye expreſſément aux Additions.

Il n'entre pas dans nos habitudes d'exprimer à la fin d'un Tome des remercîments aux bibliothécaires, archiviſtes et autres perſonnes qui ont eu l'amabilité de nous aider [1]. Il eſt vrai que nous mentionnons parfois un collaborateur dans le texte — Monſ. P. P. Bruna à la p. 51 — et que nous indiquons parfois dans une note — note 5 de la p. 4, note 2 de la p. 400 — de qui nous tenons un renſeignement. De même nous aurions pu dire p.e. que la Requête de la p. 20 nous a été ſignalée par Monſ. H. L. Brugmans et que nous devons les données ſur I. Thuret — note 9 de la p. 505 — à Monſ. J. M. Faddegon, bibliothécaire de l'Union centrale des arts décoratifs à Paris.

Les chiffres indiquent les pages de ce Volume.

Arcs cycloïdaux du pendule. 16—18, 21, 24, 25, 32, 42, 46, 88—91, 100—107, 120—123, 202, 203, 346—349, 428, 433, 434, 501, 502, 509, 514, 518, 587, 600.

Auteurs sur l'histoire de l'horlogerie. Albèri, Auteur inconnu. 516, Baſſermann-Jordan, Becher, Berthoud, Biot, Bodeker, du Bois, Britten, Derham, Drummond Robertſon, Gould, Horrebow, de Kock, Leibniz, Magalotti, Malvaſia, Marguet, Reverchon, van Swinden, Veltman, Viviani, Vollgraff.

Cartographie. 634, 640, 641, 642, 646, 647, 652, 653.

Centre de percussion. 53—58, 443—447, 482.

---

[1] Exceptionnellement nous avons exprimé des remercîments à Mons. J. Drummond Robertson — voir aussi la p. 61 du présent Tome —, ainsi qu'à Mons. H. L. Brugmans et à M. le Directeur de la Bibliothèque Nationale à Paris, dans les Additions et Corrections du T. XVII (p. 546, 547 et 550).

CHUTE DES CORPS GRAVES. 124—159, 354—359, 657, 668.

CORDES VIBRANTES. 486, 487, 489—495, 501, 502.

COURBES. Chaînette, 43; courbe logarithmique, 410; cycloïde, 86—89, 102—107, 166—187, 198—205, 210, 211, 391—394, 402, 405, 667; développante de cercle *(ou „hélicoïde")*, 517, 520, 562—567, 576—591; ellipse, parabole, hyperbole et leurs développées, paraboles et hyperboles de degrés supérieurs *(ou „paraboloïdes" et „hyperboloïdes")*, 42, 206—211, 219—225, 232—241, 362, 363, 377, 395, 396, 527, 528; épi- et hypocycloïdes *(ou „épicycloïdes extérieures et intérieures")*, 40, 41, 399, 405, 484, 597, 602, 603, 607—616; folium Cartesii, 406—409, ligne cyclocylindrique, 511, 527—531; loxodrome, 648; paracycloïde, 432; sinusoïde, 494, 511, 528—530; spirale logarithmique, 40, 41.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT POUR LES CORPS TOURNANT AUTOUR D'UN AXE. 502, 512, 531, 532, 567, 568.

EXPERIENTIA AC RATIO. 31.

HISTOIRE DE LA NAVIGATION. 546, 652, 653.

HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE. 30, 34, 35, 78, 79, 83, 600—603, 635, 636, 652, 658—660.

HORLOGERS, OU PERSONNES S'INTÉRESSANT SPÉCIALEMENT AUX HORLOGES, AVEC QUI HUYGENS A ÉTÉ EN RELATION. Bruce, van Call, van Ceulen, van der Cloesen, Coster, Douw, van der Dussen, Fromanteel, Gouffier (duc de Roanais), de Graaf, de Hautefeuille, Helder, Hevelius, de la Hire, Holmes, Hooke, van Laer, Leibniz, Martinot, Mercator, Meybosch, Mouton, Oosterwijck, Bl. Pascal, Cl. Pascal, Richer, Roemer, du Seuil (?), Thuret, Visbach, de la Voye. AUTRES HORLOGERS ETC. Balestri, Burgi, Camerini, Clement, Generini, Galilée (père et fils), Graham, Gretton, Harrison, Horlogers anglais et français du dix-huitième siècle, Rijnaerts *(note 1 de la p. 675)*, Sully, Tracy, M. Treffler, Ph. Treffler, da Vinci, Weber.

HORLOGES *(consultez sur les horloges transformées par van Call, sur les horloges de van Ceulen, de van der Cloesen etc. les pages indiquées dans la liste des „Personnes et Institutions mentionnées")*. Horloge astronomique de 1657, 17, 566; horloges à deux balanciers, 507, 522, 523, 525, 701; horloges à équation, 519; horloges à pendule de 12 pieds, 509; horloges astronomiques à Copenhague, 18, 600—602; horloge de la cathédrale d'Arnhem, 66, 602; horloges marines modernes, 505, 513; importance des détails dans la construction d'horloges exactes, 517; œufs de Nuremberg, 513.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR LA LONGUEUR ET LA PÉRIODE DU PENDULE. 18, 25, 652; sur la période de vibration des ressorts, 507, 508, 515, 527, 650, 651, 668; sur la période des balanciers, 521. AUTRES INCONVÉNIENTS DES RESSORTS. 638, 649—651.

INFLUENCE DES PENSEURS GRECS ET DES TRADUCTEURS ARABES SUR LES OCCIDENTAUX. 41, 393, 394 *(voir aussi Archimède, Aristote, Euclide, Eudoxe, Pappos, Platon, Ptolémée, Pythagore et Théophraste)*.

INTUITION. 31, 568.

LOGIQUE. 455, 456.

MACHINE À VAPEUR. 474.

MATIÈRE SUBTILE, MATIÈRE MAGNÉTIQUE, ÉTHER, TOURBILLONS. 45, 46, 82, 453, 470, 488, 497.

MÉCANIQUE CLASSIQUE DU DIX-HUITIÈME SIÈCLE. 471.

MÉTAPHYSIQUE. 472.

NÉCESSITÉ D'UNE FORCE EXTÉRIEURE, SUIVANT LES PÉRIPATÉTICIENS, POUR MAINTENIR UN MOUVEMENT UNIFORME DANS UNE DIRECTION DONNÉE. 454, 483.

PHYSIQUE PARTIE DE LA PHILOSOPHIE. 481, 482.

PLANÉTAIRES: d'Archimède, 599; de Huygens, 508, 513; de Roemer, 505, 599; de Tracy, 517.

POIDS ET MASSE. 45, 498, 578, 579.

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT DANS UNE DIRECTION DONNÉE. 471.

PRINCIPE QUE PAR LE MOUVEMENT SPONTANÉ D'UN GROUPE DE CORPS PARTANT DU REPOS LEUR CENTRE COMMUN DE GRAVITÉ NE PEUT PAS S'ÉLEVER À UNE HAUTEUR SUPÉRIEURE À CELLE QU'IL AVAIT AU COMMENCEMENT. 39, 246—251, 411, 451, 460, 464, 466.

PRINCIPE DE LA NON-EXISTENCE DU MOUVEMENT PERPÉTUEL. 250, 251, 412, 460, 461, 470—476.

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DES FORCES. 251, 469, 471, 472, 477, 494, 495, 518, 519, 554—556, 568, 578, 579, 583, 660.

PRINCIPE DE LA NON-EXISTENCE DU MOUVEMENT ABSOLU (OU MOUVEMENT PAR RAPPORT À UN ESPACE ABSOLU). 657—660.

PRINCIPE DE LA RELATIVITÉ POUR LES MOUVEMENTS UNIFORMES DANS UNE DIRECTION DONNÉE. 124, 659. EXTENSION DE CE PRINCIPE AUX MOUVEMENTS ACCÉLÉRÉS. 518, 560, 659, 660.

QUADRATURE DE LA SURFACE DES ELLIPSOÏDES, PARABOLOÏDES ET HYPERBOLOÏDES DE RÉVOLUTION (OU „SPHÉROÏDES", „CONOÏDES PARABOLIQUES" ET „CONOÏDES HYPERBOLIQUES"). 210—219, 397, 398.

QUESTIONS DE PRIORITÉ *(voir aussi la Pièce „Anecdota")*. Calcul du rapport 1,80 . . . des périodes d'un pendule simple exécutant une oscillation de 180° et de ce même pendule exécutant une très petite oscillation, 383—387; courbe régulatrice, servant à assurer l'isochronisme des oscillations d'un balancier, 520; double balancier, 522, 523, 525, 701; échappement à ancre, 606; forme épicycloïdale des dents pour les roues planes, 602, 603; horloge à équation, 519; horloge à pendule, 30, 59—66, 88—91, 600—602, 666—668, 702; horloge à pendule conique, 66, 438, 699, 700; loi de Hooke, 502; mesure universelle, 58, 59 [1]); rayon de courbure, 41—44, 391—393; rectification d'une courbe algébrique, 208—211; ressort spiral régulateur du balancier, 503—505, 668; rouleaux servant à diminuer les frottements sur les axes, 546—549; théorie de l'épicycloïde, 41, 400, 603; théorie des vibrations harmoniques et des vibrations des cordes, 479, 483—488, 548, 586, 700.

RIGUEUR DES DÉMONSTRATIONS. 37, 38, 42, 50, 326, 464, 563.

ROTATION JOURNALIÈRE DE LA TERRE. 31, 514, 641, 644, 650, 658.

THÉORIE DE LA CONNAISSANCE. 38, 503, 660—661.

[1]) Voir aussi à ce sujet la note 1 de la p. 349.

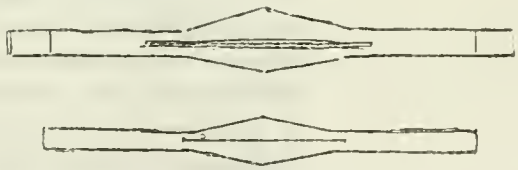
ADDITIONS ET CORRECTIONS.

Page	*Au lieu de*	*lifez*
3 *note* 2	Au moment de l'apparition de ce Tome (décembre 1934) la publication des Journaux de Voyage de Huygens par Monf. H. L. Brugmans n'a pas encore eu lieu. Son travail (thèfe de doctorat) paraîtra à Paris au commencement de 1935. Nous en donnons le titre complet à la p. 686.	
4 *note* 5	Le travail (thèfe de doctorat) de Monf. Harcourt Brown, intitulé „Scientific Organizations in Seventeenth Century France (1620—1680)" (Baltimore, the Williams & Wilkins C.) a paru en mars 1934. Le Ch. V („The Montmor Academy and England") contient plufieurs paffages inédits du Journal de Voyage de 1660—1661 de Huygens.	
7 *note* 3	D'après van Swinden (ouvrage cité à la p. 692) le „membre de la famille" eft A. J. Royer (comparez fur lui la p. 519).	
12 *note* 3	note 3 de la p. 14	note 4 de la p. 122
17 „ 2	Voir fur la réintroduction de la fufée dans les horloges marines la p. 513, ainfi que les notes 8 et 11 de la p. 533. À la p. 542 (l. 6) nous avons traduit „dubbele ontfluijtingh" par „double déclenchement".	
17 *note* 5	Voir fur les horloges marines de Sully la p. 520 qui fuit.	
„ „ 6	Le fil de foie rouge eft mentionné dans la première note de la p. 544.	
19 *ligne* 7 et fuiv.	Voir auffi fur l'horloge aftronomique de Leiden, la note 6 de la p. 601 et le premier alinéa de la p. 602.	
21 *note* 2	Confultez encore fur le rapport de de la Voye les p. 633—635.	
30 „ 2	Adrianus, ou Hadrianus, van der Walle fut infcrit comme étudiant en droit à Leiden en 1641. „Mr. Adriaan van der Wal" fut enterré à Delft dans la vieille églife réformée le 25 mars 1684. Sa bibliothèque, que Huygens, au début de fon Journal de Voyage de 1660—1661, dit avoir vifitée à Delft, fut vendue publiquement à Leiden le 23 octobre 1684 et jours fuivants chez P. vander Meerfche. Cette vente eft mentionnée dans notre T. VIII aux p. 543, 549 et 552; la p. 604 du T. VIII parle toutefois par erreur d'*Antonius* van der Wall. Le catalogue de la vente appelle Adr. v. d. Walle „juris utriusque doctor". La bibliothèque contenait 467 libros juridicos, 950 libros	

Page	*Au lieu de*	*lifez*
	mathematicos, cosmographicos, geographicos et topographicos, 689 libros medicos, 1284 libros theologicos et 3848 libros miscellaneos. Voir auſſi ſur v. d. Walle la p. 591 du T. XIII.	
32 *note* 9	Huygens parle du modèle conſtruit pour van Ceulen a la p. 532, § 4.	
34 „ 2	quelque	quelques
41 *ligne* 7	nommée	nommé
„ *note* 8	Voir encore ſur Apollonios, Golius et Huygens la note 2 de la p. 393.	
59—66	Monſ. A. C. de Kock a publié en novembre et décembre 1933 dans la revue „Hemel en Dampkring" un article intitulé „De uitvinding van het ſlingeruurwerk", dans lequel il traite du livre de Monſ. Drummond Robertſon („The Evolution of Clockwork") de novembre 1931 et de la brochure (partie de notre T. XVII) de janvier 1932 „L'horloge à pendule de 1656 à 1666, rédigé par J. A. Vollgraff". Ceci nous a amenés à notre tour à écrire deux articles, publiés en janvier et février 1934 dans la même revue, intitulés: „Heeft Vincenzio Galilei op zijn ſterfdag zijne uurwerken vernield?" et „Heeft Prins Leopold gezegd dat in 1656 te Florence een ſlingeruurwerk is geconſtrueerd?" Comme l'Avertiſſement de l'„Horologium oſcillatorium" était déjà imprimé en ce temps, nous en avons cité dans ces articles quelques parties, ſavoir la note 2 de la p. 62, le deuxième alinéa de la p. 64 et le troiſième alinéa de la p. 65. M. Drummond Robertſon nous a fait ſavoir enſuite qu'il reconnaiſſait que ſa traduction, reproduite dans l'article de M. de Kock, d'un paſſage de la lettre de Viviani, traduction citée par nous dans le premier alinéa de la note 2 de la p. 62, eſt erronée.	
	Dans l'article de février, nous avons remarqué que d'après les „Novelle Fiorentine" de 1774, citées dans la note 1 de la p. 470 de notre T. III, il y avait à Florence un nommé *Marco* Treffler, horloger du grand-duc Ferdinand II, mais qu'il nous ſemble probable qu'il y a ici une erreur dans le prénom, puiſque les „Novelle Fiorentine" diſent emprunter cette nouvelle à la lettre non encore publiée de Viviani qui ne parle que de Philippe Treffler, horloger du grand-duc Léopold. Van Swinden dit que Treffler s'appelait Johannes Philippus, mais que d'autres l'appellent auſſi Johannes Marcus ou ſimplement Marcus.	
66	À propos des horloges à pendule conique, nous pouvons encore obſerver que Leibniz ne connaiſſait apparemment pas d'horloges publiques de ce genre: dans ſes Remarques de ± 1715 il écrit: „Il y a des Horloges à Pendule d'une eſpece toute particuliere, où le Poids vibrant ne va pas en allant et retournant, mais toujours d'un même	

Page	*Au lieu de*	*lifez*
	côté. Ces Horloges ont cela de particulier, qu'elles vont ſans bruit, et ont été recherchées quelquesfois par ceux, qui manquent de ſommeil et veulent avoir des Horloges dans leurs Chambres qui ne les empêchent pas de dormir. Mr. Huguens en a fait un diſcours, qui n'a pas été imprimé [?], où au lieu de Cycloide il a employé une eſpece de Solide parabolique pour en rendre les vibrations égales".	
84 *ligne* 2	par la grave de Dieu de Roy	par la grace de Dieu Roy
116 2me *alinéa*	Voir ſur deux autres voyages de de la Voye avec les horloges, non mentionnés ici, la p. 633.	
218 *ligne* 11	en autre	en outre
364 „ 21	la friction	le frottement
„ „ 22	petite qu'elle	petit qu'il
371 *note* 4	Les figures de Huygens (dernière ligne de la note) ſont celles des „Inſtruments nautiques" des p. 627—629.	
378 *note* 2 *ligne* 1	pas	par
384 „ 5 „ 16	l'à	l'a
„ „ „ „ 18	inſérieure	inférieure
386 *ligne* 4 *d'en bas*	$\frac{n}{n+1}\int^{1} \frac{y^{n-1}dy}{\sqrt{1-}}$	$\frac{n}{n+1}\int_{0}^{1} \frac{y^{n-1}dy}{\sqrt{1-y^2}}$
400 *notes ligne* 11	la note 000 de la p. 000	la note 4 de la p. 484
409 *ligne* 9	rectifianda	rectificanda
454 „ 1	Cum	Cur
455 „ 6	affaber	affabre
470 „ 4	queſton	queſtion
471 „ 9 *d'en bas*	déſigne	déſigne
474 „ 12	Rien indique	Rien n'indique
482 „ 2 *d'en bas*	précédent	précèdent
486 *notes ligne* 6	Dans ſes Remarques de ± 1715 Leibniz écrit, après avoir dit que Huygens dans ſon ouvrage de 1673 „rend raiſon de la Cycloide": „Mais il y auroit encore quelque choſe à dire de la Nature des Vibrations des Reſſorts, dont l'égalité eſt vérifiée par celle des Cordes touchées, qui rendent toujours le même ſon, quand elles ſont également tendues". Il ignorait ſans doute que Huygens s'était déjà occupé de ce ſujet.	
497 *ligne* 9	ſi	ſi
505 *note* 6	Après 1675 Huygens ne mentionne plus jamais Thuret en ſa qualité d'horloger (ſi ce n'eſt dans les „Anecdota", p. 668), mais il parle en 1678 (T. XIII, p. 704) de l'eau de poivre donnée par Thuret à Römer.	

Page	*Au lieu de*	*lifez*
513 *ligne* 7 *d'en bas*	des l'horloges	des horloges
515 *note* 6	La dernière page du Manuſcrit 15 porte une note, écrite au crayon, où Huygens parle de Willem van der Duſſen à Dordrecht. Nous ſaiſiſſons cette occaſion pour mentionner auſſi les horlogers Meyboſch et van Laer qui prirent part à l'expédition de 1690—1692 (voir ſur eux les T. IX et X).	
520 *ligne* 13	Le „British Muſeum" à Londres poſſède un exemplaire de l'ouvrage de 1711 de Sully. Il eſt intitulé: „Abrégé de quelques Regles pour faire un bon uſage des Montres, avec des Réflexions utiles ſur la maniere de les bien raccommoder, & ſur les abus qui s'y commettent. par Henry Sully, Horloger de Londres à Leide. Metior et Emendo [vignette]. Imprimé pour l'Auteur, à qui l'on peut s'addreſſer. A LEIDE 1711". Sully ne viſita donc pas ſeulement la Hollande; il s'y établit. Une fille de lui fut baptiſée à la Pieterskerk le 30 novembre 1710; la mère étant décédée, deux tuteurs furent nommés le 18 ſeptembre 1711 (archives communales de Leiden).	
522—523 *note* 2	Voir auſſi ſur des horloges à double balancier la p. 6 du T. XVII.	
525 *ligne* 3	troiſiéme	deuxiéme
537 *note* 1	de la p. 556	la p. 556
547 *ligne* 3	pendule [5]).	pendule [5])".
„ „ 5	s'il eſt ici vraiment original	ſi cette idée n'eſt venue qu'à lui
558 „ 19	qnod	quod
577 „ 14 *d'en bas*	queſton	queſtion
593 „ 1 „ „	Nous publions ici deux petites figures de Huygens qui accompagnent la Fig. 94 dans le Manuſcrit I, quoique nous ignorions abſolument ſi elles ont quelque choſe à faire avec le „conusje" [petit cône] et le „langwerp" [pièce oblongue].	



600 *ligne* 3	(1655—1710)	(1644—1710)
607 „ 3 *d'en bas*	par	per
613 *note* 5 *ligne* 6	$\frac{AB}{MD}$	$\frac{AB}{M\Delta}$
616 *notes* „ 4	Fig. 11	Fig. 111
„ *note* 1 „ 2	p. 516	p. 615
634 „ 1	Dans le „Scheepvaartmuſeum" à Amſterdam il y a un grand globe	

Page	*Au lieu de*	*lifez*
	de W. J. Blaeu, œuvre poſthume qu'on juge dater de 1650 environ. La différence des longitudes de Toulon et de Candie y eſt de 24° ou un peu plus, ce qui s'accorde aſſez bien avec les 24°30′ de la p. 211 du Manuſcrit F. Huygens était en poſſeſſion d'un globe de Blaeu „de la nouvelle impreſſion" probablement depuis 1671 (T. VIII, p. 82).	
634 *note* 2	Le „Scheepvaartmuſeum" poſſède une fort belle carte de F. de Wit, datée 1672, et intitulée „Nova et accurata totius Europæ Tabula". La différence Toulon-Candie y eſt de 22°20′. C'eſt ſans doute la carte conſultée par Huygens qui donne 22°30′ pour la dite différence. On peut conſulter ſur F. de Wit la p. 67 du T. VI.	
635 *note* 7	à 4°36′	à 4°56′
642 *ligne* 23	où	ou
„ „ 24	Quoiqu'il	Quoi qu'il
658 *lignes* 3—5 *et* 12	En 1670 Huygens écrivait à J. de Witt (T. VII, p. 52): „Nec magis ex motibus ſupra Terra contingentibus colligere licet utrum immobilis ſit an moveatur diurno annuoque motu, etc."	
666 § 3	Ce paragraphe, ainſi que la remarque de Huygens qui conſtitue notre note 12, ont déjà été publiés par J. H. van Swinden — quelques mots ont été mal lus — dans ſon article de 1817 (ou plutôt de 1814): „Verhandeling over Huygens als uitvinder der ſlingeruurwerken" (voir la p. 13 du T. XVII).	
666 *ligne* 5 *d'en bas*	D'après van Swinden, qui a apparemment raiſon, le „Germanus" eſt J. J. Becher „qui ciniſlo vocatur quoniam Chemiæ operam dabat". Nous avons mentionné ſon livre aux p. 6—7 du T. XVII. Huygens avait connu Becher perſonnellement vers le temps où parut l'„Horologium". Il lui en avait fait parvenir un exemplaire (T. II, p. 209). Becher n'était pas ſeulement chimiſte, mais auſſi économiſte diſtingué. Voir p.e. A. Hulshof „Een Duitſch econoom in en over ons land omſtreeks 1670" (dans la revue „Onze Eeuw", Harlem, Bohn, 1910) et F. M. Jaeger „Over Johan Joachim Becher en zijne relaties met de Nederlanden" (dans le „Economiſch-hiſtoriſch Jaarboek", la Haye, Nijhoff, 1919).	
667 *note* 18	précédent	précèdent
681	Mercator (Nicolaus)	Mercator (Gerhard)
684	Willem III, Stadhouder, 523	522

SOMMAIRE.

Avertissement 3
L'horloge à pendule de 1666 à 1673 5
Horologium oscillatorium 27
Objections de Roberval et réponses de Huygens 439
Controversia ulterior 457
La conservation des forces 467
Principe de l'incitation et théorie générale de l'isochronisme des vibrations 479
Application aux horloges de différents mouvements vibratoires plus ou moins isochrones 499
Huygens, Roemer et Leibniz horlogers 597
Instruments nautiques 625
Résultats de quelques expéditions maritimes 631
Anecdota 655
Tables.
I. Pièces et Mémoires 671
II. Personnes et Institutions mentionnées 675
III. Ouvrages cités 685
IV. Matières Traitées 695
Additions et Corrections 698

BINDING LIST AUG 1 1955

Q
113
H89
1888
t.18

Huygens, Christiaan
Oeuvres complètes

P&A Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY